C. BRÉARD

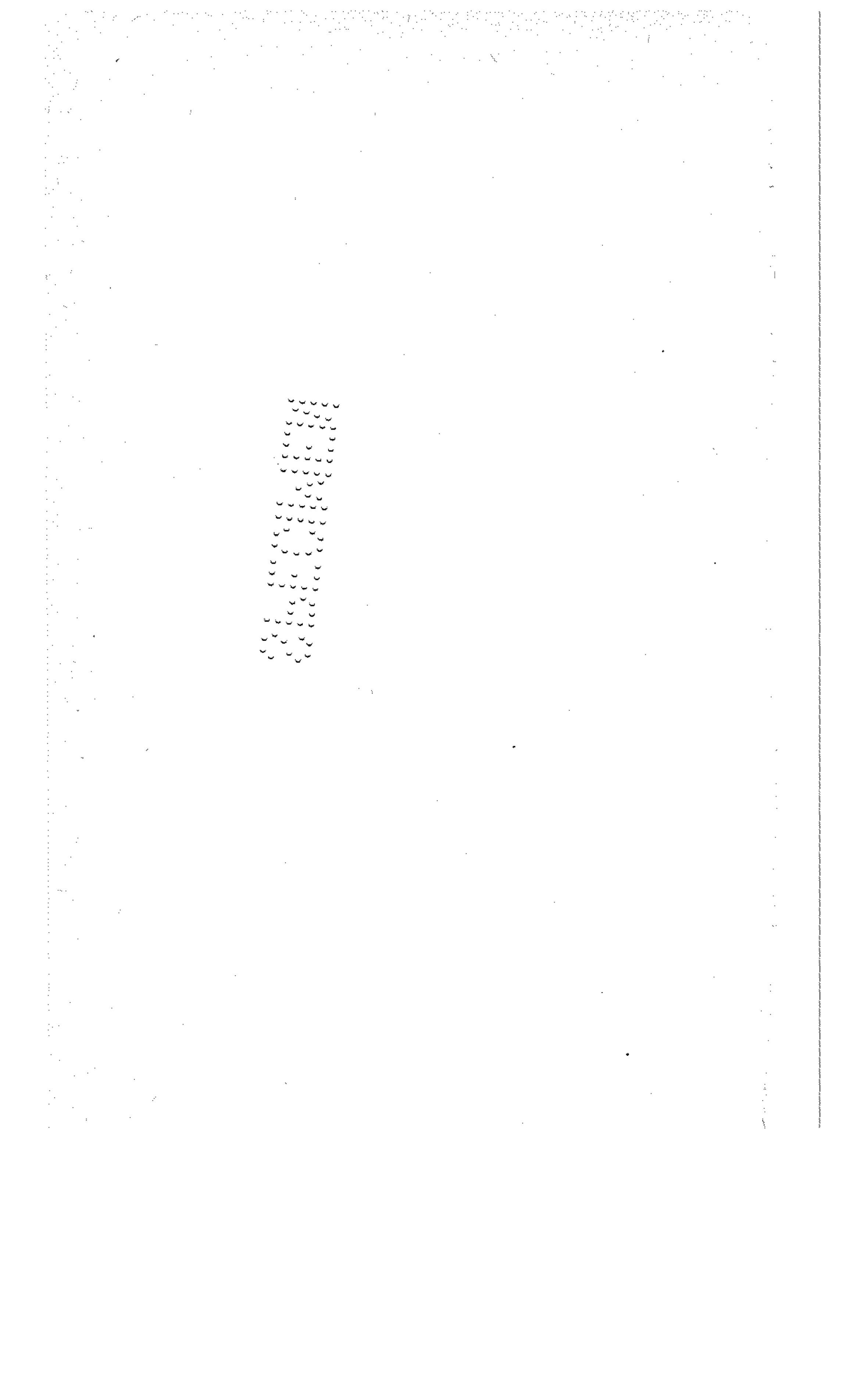
MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

L'ÉCOLE

Cours Maintenon

Rolle 6.94

6.573



C. BRÉARD

MATHÉMATIQUES

CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

TOME III

N° 470/3

ÉDITIONS DE L'ÉCOLE

11, rue de Sèvres, PARIS-VI[e]

DU MÊME AUTEUR

MATHÉMATIQUES, Classe de 6e
MATHÉMATIQUES, Classe de 5e
MATHÉMATIQUES, Classe de 4e
MATHÉMATIQUES, Classe de 3e
MATHÉMATIQUES, Classe de 2e A′, C, M, M′
MATHÉMATIQUES, Classe de 2e AB
MATHÉMATIQUES, Classe de 1re A′, C, M, M′
MATHÉMATIQUES, Classe de 1re AB
MATHÉMATIQUES, Classe de Mathématiques élémentaires. Tomes I et II

◆

POUR LA MÊME CLASSE

LA PENSÉE ET L'ACTION par **Foulquié.**
PHYSIQUE Collection **Eve-Peschard.**
CHIMIE Collection **Eve-Langlois.**
PROBLÈMES DE PHYSIQUE ET CHIMIE par **Eve.**
CAHIER DE MANIPULATIONS DE PHYSIQUE ET CHIMIE par **Brault-Rey.**
PRÉCIS D'INITIATION AU CINÉMA par **Agel.**

© Éditions de l'École, Paris 1964.

SYMBOLES ET NOTATIONS

$\neg$	négation d'une assertion	$\neg$A, non A
$\wedge$	conjonction de deux assertions	$C = A \wedge B$, A *et* B
$\vee$	disjonction de deux assertions	$D = A \vee B$, A *ou* B (*ou* non exclusif)
$\Rightarrow$	implication	$A \Rightarrow B$, A implique B
$\Leftrightarrow$	réciprocité	$A \Leftrightarrow B$, A équivalent à B
E, ...	ensembles : $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$	ou $E = \{x / x \in A$ *et* $x \in B\}$
$\in$	appartenance	$x \in E$, x est élément de E
$\notin$	non appartenance	$x \notin E$, x n'est pas élément de E
$\subset$	inclusion	$A \subset E$, A inclus dans E $E \supset A$, E contient A
$\not\subset$	non inclusion	$A \not\subset B$, A n'est contenu dans B $B \not\supset A$, B ne contient pas A
$\varnothing$	ensemble vide; partie vide	
$\mathfrak{P}(E)$	ensemble des parties de E	
$\complement_E(A)$	complémentaire de A par rapport à E	
$\cap$	intersection	$J = A \cap B$, J égal à A inter B
$\cup$	réunion	$R = A \cup B$, R égal à A union B
$\forall$	quantificateur universel	$(\forall x)(p)$, tout x possède la propriété p
$\exists$	quantificateur existentiel	$(\exists x)(p)$, il existe au moins un x qui possède la propriété p
$E \times F$	produit cartésien de deux ensembles	E croix F
$pr_1 G$	première projection graphe G	$pr_1 G = A^*$
$pr_2 G$	seconde projection graphe G	$pr_2 G = B^*$
A^*	ensemble de définition d'une correspondance	
B^*	ensemble des valeurs d'une correspondance	
$\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i$	intersection d'une famille d'ensembles	
$\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$	réunion d'une famille d'ensembles	
$\overset{-1}{\Gamma}$	correspondance réciproque de la correspondance Γ	
$g_o f = h$	produit de deux correspondances :	g rond f

$x \mathcal{R} y$ le couple $(x ; y)$ possède la propriété $\mathcal{R}$
$|$ $a|b$, a divise b ; a est diviseur de b
$x \sim y$, $x = y$, mod $\mathcal{R}$; x équivalent à y, modulo $\mathcal{R}$
$x < y$: x antérieur à y
$y > x$: y postérieur à x

$\inf_E X$ ou $\inf X$, borne inférieure de X dans E
$\sup_E X$ ou $\sup X$, borne supérieure de X dans E

$*$ astérisque ; étoile ; star
$\top$ truc
$\perp$ antitruc
(symboles de lois de composition)

$x \top x = \overset{2}{\top} x$
$f(\alpha ; x) = \alpha . x$ $(\alpha \in \Omega ; x \in E)$, loi de composition externe (α : opérateur)
$\aleph_0$ aleph zéro ; cardinal du dénombrable $[\aleph_0 = \text{card}(N)]$
$\mathfrak{C}$ cardinal du continu $[(\mathfrak{C} = \text{card}(R)]$
A eq B ou Eq (A ; B) : A équipotent à B
$n!$ factorielle n
A_n^p nombre des arrangements de n éléments pris p à p
P_n nombre des permutations de n éléments $P_n = A_n^n = n!$
C_n^p nombre des combinaisons de n éléments pris p à p $C_n^p = \binom{n}{p}$
$\sum$ symbole de sommation $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$
div A ensemble des diviseurs de A
$A \wedge B = \Delta$, p.g.c.d. de A et B $\Delta = A \wedge B$, A pgcd B
$A \vee B = \mu$, p.p.c.m. de A et B $\mu = A \vee B$, A ppcm B
$a \equiv b$ mod n ; a congru à b, modulo n
$\dot{a} = \text{Cl}(a)$, classe de l'élément a $\dot{a}$; a point
N ensemble des cardinaux finis, ou entiers naturels
Z anneau des entiers rationnels (entiers relatifs)
Z/n ou Z/nZ, anneau des entiers modulo n
Q corps des rationnels
R corps des réels
C corps des complexes
$N^* = N - \{0\}$ $Z^* = Z - \{0\}$ $Q^* = Q - \{0\}$
$R^* = R - \{0\}$ $C^* = C - \{0\}$
$Z_+ = \{x / x \in Z ; x \geqslant 0\}$ Q_+ R_+
$Z_- = \{x / x \in Z ; x < 0\}$ Q_- R_-

$\mathcal{M}_1^3$	ensemble des matrices à 1 colonne et 3 lignes
$\mathcal{B}_0$	$= \{ i ; j \}$, base canonique de l'espace K^2
$\mathcal{B}_0$	$= \{ i ; j ; k \}$, base canonique de l'espace K^3
$F\perp$	ensemble des vecteurs orthogonaux à F
$\mathcal{P}(K)$	anneau des polynômes construits sur K (anneau ou corps K)
$\mathcal{F}$	corps des fractions de polynômes

Relations

- [R] Réflexivité
- [S] Symétrie
- [AS] Antisymétrie
- [T] Transitivité

Lois de composition

- [C] Commutativité
- [D_G] Distributivité à gauche
- [D_D] Distributivité à droite

  [D] = [D_G] et [D_D]
- [D′] Loi externe distributive pour l'addition dans E
- [D″] Loi externe distributive pour l'addition dans Ω
- [A] Associativité d'une loi interne
- [A′] Associativité mixte entre la loi externe et la multiplication dans Ω
- [A″] Associativité mixte entre la loi externe et la multiplication dans E
- [N] Existence d'un neutre
- [S] L'ensemble E est symétrisé

sections minorées

- [S_1] $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq Q$
- [S_2] $(\forall a)(\forall b)\ (a \in \alpha$ et $a \leqslant b \Rightarrow b \in \alpha)$
- [S_3] α n'a pas de plus petit élément

distance

- [M_1] $d(A; B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, axiome de séparation
- [M_2] $(\forall A)(\forall B)\quad d(A; B) = d(B; A)$, axiome de symétrie
- [M_3] $(\forall A)(\forall B)(\forall C),\quad d(A; B) \leqslant d(A; C) + d(C; B)$, axiome de l'inégalité triangulaire.

TROISIÈME PARTIE

TOPOLOGIE et ANALYSE

LIVRE VII

TOPOLOGIE

CHAPITRE LXXI

NOTIONS DE TOPOLOGIE

1011. Ouverts de R.

Dans R, on appelle ouvert élémentaire tout intervalle ouvert]α; β[:

$$]\alpha ; \beta[= \{ x/\alpha < x < \beta \}$$

Un ouvert de R est une réunion d'ouverts élémentaires.

◇ *Exemples.* G =]− 1; 2[est un ouvert élémentaire (fig. 1011 *a*)
G =]− 1; 1[∪]1; 2[est un ouvert.

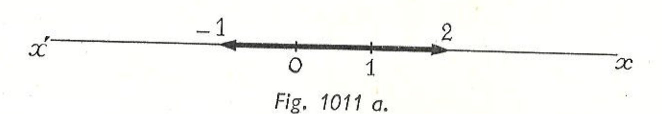


Fig. 1011 a.

1012. Fermés élémentaires de R.

Un fermé élémentaire de R est un intervalle fermé [α; β]:

$$[\alpha ; \beta] = \{ x/\alpha \leqslant x \leqslant \beta \}$$

◇ *Exemple.* F = [− 1; 2] est un fermé élémentaire (fig. 1012 *a*).

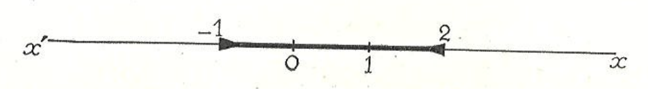


Fig. 1012 a.

1013. Pavés ouverts de R^2.

Dans R^2, on appelle pavé ouvert, ou ouvert élémentaire, tout produit cartésien de deux ouverts élémentaires de R.

$$\pi =]\alpha ; \beta[\times]\gamma ; \delta[$$

◇ *Exemple.* $\pi =]1 ; 2[\times]0 ; 1[$ est un pavé ouvert de R^2 (fig. 1013 *a*).

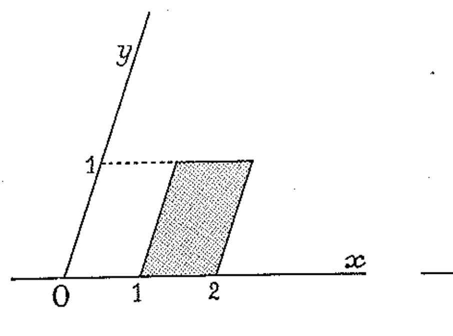


Fig. 1013 a.

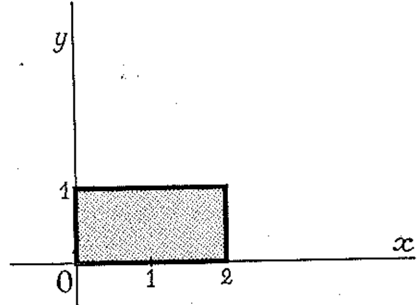


Fig. 1014 a.

1014. Pavés fermés de R^2.

Un pavé de R^2 est le produit cartésien de deux fermés élémentaires de R :

$$\bar{\pi} = [\alpha ; \beta] \times [\gamma ; \delta]$$

◇ *Exemple.* $\bar{\pi} = [0 ; 2] \times [0 ; 1]$ est un pavé fermé de R^2 (fig. 1014 *a*).

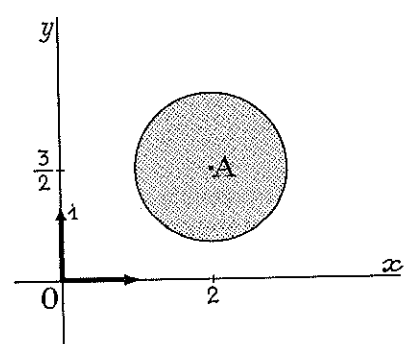


Fig. 1015 a.

1015. Disques ouverts de R^2.

On suppose maintenant que le plan R^2 est un plan métrique, muni de la distance euclidienne classique.

On appelle disque ouvert, de centre M_0 et de rayon ρ, l'ensemble $B(M_0 ; \rho)$ défini par

$$B = B(M_0 ; \rho) = \{M / d(M_0 ; M) < \rho\}$$

◇ *Exemple.* $B = B(A ; 1)$ avec $A\left(2 ; \frac{3}{2}\right)$ est un disque ouvert de R^2 (fig. 1015 *a*).

1016. Disques fermés de R^2.

Le plan R^2 est encore le plan euclidien.

On appelle disque fermé, de centre M_0 et de rayon ρ, l'ensemble $\bar{B}$ $(M_0; \rho)$ défini par

$$\bar{B} = \bar{B}(M_0; \rho) = \{M / d(M_0; M) \leqslant \rho\}$$

◇ *Exemple.* $\bar{B} = \bar{B}(A; 1)$ est un disque fermé de R^2 (fig. 1016 *a*) :

$$\bar{B} = \{M / d(A; M) \leqslant 1\}$$

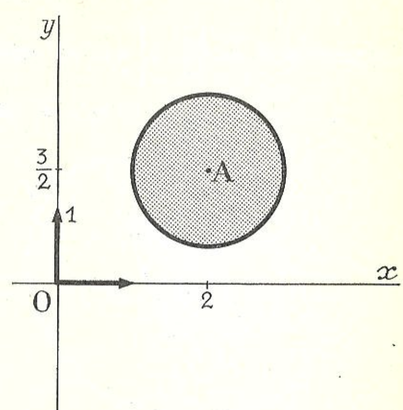


Fig. 1016 a.

1017. Pavés de R^3.

Un pavé ouvert de R^3 est le produit cartésien de trois ouverts élémentaires de R :

$$\pi =]\alpha; \beta[\times]\alpha'; \beta'[\times]\alpha''; \beta''[$$

Un pavé fermé de R^3 est le produit cartésien de trois fermés élémentaires de R :

$$\bar{\pi} = [\alpha; \beta] \times [\alpha'; \beta'] \times [\alpha''; \beta'']$$

1018. Boules de R^3.

On suppose maintenant que l'espace R^3 est un espace métrique euclidien.

Une boule ouverte, de centre M_0 et de rayon ρ, est l'ensemble B $(M_0; \rho)$ défini par

$$B = B(M_0; \rho) = \{M / d(M_0; M) < \rho\}$$

Une boule fermée, de centre M_0 et de rayon ρ, est l'ensemble $\bar{B}$ $(M_0; \rho)$ défini par

$$\bar{B} = \bar{B}(M_0; \rho) = \{M / d(M_0; M) \leqslant \rho\}$$

1019. Voisinages.

On appelle voisinage d'un point M_0 toute partie de l'espace E ($E = R$, R^2 ou R^3) qui contient un ouvert contenant M_0 (fig. 1019 *a* et *b*).

◇ *Exemple.* Dans R soit le point $x_0 = 2$ et l'ouvert $G = \left]\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right[$.
L'ensemble $V = \left[\frac{3}{2}; 3\right[$ est un voisinage de $x_0 = 2$. En effet :

$$x_0 \in G \quad \text{et} \quad G \subset V$$

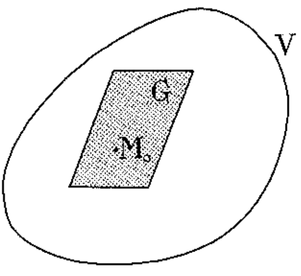


Fig. 1019 a.

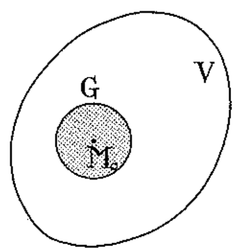


Fig. 1019 b.

1020. Ensemble connexe.

Une partie A de E (E = R, R^2 ou R^3) est connexe si elle est d'un seul tenant (1)**.**

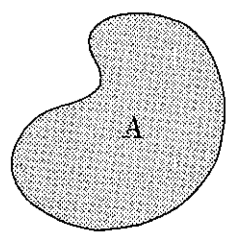


Fig. 1020 a.

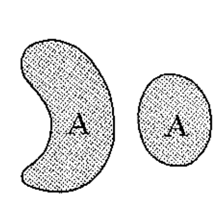


Fig. 1020 b.

La figure 1020 *a* représente une partie connexe. La figure 1020 *b* représente une partie non connexe.

---

(1) Il s'agit ici d'une définition intuitive.

CHAPITRE LXXII

CONTINUITÉ

1021. Continuité d'une fonction en un point.

On considère deux espaces E et F : $E = R^n$ et $F = R^p$.

1° Soit une fonction f de E dans F :

$$f : \quad x \in E \longrightarrow f(x) \in F$$

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

On dit que la fonction f est continue au point x_0 de E si, quel que soit le voisinage W de f (x_0), il existe un voisinage V de x_0 tel que son image f (V) par f soit contenue dans W (fig. 1021 *a*).

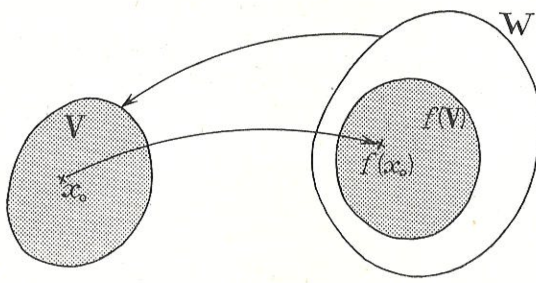


Fig. 1021 a.

Donc :

$$[f, \text{ continue en } x_0] \Leftrightarrow [(\forall W)\ W \in \mathcal{V}(f(x_0)), (\exists V)\ V \in \mathcal{V}(x_0) : f(V) \subset W]$$

en désignant par $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.

2° Cette définition équivaut à :

On dit que la fonction f est continue au point x_0 de E, si quel que soit le voisinage W de f (x_0), $\overset{-1}{f}$ (W) est un voisinage de x_0 (fig. 1021 *b*)

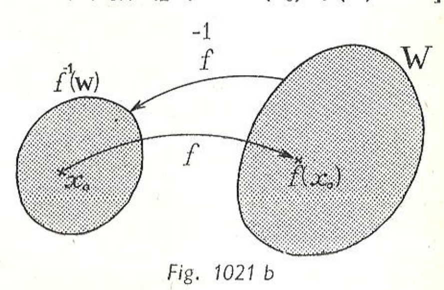


Fig. 1021 b

$$[f, \text{ continue en } x_0] \Leftrightarrow [(\forall\ W)\ W \in \mathcal{V}(f(x_0)),\ \overset{-1}{f}(W) \in \mathcal{V}(x_0)]$$

3° On suppose maintenant que E et F sont des espaces métriques euclidiens.

Si on prend pour voisinages des boules $W = B(f(x_0);\ \varepsilon)$ et $V = B(x_0;\ \alpha)$, on peut donner la définition suivante :

On dit que la fonction f est continue au point x_0 de E, si quelle que soit la boule $W = B(f(x_0);\ \varepsilon)$, de centre $f(x_0)$ et de rayon ε, il existe une boule $V = B(x_0;\ \alpha)$ de centre x_0 et de rayon α, telle que son image par f soit contenue dans la boule W (fig. 1021 c).

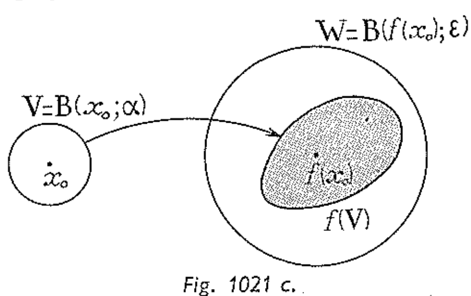


Fig. 1021 c.

4° En remarquant que les boules sont déterminées par les rayons ε et α, la définition prend la forme suivante :

On dit que la fonction f est continue au point x_0 de E, si quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre positif α, tel que soit x si $d(x_0;\ x) \leqslant \alpha$ alors $d(f(x_0);\ f(x)) \leqslant \varepsilon$ (fig. 1021 *d*).

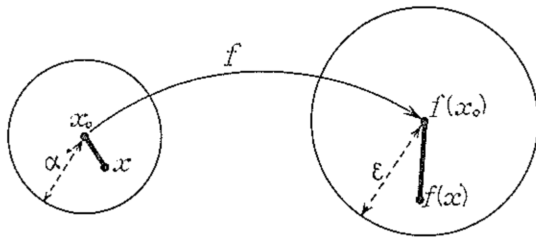


Fig. 1021 d.

$$[f, \textit{continue en } x_0] \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)\ (\exists\alpha)\ (\forall x) : d(x_0\,;\ x) \leqslant \alpha \Rightarrow d[f(x_0), f(x)] \leqslant \varepsilon]$$

5° Dans le cas où $E = R$ et $F = R$, on a :

$$[f, \textit{continue en } x_0] \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)\ (\exists\alpha)\ (\forall x)\ |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon]$$

1022. Continuité sur une partie.

Soit une partie A de E.

On dit que l'application f de E dans F est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

1023. Composition des applications continues.

Soient $E = R^n$, $F = R^p$, $G = R^q$, trois espaces, f une application de E dans F continue au point x_0 de E, g une application de F dans G continue au point $y_0 = f(x_0)$ de F.
Alors l'application $h = g \circ f$ de E dans G est continue au point x_0 de E.

On considère le point $z_0 = g(y_0) = g[f(x_0)] = h(x_0)$ (fig. 1023 *a*).

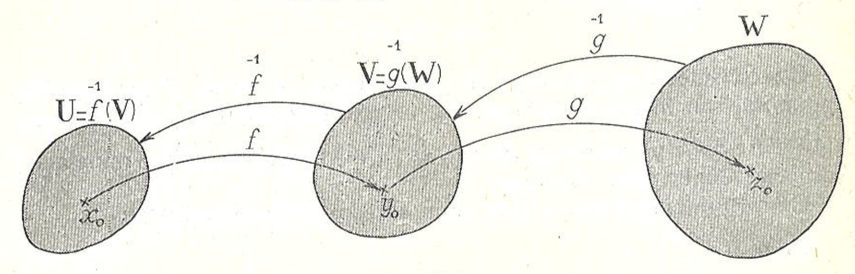


Fig. 1023 a.

Soit W un voisinage quelconque de z_0. Comme g est continue en y_0, $\overset{-1}{g}(W) = V$ est un voisinage de y_0. Comme f est continue en x_0, $\overset{-1}{f}(V) = U$ est un voisinage de x_0.

Or :

$$U = \overset{-1}{f}(V) = \overset{-1}{f}\left[\overset{-1}{g}(W)\right] = \left(\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}\right)(W)$$
$$= \overset{-1}{h}(W)$$

car $\overset{-1}{h} = (g \circ f)^{-1} = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$.

Ainsi si W est un voisinage quelconque de $z_0 = h(x_0)$, alors $\overset{-1}{h}(W) = U$ est un voisinage de x_0, ce qui signifie que h est continue au point x_0 de E.

1024. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues.

On démontre, et on admet ici, les résultats suivants :

1° ***L'image par une application continue d'un ensemble fermé de E est un ensemble fermé de F.***

2° ***L'image par une application continue d'un ensemble connexe de E est un ensemble connexe de F.***

1025. Continuité des transformations géométriques affines.

Soit une transformation affine régulière f du plan R^2. Un point M_0 a pour image $M'_0 = f(M_0)$ (fig. 1025 *a*).

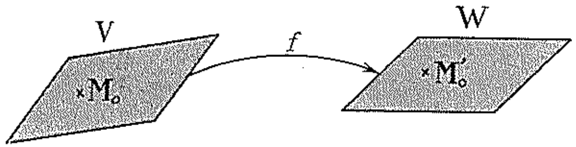


Fig. 1025 a.

On considère un voisinage W de M'_0 ayant la forme d'un parallélogramme, son image réciproque est un parallélogramme V qui contient M_0; c'est donc un voisinage de M_0, et $\overset{-1}{f}(W) \in \mathcal{V}(M_0)$, cela signifie que f est une application continue.

Ce raisonnement est valable pour un espace quelconque R^n.

Donc :

Les transformations affines sont continues en tout point de l'espace.

1026. Continuité de l'inversion.

Soit l'inversion $f = \text{inv}(0; p)$. C'est une tranformation définie dans le plan (ou l'espace) privé du point O.

Un point M_0 a pour image le point $M'_0 = f(M_0)$, et un point M a pour image le point $M' = f(M)$. On a :

$$d(M_0; M) = \frac{|p|}{OM'_0 \cdot OM'} \cdot d(M'_0; M')$$

ou

$$d(M'_0; M') = \frac{OM'_0 \cdot OM'}{|p|} \cdot d(M_0; M)$$

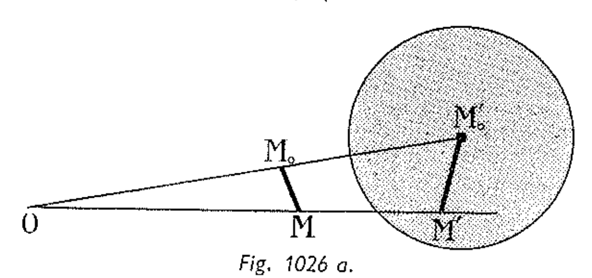


Fig. 1026 a.

On envisage alors un voisinage de M'_0 ne contenant pas 0; par exemple

un disque de centre M_0 et de rayon ε avec $d(M'_0, M') \leqslant \varepsilon$ (fig. 1026 *a*). Dans ces conditions, on a :

$$OM'_0 \cdot OM' \leqslant OM'_0 (OM'_0 + \varepsilon)$$

et

$$d(M'_0 ; M') \leqslant \frac{OM'_0 (OM'_0 + \varepsilon)}{|p|} \cdot d(M_0 ; M)$$

Soit :

$$\alpha = \frac{|p| \cdot \varepsilon}{OM'_0 (OM'_0 + \varepsilon)}$$

Par suite si

$$d(M_0 ; M) \leqslant \alpha$$

il vient :

$$d(M'_0 ; M') \leqslant \frac{OM'_0 (OM'_0 + \varepsilon)}{|p|} \cdot \frac{|p| \cdot \varepsilon}{OM'_0 (OM'_0 + \varepsilon)}$$

c'est-à-dire :

$$d(M'_0 ; M') \leqslant \varepsilon$$

Donc : $d(M_0 ; M) \leqslant \alpha \Rightarrow d(M'_0 ; M') \leqslant \varepsilon$

ce qui signifie que l'inversion f est continue en M_0.

Et :

L'inversion est continue en tout point de l'espace privé du centre de l'inversion.

1027. Inverse d'un disque.

Soit un disque D, limité par le cercle C, et son inverse D′ par l'inversion $f = \text{inv}(0; p)$.

Le disque D étant connexe et l'inversion étant continue, D′ est un connexe. Pour déterminer D′, il suffit donc de trouver l'inverse d'un point intérieur au disque D.

Si O appartient au cercle C, frontière du disque D, l'image de C est une droite C′ (fig. 1027 *a*). Le centre Ω du cercle a pour image le symétrique Ω' de O pour la droite C′. Cela détermine *le demi-plan D′ image de D.*

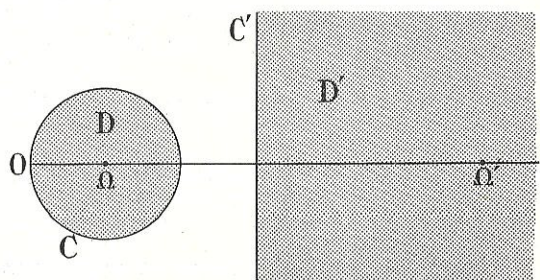


Fig. 1027 a.

Si O n'appartient pas au disque D, l'image du cercle C est un cercle

C′ (fig. 1027 *b*). Le centre Ω′ du cercle C′ est l'image du conjugué I du point O pour les points A et B extrémité du diamètre AB. Le point I appartenant à D, Ω′ appartient à l'image D′ = *f*(D). Et *l'image du disque D est le disque D′ de frontière C′.*

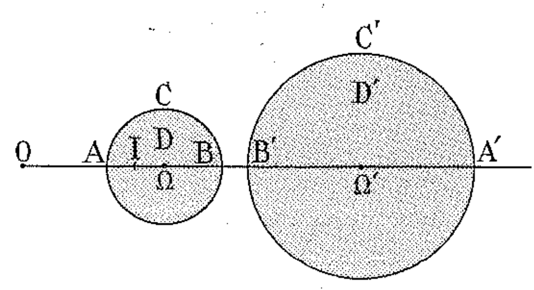


Fig. 1027 b.

Si O appartient au disque, sans appartenir à C, l'image du cercle C est un cercle C′ (fig. 1027 C).

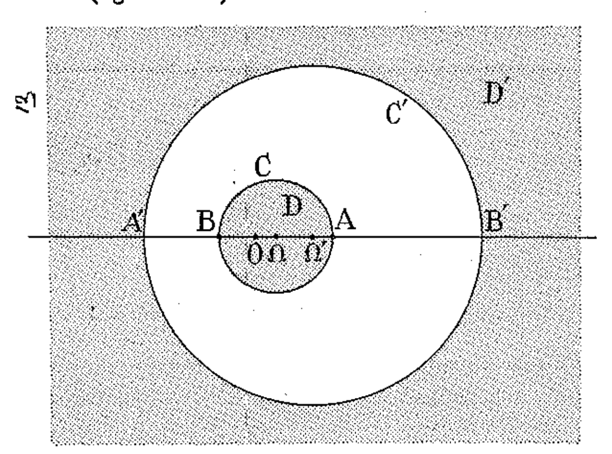


Fig. 1027 c.

Dans ce cas *l'image du disque D est l'extérieur du cercle C′.*

1028. Théorèmes fondamentaux sur les fonctions numériques continues.

1° Dans R un ensemble fermé et connexe est un fermé élémentaire.

Donc :

L'image par une application numérique continue d'un ensemble

A fermé et connexe de R, R^2 ou R^3 dans R est un intervalle fermé [m; M].

2° On en déduit que :

$$(\exists a)\ (a \in A) : f(a) = M$$
$$(\exists b)\ (b \in A) : f(b) = m$$

On traduit ce résultat, en disant que *les bornes* m *et* M *sont atteintes sur A.*

3° De même :

$$(\forall \mu)\ (\mu \in [m; M])\ (\exists c)\ (c \in A) : f(c) = \mu.$$

On traduit ce résultat, en disant que *les valeurs intermédiaires sont atteintes sur A.*

4° En particulier si f est une application de R dans R, si $I = [\alpha; \beta]$ on a $f(I) = [m, M]$.

Si $f(\alpha)$ *et* $f(\beta)$ *sont de signes opposés,* $f(x)$ *s'annule sur I.*

1029. Addition des fonctions numériques continues.

Soient deux fonctions numériques de $E = R^n$ dans R :

f : $x \in E \longrightarrow f(x) \in R$

g : $x \in E \longrightarrow g(x) \in R$

Si f et g sont continues au point x_0, on a :

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists \alpha)\ (\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists \beta)\ (\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \beta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $\gamma = \sup(\alpha; \beta)$, le plus grand des deux nombres α et β, Alors :

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists \gamma)\ (\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \gamma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists \gamma)\ (\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \gamma \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

La fonction $s = f + g$ est définie par

s : $x \in E \longrightarrow s(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in R$

Par suite :

$$|s(x) - s(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)|$$
$$= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)$$

et

$$|s(x) - s(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

ou

$$|s(x) - s(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ou

$$|s(x) - s(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Donc :

$$(\forall\varepsilon)\,(\exists\gamma)\,(\forall x) : d\,(x_0 ; x) \leqslant \gamma \Rightarrow |s(x) - s(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Et :

La somme de deux fonctions numériques continues en x_0 est une fonction numérique continue en x_0.

1030. Multiplication d'une fonction numérique continue par un réel.

Soit une fonction numérique de $E = R^n$ dans R, et un nombre réel λ :

f : $$x \in E \longrightarrow f(x) \in R$$

Si f est continue au point x_0, on a :

$$(\forall\varepsilon)\,(\exists\alpha)\,(\forall x) : d\,(x_0 ; x) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

La fonction $p = \lambda f$ est définie par

p : $$x \in E \longrightarrow p\,(x) = (\lambda f)\,(x) = \lambda \cdot f\,(x) \in R$$

Par suite :

$$|p\,(x) - p\,(x_0)| = |\lambda \cdot f\,(x) - \lambda\, f(x_0)|$$
$$= |\lambda| \cdot |f\,(x) - f(x_0)|$$

et

$$p\,(x) - p\,(x_0)| \leqslant |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

ou

$$|p\,(x) - p\,(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Donc ;

$$(\forall\varepsilon)\,(\exists\alpha)\,(\forall x) : d\,(x_0 ; x) \leqslant d \Rightarrow |p\,(x) - p\,(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Et :

Le produit d'une fonction numérique continue au point x_0 par un nombre réel est une fonction numérique continue en x_0.

1031. Multiplication des fonctions numériques continues.

Soient deux fonctions numériques de $E = R^n$ dans R :

$$f: \quad x \in E \longrightarrow f(x) \in R$$
$$g: \quad x \in E \longrightarrow g(x) \in R$$

On suppose que les fonctions f et g sont continues, dans la boule fermée $\bar{B}(x_0; \rho)$ de centre x_0 et de rayon ρ. Les fonctions continues f et g sont donc minorées et majorées dans $\bar{B}$, autrement dit il existe un nombre M positif tel que, quel que soit x de $\bar{B}$ on a $|f(x)| \leqslant M$ et $|g(x)| \leqslant M$.

On a, puisque f et g sont continues en x_0,

$$(\forall \varepsilon)(\exists \alpha)(\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$

et

$$(\forall \varepsilon)(\exists \beta)(\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \beta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$

Soit $\gamma = \sup(\alpha; \beta)$, le plus grand des deux nombres α et β ; alors :

$$(\forall \varepsilon)(\exists \gamma)(\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \gamma \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$

et

$$(\forall \varepsilon)(\exists \gamma)(\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \gamma \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$

La fonction $p = f \cdot g$ est définie par

$$p: \quad x \in E \longrightarrow p(x) = (fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \in R$$

Par suite :

$$|p(x) - p(x_0)| = |f(x) \cdot g(x) - f(x_0) - g(x_0)|$$
$$= |g(x) \cdot [f(x) - f(x_0)] + f(x_o) \cdot [g(x) - g(x_0)]$$

et

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant |g(x)| \cdot |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \cdot |g(x) - g(x_0)|$$
$$\leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\leqslant \varepsilon$$

Ainsi :

$$(\forall \varepsilon)(\exists \gamma)(\forall x) : d(x_0; x) \leqslant \gamma \Rightarrow |p(x) - p(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Et :

Le produit de deux fonctions numériques continues au point $\mathbf{x_0}$ ***est une fonction numérique continue en*** $\mathbf{x_0}$.

1032. Continuité de la fonction constante.

Soit la fonction constante f :

$$f: \qquad x \in \mathrm{R} \longrightarrow y = f(x) = a \in \mathrm{R}.$$

Elle est définie quel que soit x; et $f(x_0) = y_0 = a$.
On se donne un voisinage $\mathrm{W} = (\alpha; \beta)$ de $y_0 = a$. Si on considère un voisinage quelconque $\mathrm{V} = (\lambda; \mu)$ de x_0, l'image de V est $f(\mathrm{V}) = \{a\} \subset \mathrm{W}$.

Donc :

La fonction constante $\mathbf{x \longrightarrow a}$ ***est continue pour toute valeur de*** $\mathbf{x}$.

1033. Continuité de la fonction affine.

Soit la fonction affine f :

$$f: \qquad x \in \mathrm{R} \longrightarrow y = f(x) = ax + b \in \mathrm{R}.$$

Elle est définie quel que soit x et :

$$f: \qquad x_0 \in \mathrm{R} \longrightarrow y_0 = f(x_0) = ax_0 + b \in \mathrm{R}.$$

On se donne un voisinage W de y_0 :

$$\mathrm{W} = (y_0 - \alpha; y_0 + \beta),$$

α et β étant des nombres positifs.

Si $\mathbf{a > 0}$, on envisage le voisinage V de x_0 :

$$\mathrm{V} = \left(x_0 - \frac{\alpha}{a}; x_0 + \frac{\beta}{a}\right).$$

Il est explicité par la double inégalité :

$$x_0 - \frac{\alpha}{a} < x < x_0 + \frac{\beta}{a}.$$

L'image de V par f s'obtient en multipliant par a et en ajoutant ensuite b :

$$ax_0 - \alpha < ax < ax_0 + \beta$$
$$ax_0 + b - \alpha < ax + b < ax_0 + b + \beta$$

c'est-à-dire :

$$y_0 - \alpha < ax + b < y_0 + \beta.$$

Donc :

$$f(V) = W.$$

Si a < 0, on envisage le voisinage V de x_0 :

$$V = \left(x_0 + \frac{\beta}{a}; x_0 - \frac{\alpha}{a}\right).$$

Le même raisonnement que pour $a > 0$, montre que :

$$f(V) = W.$$

On peut alors énoncer :

***La fonction affine* x → ax + b *est continue pour toute valeur de* x.**

1034. Continuité des fonctions polynômes.

Soit la fonction identique $x \to x$; elle est continue, car c'est un cas particulier de la fonction affine.

Soit la fonction $x \to x^n$, $n \in N$. On a $x = x^n = x . x \ldots x$; donc la fonction $x \to x^n$ est continue comme produit de n fonctions continues.

Il en est de même de ax^n.

D'où :

***Toute fonction polynôme* $x \to a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *est continue pour toute valeur de* x.**

1035. Algèbre des fonctions numériques continues sur une partie.

Des résultats précédents, on déduit facilement :

L'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des fonctions numériques continues sur la partie A de E est une algèbre commutative unitaire.

1036. Fonctions réelles monotones.

On considère maintenant une fonction f numérique réelle :

$$f: \quad x \in R \longrightarrow f(x) \in R$$

La fonction f est monotone sur un intervalle $I = [\alpha; \beta] \subset R$, si elle est croissante sur I, ou si elle est décroissante sur I.

1037. Opérations sur les fonctions monotones.

1° ***La somme de deux fonctions monotones croissantes sur I est une fonction croissante sur I.***

La somme de deux fonctions monotones décroissantes sur I est une fonction décroissante sur I.

2° *Mais la somme de deux fonctions monotones sur I n'est pas nécessairement monotone sur I.*

Ainsi soient les deux fonctions f et g.

$$f : \quad x \in [-1;+1] \longrightarrow f(x) = x \in \mathrm{R}$$

et

$$g : \begin{cases} x \in [-1;0] \longrightarrow g(x) = -\dfrac{x}{2} \in \mathrm{R} \\ x \in]0;+1] \longrightarrow g(x) = -2x \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

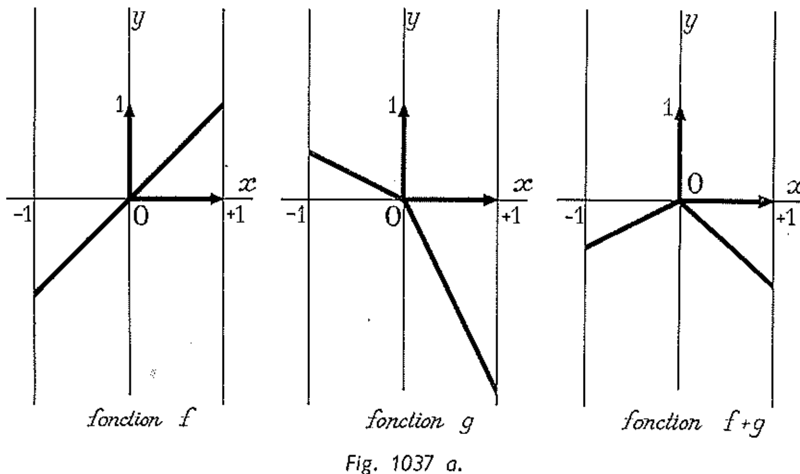


Fig. 1037 a.

Donc :

$$f+g : \begin{cases} x \in [-1;0] \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x}{2} \\ x \in]0;+1] \longrightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = -x \end{cases}$$

et cette fonction $f+g$ n'est pas monotone sur I.

La figure (1037 *a*) donne les représentations graphiques des fonctions f, g et $f+g$.

3° **Soit un nombre α positif :**

si la fonction f est croissante sur I, alors $\alpha.f$ est croissante sur I;

si la fonction f est décroissante sur I, alors α.f est décroissante sur I.

Soit un nombre α négatif :

si la fonction f est croissante sur I, alors α.f est décroissante sur I;
si la fonction f est décroissante sur I, alors α.f est croissante sur I.

4° **Soient deux fonctions f et g positives sur I,** c'est-à-dire que

$$(\forall x)\ (x \in \mathrm{I}) : f(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g(x) \geqslant 0$$

Si les fonctions f et g sont positives croissantes sur I, alors f.g est croissante sur I.

5° *Mais si les fonctions* f *et* g *sont monotones sur I, on ne peut conclure que* f.g *est monotone sur I.*

Ainsi soit la fonction f :

$$f: \qquad x \in [-1 ; +1] \longrightarrow f(x) = x$$

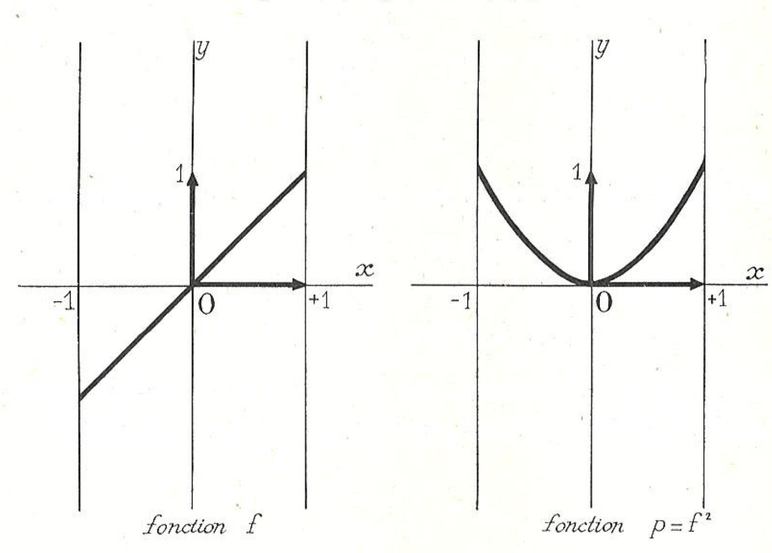


Fig. 1037 b.

On a alors :

$$p = f^2 : \qquad x \in [-1 ; +1] \longrightarrow f(x) = [f(x)]^2 = x^2$$

f est monotone sur $[-1 ; +1]$, mais $p = f^2$ n'est pas monotone sur I (fig. 1037 *b*).

1038. Fonctions réelles monotones continues.

Si la fonction f est continue monotone sur I, c'est une bijection de I sur f (I); donc $\overset{-1}{f}$ est une bijection de f (I) sur I.

En effet, si $I = [\alpha ; \beta]$ on a $f(I) = [m ; M]$ et :

$$h = \overset{-1}{f} : \quad y \in [m ; M] \longrightarrow h(y) = \overset{-1}{f}(y) = x \in [\alpha ; \beta]$$

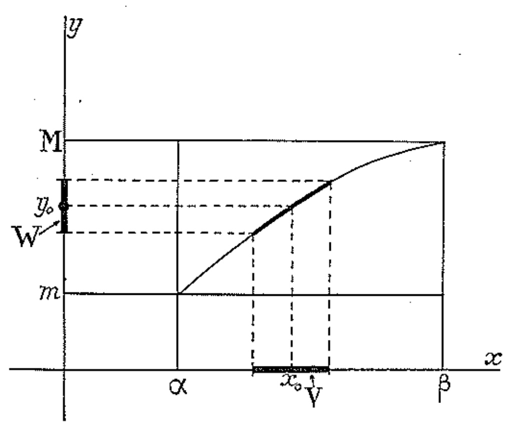


Fig. 1038 a.

Si V est un voisinage de x_0, son image par f est $W = f(V)$. Donc :

$$W = f(V) = \left(\overset{-1}{f}\right)^{-1}(V) = \overset{-1}{h}(V).$$

Et :

$$(\forall V),\ V \in \mathcal{V}(x_0) : \overset{-1}{h}(W) \in \mathcal{V}(y_0)$$

autrement dit $h = \overset{-1}{f}$ *est continue en* y_0. On dit que **f est bicontinue.**

La figure (1038 *a*) donne une idée intuitive de la démonstration.

CHAPITRE LXXIII

LIMITES

1039. Expression « x tend vers x_0 ».

Lorsque, étant donné a priori un voisinage arbitraire V de x_0, x peut prendre toutes les valeurs de ce voisinage sauf peut-être x_0, on dit que x tend vers x_0.

Cela signifie que x peut prendre toutes les valeurs de tous les voisinages de x_0.

Lorsque $x_0 = 0$ *et que tous les voisinages V sont de la forme* $[0; \alpha]$ *on dit que* x *tend vers* 0 *par valeurs positives ou que* x *tend vers* 0^+; *on définit de même l'expression* x *tend vers* 0^-.

1040. Limite d'une fonction.

Soient deux espaces $E = R^n$ et $F = R^p$.

1° Soit une fonction f de E dans F.

$$f: \quad x \in E \longrightarrow f(x) \in F.$$

On suppose que cette fonction est définie dans un voisinage U de x_0 sauf peut-être pour la valeur x_0.

On dit qu'un point λ de F est limite de f(x) lorsque x tend vers x_0, si quel que soit le voisinage W de λ il existe un voisinage V de x_0 tel que l'image f (V − { x_0 }) de V − { x_0 } par f soit contenue dans W (fig. 1040 *a*).

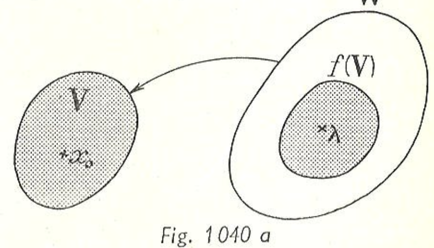


Fig. 1040 a

On note : $\lambda = \lim\limits_{x = x_0} f(x)$

Et par suite :

$$[\lim_{x = x_0} f(x) = \lambda] \Leftrightarrow [(\forall W), W \in \mathcal{V}(\lambda), (\exists V), V \in \mathcal{V}(x_0) : f(V - \{x_0\}) \subset W]$$

2° Cette définition équivaut à :

On dit qu'un point λ de F est limite de f (x) lorsque x tend vers x_0, si quel que soit le voisinage W de λ, $\overset{-1}{f}(W)$ est un voisinage de x_0 (fig. 1040 *b*).

$$\lim_{x = x_0} f(x) = \lambda] \Leftrightarrow [(\forall W),\ W \in \mathcal{V}(\lambda),\ \overset{-1}{f}(W) \in \mathcal{V}(x_0)]$$

3° On suppose maintenant que E et F sont des espaces métriques euclidiens.

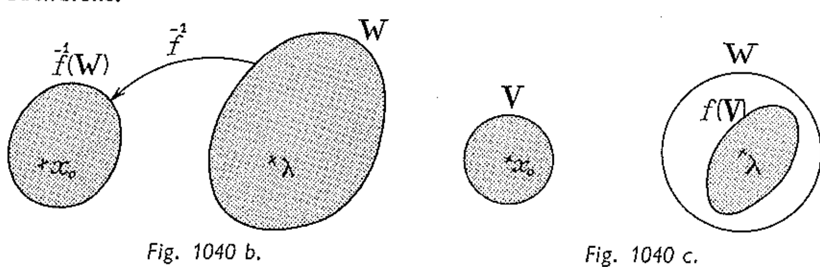


Fig. 1040 b. Fig. 1040 c.

Si on prend pour voisinages des boules W = B (λ; ε) et V = B (x_0; α) on peut donner la définition suivante :

On dit qu'un point λ de F est limite de f (x) lorsque x tend vers x_0, si quelle que soit la boule W = B (λ; ε), de centre λ et de rayon ε, il existe une boule V = B (x_0; α), de centre x_0 et de rayon a, telle que son image par f soit contenue dans la boule W (fig. 1040 *c*).

4° En remarquant que les boules sont déterminées par les rayons ε et α, la définition prend la forme suivante :

On dit qu'un point λ de F est limite de f (x) lorsque x tend vers x_0, si quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre

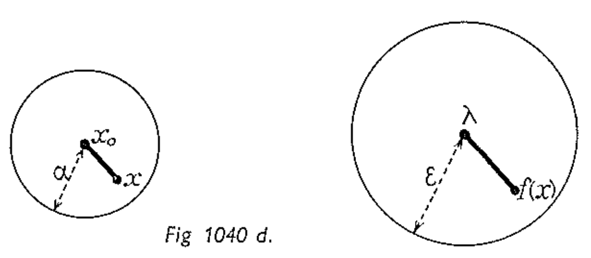


Fig 1040 d.

positif α, tel que, quel soit x, si d (x_0; x) $\leqslant \alpha$ alors d [λ; f (x)] $\leqslant \varepsilon$ (fig. 1040 *d*).

$$[\lim_{x = x_0} f(x) = \lambda] \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon)\ (\exists \alpha)\ (\forall x) : d(x_0;\, x) \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ d[\lambda;\, f(x)] \leqslant \varepsilon].$$

5° Dans le cas où $E = R$ et $F = R$, on a :

$$[\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda] \Leftrightarrow [(\forall \varepsilon)(\exists \alpha)(\forall x) : |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leqslant \varepsilon].$$

1041. La droite numérique achevée.

1° A la droite numérique R on ajoute deux points, appelés points de l'infini et notés $-\infty$ et $+\infty$.

Donc :

$$-\infty \notin R \quad \text{et} \quad +\infty \notin R$$

L'ensemble $R \cup \{-\infty ; +\infty\} = \overline{R}$ est appelé la droite numérique achevée.

2° L'ordre total de R doit être prolongé de R à $\overline{R}$.

Aussi :

— *si x et y appartiennent à R, l'ordre est celui de R;*
— $(\forall x) : x < +\infty$
— $(\forall x) : -\infty < x$.

L'ordre dans $\overline{R}$ reste donc total.

1042. Remarques.

La droite achevée n'est ni métrique euclidienne, ni projective.

On a :

$$a + (+\infty) = +\infty$$
$$a \cdot (+\infty) = (\textit{signe de } a) \cdot \infty.$$

Mais $\infty - \infty$ *n'a pas de sens.*

1043. Voisinages de l'infini.

On appelle voisinage de $x_0 = +\infty$, tout ensemble V défini par

$$V = \{x / x \geqslant M\}$$

On appelle voisinage de $x_0 = -\infty$, tout ensemble V défini par

$$V = \{x / x \leqslant M\}$$

1044. Théorèmes généraux.

On admet ici les résultats suivants :

1° Si les limites de $f(x)$ et $g(x)$ lorsque x tend vers x_0 sont :

$$\lim_{x=x_0} f(x) = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{x=x_0} g(x) = \mu$$

on a :

$$\lim_{x=x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x=x_0} f(x) + \lim_{x=x_0} g(x) = \lambda + \mu$$

et

$$\lim_{x=x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x=x_0} f(x) \cdot \lim_{x=x_0} g(x) = \lambda \mu$$

2° Si de plus $\mu \neq 0$, on a :

$$\lim_{x=x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x=x_0} f(x)}{\lim_{x=x_0} g(x)} = \frac{\lambda}{\mu}$$

3° Si λ est positif, on a :

$$\lim_{x=x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x=x_0} f(x)} = \sqrt[n]{\lambda}$$

1045. Limite et continuité.

La comparaison des définitions de la continuité et de la limite d'une fonction montre que la fonction f est continue en x_0, si elle est définie en x_0, et si $\lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ce théorème permet l'étude de la continuité de certaines fonctions. Ainsi :

Si les fonctions f et g sont continues en x_0, les fonctions $f + g$ et fg sont continues en x_0.

Si les fonctions f et g sont continues en x_0, et si $g(x_0)$ n'est pas nul, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Si la fonction f est continue en x_0, et si $f(x_0)$ est positif, la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue en x_0.

1046. Limite de x^n pour x infini ($n \in N$).

Soit la fonction f :

$$f: \qquad x \longrightarrow x^n \quad (n \in N)$$

On se donne un voisinage W de $\lambda = +\infty$:

$$W = [M; +\infty[\text{ avec } M > 0,$$

et on envisage le voisinage V de $x_0 = +\infty$:

$$V = [\sqrt[n]{M}; +\infty[.$$

Il est explicité par :

$$\sqrt[n]{M} \leqslant x.$$

L'image de V s'obtient en élevant à la puissance n; on obtient :

$$M \leqslant x^n$$

c'est-à-dire que

$$f(V) = W.$$

Et :

$$\lim_{x_0=+\infty} x^n = +\infty \qquad (1046; 1$$

On démontre de même :

$$\lim_{x_0=-\infty} x^n = (-1)^n \cdot \infty \qquad (1046; 2)$$

1047. Limite de $\frac{1}{x^n}$ pour x infini ($n \in N$).

Soit la fonction f :

$$f: \qquad x \longrightarrow \frac{1}{x}.$$

Elle est définie dans $R^* = R - \{0\}$.

On se donne un voisinage W à droite de 0 :

$$W =]0; \alpha] \text{ avec } \alpha > 0$$

et on envisage le voisinage V de $x_0 = +\infty$:

$$V = \left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right[.$$

Il est explicité par :

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant x.$$

En multipliant par $\frac{\alpha}{x}$, $\left(\frac{\alpha}{x} > 0\right)$ on a :

$$0 < \frac{1}{x} \leqslant \alpha$$

donc :

$$f(V) = W$$

et

$$\lim_{x_0=+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0^+ \qquad (1047 ; 1)$$

On démontre de même :

$$\lim_{x_0=-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0^- \qquad (1047 ; 2)$$

et aussi

$$\lim_{x_0=\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0. \qquad (1047 ; 3)$$

1048. Limite de $\frac{1}{x^n}$ pour $x = 0$ $(n \in N)$.

Soit la fonction f :

f : $$x \longrightarrow \frac{1}{x}$$

Elle est définie dans $R^* = R - \{0\}$.

On se donne un voisinage W de $\lambda = +\infty$;

$$W = [M ; +\infty[\quad \text{avec} \quad M > 0 ;$$

et on envisage le voisinage V à droite de $x_0 = 0$:

$$V = \left]0 ; \frac{1}{M}\right].$$

Il est explicité par :

$$0 < x \leqslant \frac{1}{M}.$$

En multipliant par $\frac{M}{x}$, $\left(\frac{M}{x} > 0\right)$, on obtient :

$$0 < M \leqslant \frac{1}{x}$$

c'est-à-dire que :

$$f(V) = W.$$

Et :

$$\lim_{x=0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \qquad (1048 ; 1)$$

On démontre de même :

$$\lim_{x=0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty \qquad (1048\,;\,2)$$

et aussi :

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^n}\right) = \infty. \qquad (1048\,;\,3)$$

1049. Limite d'une fonction polynomiale pour x infini.

Soit, par exemple,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On a :

$$f(x) = ax^3 \cdot \left[1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x} + \frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{d}{a}\cdot\frac{1}{x^3}\right]$$

et,

$$\lim_{x_0=\infty} [f(x)] = \lim_{x_0=\infty} (ax^3) \times \lim_{x_0=\infty} \left[1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x} + \frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{d}{a}\cdot\frac{1}{x^3}\right]$$
$$= \lim_{x_0=\infty} (ax^3)$$

car

$$\lim_{x_0=\infty} \left[1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x} + \frac{c}{a}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{d}{a}\cdot\frac{1}{x^3}\right] = 1.$$

Et :

La limite d'une fonction polynomiale pour $x_0 = \infty$ est égale à la limite du terme de plus grand degré.

1050. Limite d'une fonction rationnelle pour x infini.

Soit la fonction :

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_p x^p + \cdots + b_0} \in R$$

Si x *n'est pas nul*, on a :

$$f(x) = \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x_n}\right)}{b_p x^p \left(1 + \frac{b_{p-1}}{b_p}\cdot\frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_0}{b_p}\cdot\frac{1}{x_p}\right)}$$

Si n > p, on a :

$$f(x) = \frac{a_n}{b_p} \cdot x^{n-p} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_0}{b_p} \cdot \frac{1}{x^p}}$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{x=+\infty} \left(\frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{b}_p} \cdot \mathbf{x}^{n-p} \right)$$

$$\lim_{x=-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{x=-\infty} \left(\frac{a^n}{b^p} \mathbf{x}^{n-p} \right)$$

Si $n < p$, on a :

$$f(x) = \frac{a_n}{b_p} \cdot \frac{1}{x^{p-n}} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_0}{b_p} \cdot \frac{1}{x^p}}$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x=-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Si $n = p$, on a :

$$f(x) = \frac{a_n}{b_p} \cdot \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{p-1}}{b_p} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + \frac{b_0}{b_p} \cdot \frac{1}{x^p}}$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{a_n}{b_p}$$

$$\lim_{x=-\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{a_n}{b_p}.$$

CHAPITRE LXXIV

SUITES

1051. Suites dénombrables dans un groupe additif.

Soit un groupe additif G. On le suppose de plus commutatif.

1° Soient deux suites dénombrables d'éléments de G :

α : $$n \in N \longrightarrow \alpha(n) = a_n \in G$$

β : $$n \in N \longrightarrow \beta(n) = b_n \in G$$

On appelle somme de la suite $\alpha = \{a_n\}$ et de la suite $\beta = \{b_n\}$, la suite σ définie par :

σ : $$\mathbf{n} \in \boldsymbol{N} \longrightarrow \sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \in \boldsymbol{G}$$

On note :

$$\sigma = \alpha + \beta$$

ou

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

2° On démontre facilement que l'addition des suites de G est associative et commutative; que la suite e = {0} est neutre pour l'addition; que les suites $\{a_n\}$ et $\{-a_n\}$ sont opposées.

Par suite :

L'ensemble S des suites d'éléments du groupe G additif commutatif, muni d'une addition a une structure de groupe additif commutatif.

1052. Suites dénombrables dans un espace vectoriel.

Soit un espace vectoriel E sur le corps K.

1° E est un groupe additif commutatif; donc (cf. n° 1051).

L'ensemble des suites d'éléments de E, muni de l'addition, a une stucture de groupe commutatif.

Soit une suite d'éléments de E :

α : $$n \in N \longrightarrow \alpha(n) = a_n \in E.$$

On appelle produit de la suite $\alpha = \{a_n\}$ par le nombre λ de K, la suite π définie par :

π : $$n \in N \longrightarrow \pi(n) = \lambda \cdot a_n \in E.$$

On note :

$$\pi = \lambda \cdot \alpha$$

ou

$$\{\lambda \cdot a_n\} = \lambda \cdot \{a\}$$

On démontre facilement les propriétés suivantes :

[N'] $(\forall\alpha)$: $1 \cdot \alpha = \alpha$

[D'] $(\forall\lambda)(\forall\alpha)(\forall\beta)$: $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta$

[D''] $(\forall\lambda)(\forall\mu)(\forall\alpha)$: $(\lambda + \mu) \cdot \alpha = \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \alpha$

[A'] $(\forall\lambda)(\forall\mu)(\forall\alpha)$: $\lambda \cdot (\mu \cdot \alpha) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \alpha.$

Par suite :

L'ensemble S des suites d'éléments de l'espace vectoriel E, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel.

1053. Suites dénombrables dans un anneau.

Soit un anneau A. On le suppose, de plus, commutatif et unitaire.

1° A est un groupe additif commutatif; donc (cf. n° 1051) :

L'ensemble des suites d'éléments de A, muni de l'addition, a une structure de groupe commutatif.

2° Soient deux suites dénombrables d'éléments de A :

α : $$n \in N \longrightarrow \alpha(n) = a_n \in A$$

β : $$n \in N \longrightarrow \beta(n) = b_n \in A.$$

On appelle produit de la suite $\alpha = \{\mathbf{a}_n\}$ et de la suite $\beta = \{\mathbf{b}_n\}$ la suite p définie par :

p : $$\mathbf{n} \in N \longrightarrow \mathbf{p}(\mathbf{n}) = \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n \in A.$$

On note :

$$p = \alpha \cdot \beta$$

ou

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n b_n\}$$

On démontre facilement les propriétés suivantes :

A $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\forall\gamma)$: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$

C $(\forall\alpha)(\forall\beta)$: $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$

N $(\forall\alpha)(\exists\varepsilon)$: $\alpha\cdot\varepsilon = \varepsilon\cdot\alpha = \alpha$

avec $\varepsilon = \{1\}$

D $(\forall\alpha)(\forall\beta)(\forall\gamma)$: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$

Par suite :

L'ensemble S des suites d'éléments de l'anneau A commutatif unitaire, muni de l'addition et de la multiplication, est un anneau commutatif unitaire.

1054. Suites de nombres réels ou complexes.

On rencontre très souvent des suites de nombres réels ou complexes. Si les éléments appartiennent à une algèbre on peut envisager dans l'ensemble S de ces suites, une addition, une multiplication et une multiplication par un nombre.

L'ensemble S est alors une algèbre.

1055. Suites de points d'un espace métrique.

On peut envisager une suite dénombrable de points d'un espace métrique E, c'est-à-dire une application α de N dans E :

$$\alpha : \qquad n \in \mathrm{N} \longrightarrow \alpha(n) = a_n \in \mathrm{E}$$

Généralement $\mathrm{E} = \mathrm{R}$, R^2, R^3 ou C.

L'hypothèse E est un espace métrique est indispensable à l'étude des problèmes de convergence.

1056. Convergence d'une suite de points d'un espace métrique.

1° ***On dit que la suite $\{a_n\}$ converge vers le point a de E si quel que soit le voisinage W de a, il existe un nombre naturel m_0 tel que pour tout nombre n supérieur ou égal à m_0, le point a_n est dans le voisinage W de a.***

On note : $$\lim_{n=+\infty} \{a_n\} = a.$$

Et :

$$\left[\lim_{n=+\infty} \{a_n\} = a\right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}(\forall \mathrm{W}),\ \mathrm{W} \in \mathcal{V}(a)\ ; \\ (\exists m_0),\ m_0 \in \mathrm{N}\ ;\end{matrix}\ (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow a_n \in \mathrm{W}\right]$$

On dit aussi que a_n *tend vers* a *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

2° Généralement on choisit comme voisinage de a, la boule $\overline{B}(a;\varepsilon)$ et on a :

$$[\lim_{n=+\infty}\{a_n\} = a] \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)(\exists m_0):(\forall n)\, n \geqslant m_0) \Rightarrow a_n \in \overline{B}(a;\varepsilon)]$$

En remarquant que

$$a_n \in \overline{B}(a;\varepsilon) \Leftrightarrow d(a;a_n) \leqslant \varepsilon$$

on obtient :

$$[\lim_{n=+\infty}\{a_n\}]\, a = \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)(\exists m_0):(\forall n)\, n \geqslant m_0 \Rightarrow d(a;a_n) \leqslant \varepsilon]$$

3° Si l'espace E est la droite réelle R, on a :

$$[\lim_{n=+\infty}\{a\} = a\,] \Leftrightarrow [(\forall\varepsilon)(\exists m_0):(\forall n)\, n \geqslant m_0 \Rightarrow |a - a_n| \leqslant \varepsilon]$$

◇ *Exemple 1. — Montrer que la suite de nombres réels* $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ *converge vers* $a = 0$.

Quel que soit le nombre positif ε, on considère un nombre m_0 supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$; on a $m_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ et $\varepsilon < \frac{1}{m_0}$.

Alors :

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

Si n est supérieur ou égal à m_0, on a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m_0}$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

Donc :

$$(\forall\varepsilon)(\exists m_0):(\forall n)\, n \geqslant m_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\lim_{n=+\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0.$$

◇ *Exemple 2. — Montrer que la suite de nombres réels* $\{a_n\}$ *avec* $a_n = \frac{n}{n+1}$ *converge vers* $a = 1$.

On a :

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

Quel que soit le nombre positif ε, on considère un nombre m_0 tel que $\frac{1}{m_0+1} \leqslant \varepsilon$ ou $m_0 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$. En prenant $m_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, on a évidemment $m_0 + 1 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{1}{m_0+1} \leqslant \varepsilon$.

Si n est supérieur ou égal à m_0, on a $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{m_0+1} \leqslant \varepsilon$; donc :

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow |a_n - 1| \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que :

$$\lim_{n=+\infty} \left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = 1.$$

1057. Unicité de la limite d'une suite.

Si la suite $\{a_n\}$ avait deux limites différentes a et a' ($a \neq a'$), on pourrait trouver un voisinage W de a et un voisinage W′ de a' disjoints (fig. 1057,a).

$$(\forall W)\ (\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow a_n \in W$$

et puisque $\{a_n\}$ converge vers a' :

$$(\forall W')\ (\exists m'_0) : (\forall n)\ n \geqslant m'_0 \Rightarrow a_n \in W'$$

Soit $n_0 = \sup(m_0; m'_0)$, on a alors :

$$(\forall n)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow a_n \in W \text{ et } a_n \in W'$$

Ce résultat est contradictoire puisque $W \cap W' = \varnothing$. Donc $a' = a$; et :

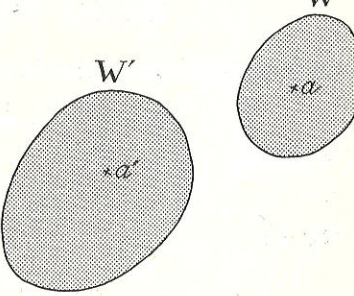


Fig. 1057 a.

La limite d'une suite de points d'un espace métrique est unique.

1058. Convergence d'une suite dans un espace vectoriel.

Soit un espace vectoriel E sur le corps R.

Dans ce cours E est R, R^2, R^3 ou C considéré comme un espace vectoriel de dimension 2 sur R.

On sait dans ces conditions qu'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le repère vectoriel du point M. On a alors :

$$d(P; Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

La suite de vecteurs $\{\overrightarrow{OA_n}\}$ converge vers le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$; si :

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow \|\overrightarrow{AA_n}\| \leqslant \varepsilon.$$

1059. Addition des suites convergentes dans un espace vectoriel.

On considère dans l'espace vectoriel E les deux suites $\{\overrightarrow{OA_n}\}$ et $\{\overrightarrow{OB_n}\}$ qui convergent respectivement vers $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Donc :

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow \|\overrightarrow{AA_n}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists m'_0) : (\forall n)\ n \geqslant m'_0 \Rightarrow \|\overrightarrow{BB_n}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n_0 = \sup(m_0 ; m'_0)$. Donc :

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists n_0) : \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow \|\overrightarrow{AA_n}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists n_0) : (\forall n)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \|\overrightarrow{BB_n}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On considère maintenant la somme des deux suites :

$$\{\overrightarrow{OS_n}\} = \{\overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_n}\}$$

et le vecteur :

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{SS_n} &= \overrightarrow{OS_n} - \overrightarrow{OS} \\
&= \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_n} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\
&= (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB_n} - \overrightarrow{OB}) \\
&= \overrightarrow{AA_n} + \overrightarrow{BB_n}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{SS_n}\| &\leqslant \|\overrightarrow{AA_n}\| + \|\overrightarrow{BB_n}\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Alors :

$$(\forall\varepsilon)\ (\exists n_0) : (\forall n)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \|\overrightarrow{SS_n}\| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que $\{\overrightarrow{OS_n}\}$ converge vers $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Et :

$$\lim_{n=+\infty} \{ \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OB_n} \} = \lim_{n=+\infty} \{ \overrightarrow{OA_n} \} + \lim_{n=+\infty} \{ \overrightarrow{OB_n} \}.$$

1060. Multiplication d'une suite convergence par un nombre dans un espace vectoriel.

Soit une suite $\{ \overrightarrow{OA_n} \}$ de vecteurs de E, et un nombre réel λ. On suppose que la suite $\{ \overrightarrow{OA_n} \}$ converge vers le vecteur $\overrightarrow{OA}$. Donc :

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow \| \overrightarrow{AA_n} \| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

On considère maintenant le produit $\lambda . \{ \overrightarrow{OA_n} \} = \{ \lambda \cdot \overrightarrow{OA_n} \} = \{ \overrightarrow{OP_n} \}$ et le vecteur $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_n} &= \overrightarrow{OP_n} - \overrightarrow{OP} \\ &= \lambda \cdot \overrightarrow{OA_n} - \lambda \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \lambda \cdot (\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \lambda \cdot \overrightarrow{AA_n} \end{aligned}$$

D'où :

$$\| \overrightarrow{PP_n} \| = |\lambda| \cdot \| \overrightarrow{AA_n} \|$$

et

$$\begin{aligned} \| \overrightarrow{PP_n} \| &\leqslant |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors :

$$(\forall \varepsilon)\ (\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow \| \overrightarrow{PP_n} \| \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve que $\{ \overrightarrow{OP_n} \}$ converge vers $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$.

Et :

$$\lim_{n=+\infty} \{ \lambda \cdot \overrightarrow{OP_n} \} = \lambda \cdot \lim_{n=+\infty} \{ \overrightarrow{OP_n} \}.$$

1061. Espace vectoriel des suites convergentes d'un espace vectoriel.

Des deux résultats précédents, on déduit :

L'ensemble des suites convergentes d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.

1062. Convergence des suites de nombres réels ou complexes.

Les résultats précédents (nos 1059 et 1060) sont valables pour les suites de nombres réels ou de nombres complexes, puisque R et C sont des espaces vectoriels sur R.

Donc :

$$\lim_{n=+\infty} \{ a_n + b_n \} = \lim_{d=+\infty} \{ a_n \} + \lim_{n=+\infty} \{ b_n \}$$

et

$$\lim_{n=+\infty} \{ \lambda \cdot a_n \} = \lambda \cdot \lim_{n=+\infty} \{ a_n \}.$$

1063. Multiplication des suites convergentes de nombres réels ou complexes.

On considère deux suites de nombres $\{ a_n \}$ et $\{ b_n \}$ qui convergent respectivement vers a et b.

Donc :

$$(\forall \alpha)\,(\exists m_0) : (\forall n)\ n \geqslant m_0 \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \alpha$$

et

$$(\forall \alpha)\,(\exists m_0') : (\forall n)\ n \geqslant m_0' \Rightarrow |b_n - b| \leqslant \alpha$$

Soit $n_0 = \sup (m_0 ; m_0')$. Donc :

$$(\forall \alpha)\,(\exists n_0) : (\forall n)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \alpha$$

et

$$(\forall \alpha)\,(\exists n_0) : (\forall n)\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |b_n - b| \leqslant \alpha.$$

On considère maintenant le produit des deux suites $\{ p_n \} = \{ a_n \cdot b_n \}$ et le nombre $p = ab$.

On a :

$$|p_n - p| = |a_n b_n - ab|$$
$$= |(a_n - a)(b_n - b) + a(b_n - b) + b(a_n - a)|$$

et

$$|p_n - p| \leqslant |a_n - a| \cdot |b_n - b| + |a| \cdot |b_n - b| + b| \cdot |a_n - a|$$

ou

$$|p_n - p| \leqslant \alpha^2 + \alpha \cdot (|a| + |b|).$$

Pour rendre $| p_n - p |$ inférieur à un nombre positif ε quelconque, il suffit de choisir α pour que

$$\alpha^2 + \alpha\,(|a| + |b|) \leqslant \varepsilon$$

ou

$$\alpha^2 + \alpha\,(|a| + |b|) - \varepsilon \leqslant 0.$$

Comme α est positif, on a facilement :

$$0 < \alpha \leqslant \frac{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + 4\varepsilon} - (|a| + |b|)}{2}$$

Par suite, quel que soit α, en prenant $\alpha = \dfrac{\sqrt{(|a| + |b|)^2 + 4\varepsilon} - (|a| + |b|)}{2}$

pour tout n supérieur ou égal à n_0, on a $| p_n - p | \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que la suite $\{p_n\}$ converge vers p.

Et :

$$\lim_{n=+\infty} \{ a_n b_n \} = \lim_{n=+\infty} \{ a_n \} \times \lim_{n=+\infty} \{ b_n \}$$

1064. Algèbre des suites convergentes de nombres réels ou complexes.

Des résultats précédents on déduit :

L'ensemble des suites convergentes de nombres réels ou de nombres complexes est une algèbre.

Par suite :

Si la suite $\{ a_n \}$ converge vers a, la suite $\{ f(a_n) \}$, où f est une fonction polynomiale, converge vers f (a).

1065. Suites de nombres complexes.

Soit la suite $\{z_n\}$ de nombres complexes avec $z_n = a_n + i \cdot b_n$.

D'après ce qui précède, on a :

$$\lim_{n=+\infty} \{ z_n \} = \lim_{n=+\infty} \{ a_n \} + i \cdot \lim_{n=+\infty} \{ b_n \}$$

Si $\{ a_n \}$ et $\{ b_n \}$ convergent respectivement vers a et b, alors la suite $\{ z_n \}$ converge vers $z = a + ib$.

1066. Suites monotones de nombres réels.

1° *Une suite* $\{ a_n \}$ *de nombres réels est monotone croissante si quel que soit* n, *on a* $a_{n+1} > a_n$.
Une suite $\{ a_n \}$ *de nombres réels est monotone décroissante si quel que soit* n, *on a* $a_{n+1} < a_n$.

2° *Une suite* $\{ a_n \}$ *de nombres réels est dite majorée si l'ensemble des éléments de cette suite admet un majorant.*

Donc :

$$[\{ a_n \} \text{ est majorée}] \Leftrightarrow [(\exists M) : (\forall n) \quad a_n \leqslant M]$$

On définit de même une suite minorée :

$$[\{ a_n \} \text{ est minorée}] \Leftrightarrow [(\exists m) : (\forall n) \quad m \leqslant a_n]$$

3° ***Toute suite croissante de nombres réels majorée est convergente.***

En effet, soit la suite croissante $\{ a_n \}$. On considère la borne supérieure L des éléments de la suite :

$$(\forall \varepsilon)\,(\exists m_0)\,(\forall n) \quad n \geqslant m_0 \Rightarrow a_n \in [L - \varepsilon ; L]$$
$$\Rightarrow a_n \geqslant a_{m_0}$$

Donc la suite converge vers L.

4° De même :

Toute suite décroissante de nombres réels minorée est convergente.

Elle converge vers la borne inférieure des éléments de cette suite.

1067. Étude de la suite $\left\{ \dfrac{1}{a_n} \right\}$.

Soit une suite $\{a_n\}$ de nombres réels ou complexes non nuls. Si cette suite converge vers a, on a :

$$(\forall \alpha)\,(\exists m_0) : (\forall n) \quad n \geqslant m_0 \Rightarrow |a_n - a| \leqslant \alpha$$

De $|a_n - a| \leqslant \alpha$, on déduit :

$$|a_n| \geqslant |a| - \alpha$$

D'où :

$$\frac{|a - a_n|}{|a| \cdot |a_n|} \leqslant \frac{\alpha}{|a| \cdot (|a| - \alpha)}$$

On considère maintenant la suite $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ des inverses; on a :

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a - a_n|}{|a| \cdot |a_n|}$$

Pour rendre $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right|$ inférieur à un nombre ε positif quelconque, il suffit de choisir α pour que

$$\frac{\alpha}{|a| \cdot (|a| - \alpha)} \leqslant \varepsilon$$

Or de

$$\frac{\alpha}{|a| \cdot (|a| - \alpha)} = \varepsilon$$

on déduit

$$\alpha = \frac{\varepsilon \cdot |a|^2}{1 + \varepsilon \cdot |a|}$$

Par suite, quel que soit ε, en prenant $\alpha = \frac{\varepsilon \cdot |a|^2}{1 + \varepsilon . |a|}$ pour tout n supérieur ou égal à m_0, on a $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| \leqslant \varepsilon$; ce qui prouve que la suite $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ converge vers $\frac{1}{a}$.

Et :

$$\lim_{n=+\infty} \left\{\frac{1}{a_n}\right\} = \frac{1}{\lim\limits_{n=+\infty} \{a_n\}}$$

1068. Étude de la suite $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

Soient deux suites de nombres réels ou complexes $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ qui convergent respectivement vers a et b, les nombres b_n n'étant pas nuls.

On a :

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \times \frac{1}{b_n}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\lim_{n=+\infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} &= \lim_{n=+\infty} \{a_n\} \cdot \lim_{n=+\infty} \left\{\frac{1}{b_n}\right\} \\ &= a \times \frac{1}{b} \\ &= \frac{a}{b}.\end{aligned}$$

Et :

$$\lim_{n=+\infty} \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \frac{\lim_{n=+\infty} \{a_n\}}{\lim_{n=+\infty} \{b_n\}}$$

1069. Remarque.

Si f et g sont deux fonctions polynomiales et si une suite de nombres $\{a_n\}$ converge vers a, avec $g(a) \neq 0$, alors la suite $\left\{\frac{f(a_n)}{g(a_n)}\right\}$ converge vers $\frac{f(a)}{g(a)}$.

1070. Étude de la suite $\{\sqrt[p]{a_n}\}$.

Soient une suite $\{a_n\}$ de nombres positifs qui converge vers a ($a \geqslant 0$). Dans ces conditions :

$$\lim_{n=+\infty} \{\sqrt{a_n}\} = \sqrt{a}$$

et

$$\lim_{n=\infty} \{\sqrt[p]{a_n}\} = \sqrt[p]{a}.$$

1071. Suites récurrentes.

On peut définir une suite $\{a_n\}$ en donnant son premier élément a_1 et une relation entre deux éléments consécutifs :

$$a_n = f(a_{n-1})$$

La suite ainsi définie est une *suite récurrente*.

CHAPITRE LXXV

COURBES ET CONTINUITÉ

1072. Courbes planes paramétrées continues.

1° Dans le plan R^2, on considère une courbe paramétrée C (cf. n° 730) :

$$C = \{(x; y) / x = f(t); y = g(t); t \in [a; b]\}$$

On suppose de plus que les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a; b]$. Dans ces conditions on dit que *la courbe C est une courbe paramétrée continue.*

2° La fonction φ :

$$\varphi : \quad t \in [a; b] \longrightarrow \varphi(t) = M(x; y) \in R^2$$

est dite *continue sur* [a; b].

◇ *Exemple.* — Soit la courbe C ayant pour équations paramétriques (cf. ex. 1, n° 730) :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 - t \end{cases}$$

C est une courbe continue, car les fonctions $f(t) = t + 1$ et $g(t) = 1 - t$ sont continues.

1073. Courbes planes définies par une équation explicite.

On considère la courbe plane C définie par l'équation explicite $y = f(x)$, dans laquelle la fonction f est continue sur $[a; b]$ (cf. n° 732).

La courbe C est alors une courbe continue.

C'est un cas particulier du cas précédent : $x = t$ et $y = f(t)$.

1074. Points doubles.

On dit qu'un point M de C est un point double, s'il correspond à deux valeurs distinctes du paramètre t, c'est-à-dire si

$$f(t_1) = f(t_2)$$

et

$$g(t_1) = g(t_2)$$

avec $t_1 \neq t_2$.

Dans ce cas, la fonction φ (cf. nº 730) :

$$\varphi : \quad t \in [a\,;b] \longrightarrow \varphi(t) = (x\,;y) \in R^2$$

n'est pas injective, car $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = (x; y)$.

1075. Arcs simples.

Lorsque la fonction φ est une bijection continue, l'arc AB image de l'intervalle [a ; b] est appelé un arc simple.

Il y a souvent intérêt à décomposer une courbe C en un ensemble d'arcs simples.

Un arc simple AB est orienté de A vers B; si $t_1 < t_2$ le point $M_1(t_1)$ est avant le point $M_2(t_2)$ (fig. 1075; a).

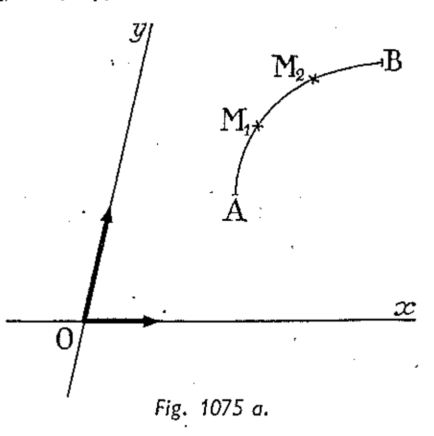


Fig. 1075 a.

1076. Courbe et continuité.

Soit C la courbe représentative de la fonction continue $y = f(x)$ (fig. 1076 a), f étant continue on a $y_0 = f(x_0)$.

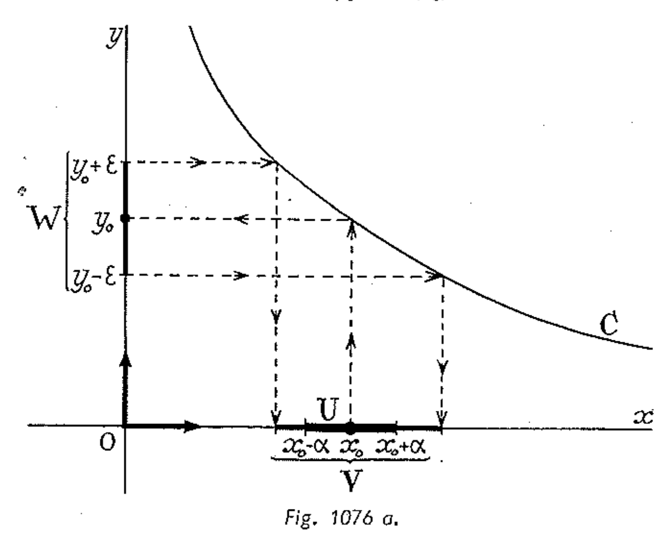


Fig. 1076 a.

On peut alors facilement interpréter graphiquement la définition de la continuité donnée au nº 1021.

Étant donné un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$, on peut trouver $\overset{-1}{f}(W) = V$ qui est un voisinage de x_0.

On peut évidemment prendre pour voisinage W un voisinage centré en y_0 :

$$\begin{aligned} W &= [y_0 - \varepsilon ; y_0 + \varepsilon] \\ &= \{ y \,/\, |y - y_0| \leqslant \varepsilon \} \end{aligned}$$

et choisir dans $\overset{-1}{f}(W) = V$ un voisinage U centré en x_0 :

$$\begin{aligned} V &= [x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha] \\ &= \{ x / |x - x_0| \leqslant \alpha \}. \end{aligned}$$

EXERCICES SUR LE LIVRE VII

Limites.

Calculer les limites suivante :

1523.	$\lim\limits_{x_0=0} (2x - 1)$	$\lim\limits_{x_0=1} \dfrac{2x-1}{x+2}$	$\lim\limits_{x_0=1} (2x^2 - x + 1)$.
1524.	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (2x + 1)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (x - 1)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (-x + 3)$.
1525.	$\lim\limits_{y_0=-\infty} (-1 - 3x)$	$\lim\limits_{x_0=\infty} (4x - 3)$	$\lim\limits_{x_0=\infty} (1 - 5x)$.
1526.	$\lim\limits_{x_0=+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x_0=+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}\right)$	$\lim\limits_{x_0=+\infty} \left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
1527.	$\lim\limits_{x=-\infty} \left(\dfrac{2}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} \left(\dfrac{4}{x^5}\right)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}\right)$.
1528.	$\lim\limits_{x_0=-\infty} \left(\dfrac{4}{x}\right)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} \left(\dfrac{-3}{x^4}\right)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} \left(-\dfrac{2}{x}\right)$.
1529.	$\lim\limits_{x_0=0+} \left(\dfrac{2}{x}\right)$	$\lim\limits_{x_0=0+} \left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x_0=0+} \left(-\dfrac{1}{x^3}\right)$.
1530.	$\lim\limits_{x_0=0-} \left(\dfrac{-5}{x}\right)$	$\lim\limits_{x_0=0-} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x_0=0-} \left(\dfrac{k}{x}\right)$,
1531.	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (2x^2 - 3x + 1)$	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (-x^2 + 3x)$	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (x^3 - 5x)$.
1532.	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (x^5 - 7x^3 + 8)$	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (x^4 - 3x^2 + 4)$	$\lim\limits_{x_0=+\infty} (x^6 - 5x^3 + 1)$.
1533.	$\lim\limits_{y_0=-\infty} (x^2 - 4x + 1)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (-x^2 - x + 1)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (x^3 - 3x + 4)$.
1534.	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (x^6 - 4x + 1)$	$\lim\limits_{x_0=-\infty} (2x^5 + 4x^3 - 7)$.

1535. $\lim_{x_0=+\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ $\lim_{x_0=-\infty}\frac{x-1}{1+3x}$ $\lim_{x_0=\pm\infty}\frac{2x-1}{3x+4}$.

1536. $\lim_{x_0=\pm\infty}\left(\frac{4x-1}{3-x}\right)$ $\lim_{x_0=\pm\infty}\frac{1-3x}{2-3x}$ $\lim_{x_0=\pm 8}\frac{12-3x\sqrt{2}}{4+\frac{\sqrt{2}}{x}}$.

1537. $\lim_{x_0=1}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\lim_{x_0=2}\frac{1-4x}{x-2}$ $\lim_{x_0=3}\frac{4+7x}{3-x}$.

1538. $\lim_{x_0=2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}$. Remarque.

1539. $\lim_{x_0=1}\frac{(x+3)(x-1)}{x^2-3x+2}$.

Continuité et limites.

1540. Calculer x pour que $|x-3| < 4$.

1541. Calculer x pour que $|2x-5| < 3$.

1542. Calculer x pour que $|3-2x| \leqslant 1$.

1543. Calculer x pour que $|x^2-1x+3| < 1$.

1544. Calculer x pour que $|x^2-5x+3| < 1$.

Déterminer x, dans chacun des cas suivants:

1545. $|x-3| \geqslant 5$.

1546. $|2x-7| \geqslant 3$.

1547. $|2x-5| \geqslant A$.

1548. $|x^2-2x| \geqslant A$.

1549. $|2x^2-3x+1| \geqslant A$.

1550. $|4-x^2+3x-2| \geqslant A$.

1551. $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \geqslant A$.

1552. $\left|\frac{x-2}{2x-3}\right| \geqslant A$.

1553. $\left|\frac{x}{x^2-x}\right| \geqslant A$.

Déterminer α, dans chacun des cas suivants, de telle façon que la première inégalité implique la seconde inégalité.

1554. $|x-3| \leqslant \frac{1}{10} \Rightarrow |x^2-9| \leqslant \alpha$.

1555. $\left|\frac{2x-1}{x+2}-\frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{100} \Rightarrow |x-1| \leqslant \alpha$.

1556. $|2x^2 - x| < \frac{1}{100} \Rightarrow |x - 1| \leqslant \alpha.$

1557. $x - 1 \leqslant -1000 \Rightarrow x \geqslant \alpha.$

1558. $-x + 3 > 10^6 \Rightarrow x \leqslant \theta.$

1559. $\left|\frac{x-1}{1+3x} - \frac{1}{3}\right| \leqslant \frac{1}{100} \Rightarrow x \leqslant \alpha.$

Étant donné le nombre ε positif, déterminer le nombre $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ tel que pour la fonction $y = f(x)$ donnée on ait l'implication $|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.

1560. $y = x^2 - x + 3$ $x_0 = 1$ $f(x_0) = 3.$

1561. $y = x - 3$ $x_0 = 4.$

1562. $y = 2x - 1$ $x_0 = 1.$

1563. $y = \frac{2x-1}{3x+4}$ $x_0 = 2.$

1564. $y = \frac{4+7x}{3-x}$ $x_0 = 1.$

1565. $y = -x^2 + 3x$ $x_0 = 0.$

1566. $y = 2x^2 - 3x + 1$ $x_0 = 1.$

1567. $y = 4x^2 - 3x + 1$ $x_0 = 1.$

1568. $y = -x^2 + 3$ $x_0 = -1$

Montrer la continuité des fonctions suivantes pour x_0.

1569. $y = x^2 - 1$ $x_0 = 2.$

1570. $y = x - 1$ $x_0 = 1.$

1571. $y = x^2 - 5x + 4$ $x_0 = 4.$

1572. $y = \frac{x+2}{x-1}$ $x_0 = 2.$

1573. $y = \frac{4x-1}{3-x}$ $x_0 = 0.$

LIVRE VIII

ANALYSE

CHAPITRE LXXVI

FONCTIONS RÉELLES DÉRIVABLES

1077. Nombre dérivé.

Soit la fonction f définie et continue dans l'intervalle $D = (\alpha; \beta)$:

$$f: \qquad x \in D \longrightarrow y = f(x) \in R.$$

Si x_0 et $x_1 = x_0 + \Delta x$ appartiennent à D, on a :

$$f: \qquad x_0 \longrightarrow y_0 = f(x_0)$$
$$x_1 \longrightarrow y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x).$$

A l'accroissement $\Delta x = h = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = k = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ de l'image $f(x) = y$.

Le taux d'accroissement T entre les valeurs x_0 et x_1 est

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Lorsque x tend vers x_0, c'est-à-dire lorsque Δx tend vers 0, puisque f est continue, Δy tend aussi vers 0. Δy se met alors sous la forme :

$$\Delta y = \varphi(x_0; x_1) \cdot \Delta x.$$

Le taux d'accroissement est alors :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(x_0; x_1).$$

La limite de T, si elle existe, lorsque Δx tend vers 0 est appelée le nombre dérivé de la fonction $x \rightarrow f(x)$ pour $x = x_0$.

On note ce nombre y'_0 ou $f'(x_0)$.

Donc :

$$\mathbf{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \qquad (1077; 1)$$

ou $$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} [\varphi(x_0 ; x_1)] \qquad (1077;\ 2)$$

Lorsque la limite $f'(x_0)$ existe on dit que la fonction f est dérivable pour x_0.

Le nombre dérivée appartient à $\overline{R}$.

1078. Nombre dérivé à droite. Nombre dérivé à gauche.

Si x_1 tend vers x_0, par valeurs supérieures à x_0, on définit un nombre dérivé à droite.

Si x_1 tend vers x_0, par valeurs inférieures à x_0, on définit un nombre dérivé à gauche.

Si la fonction f est dérivable pour x_0, le nombre dérivé à droite et le nombre dérivé à gauche sont égaux.

On note la dérivée à droite $f'(x_0 + 0)$ et la dérivée à gauche $f'(x_0 - 0)$.

1079. Fonction dérivée.

Étant donné la fonction $x \longrightarrow f(x)$, au nombre $x_0 \in D$ on fait correspondre son nombre dérivé.

Si la fonction f est dérivable pour toutes les valeurs de $D' \subset D$, à partir de f on définit une nouvelle fonction, notée f' :

f' : $$x \in D' \rightarrow f'(x) \in R.$$

C'est la *fonction dérivée de la fonction* f. Par abréviation on dit souvent : « *dérivée de la fonction* f ».

On note souvent :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

ou

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Remarque. — Le nombre dérivée $f'(x_0)$ est donc la valeur de la dérivée pour x_0.

1080. Dérivée de la fonction constante.

Soit la fonction constante f :

f : $$x \in R \longrightarrow f(x) = a.$$

Elle est définie dans R et :

$$x_0 \in R \longrightarrow y_0 = f(x_0) = a$$
$$x_1 \in R \longrightarrow y_1 = f(x_1) = a.$$

A l'accroissement $\Delta x = h = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = k = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ de l'image $f(x)$, et

$$\Delta y = k = 0.$$

Le taux d'accroissement est donc nul; T = 0, et par suite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x = 0} T = 0.$$

La fonction dérivée est donc :

f'. $$x \in R \longrightarrow f'(x) = 0.$$

Autrement dit :

Une fonction constante est dérivable dans R, et sa fonction dérivée est la fonction nulle.

Par abus de langage, on dit souvent :

La dérivée de la fonction $y = a$ est $y' = 0$.

1081. Dérivée de la fonction identique.

Soit la fonction identique f :

f : $$x \in R \longrightarrow f(x) = x \in R.$$

Elle est définie dans R et :

$$x_0 \in R \longrightarrow y_0 = f(x_0) = x_0$$
$$x_1 \in R \longrightarrow y_1 = f(x_1) = x_1.$$

A l'accroissement $\Delta x = h = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = k = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ de l'image $f(x)$ et :

$$\Delta y = \Delta x.$$

Le taux d'accroissement est donc T = 1; et par suite :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x = 0} T = 1.$$

La fonction dérivée est donc :

f' : $$x \in R \longrightarrow f'(x) = 1.$$

Autrement dit :

La fonction identique est dérivable dans R, et sa fonction dérivée est la fonction constante unité $[\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}]$.

Par abus de langage, on dit souvent :

La dérivée de la fonction $y = x$ *est* $y' = 1$.

1082. Dérivée d'une somme de deux fonctions.

Soient les deux fonctions u et v dérivables dans $D \subset R$:

$$u : x \in D \longrightarrow u(x) \in R$$

et

$$v : x \in D \longrightarrow v(x) \in R.$$

On considère la fonction $f = u + v$ définie par

$$f = u + v : \qquad x \in D \longrightarrow f(x) = u(x) + v(x) \in R$$

On a :

$$f : \qquad \begin{array}{l} x_0 \in D \longrightarrow f(x_0) = u(x_0) + v(x_0) \\ x_1 \in D \longrightarrow f(x_1) = u(x_1) + v(x_1). \end{array}$$

A l'accroissement $\Delta x = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ de l'image; et :

$$\Delta y = [u(x_1) - u(x_0)] + [v(x_1) - v(x_0)].$$

Le taux d'accroissement est :

$$\begin{aligned} T = \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{u(x_1) - u(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Par suite :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x = 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

ou

$$f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x).$$

La fonction dérivée est donc :

$$f' : \qquad x \in D \longrightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Autrement dit :

La somme de deux fonctions dérivables dans D ⊂ R est dérivable dans D; et la fonction dérivée est la somme des fonctions dérivées des fonctions données.

On écrit :

$$\mathbf{f'(x) = u'(x) + v'(x)} \qquad (1082;\ 1)$$

ou

$$\mathbf{(u + v)' = u' + v'} \qquad (1082;\ 2)$$

Évidemment le raisonnement précédent est valable pour une somme finie quelconque de fonctions dérivables dans D; et

$$(u + v + w)' = u' + v' + w'$$

et

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$$

1083. Dérivée du produit de deux fonctions.

Soient les deux fonctions u et v dérivables dans D R :

$$u : x \in D \longrightarrow u(x) \in R$$

et

$$v : x \in D \longrightarrow v(x) \in R$$

On considère la fonction $f = uv$ définie par

$$f = uv : \qquad x \in D \longrightarrow f(x) = u(x) \cdot v(x).$$

On a :

$$f : \qquad \begin{aligned} x_0 \in D &\longrightarrow f(x_0) = u(x_0) \cdot v(x_0) \\ x_1 \in D &\longrightarrow f(x_1) = u(x_1) \cdot v(x_1). \end{aligned}$$

A l'accroissement $\Delta x = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ de l'image $f(x)$; et :

$$\begin{aligned} \Delta y &= u(x_1) \,.\, v(x_1) - u(x_0) \,.\, v(x_0) \\ &= [u(x_0) + \Delta u] \,.\, [v(x_0) + \Delta v] - u(x_0) \,.\, v(x_0) \\ &= u(x_0) \,.\, \Delta v + v(x_0) \,.\, \Delta u + \Delta u \,.\, \Delta v. \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement est :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x_0) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tend vers $v'(x_0)$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ tend vers $u'(x_0)$ et $\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$ tend vers 0 car Δv tend vers 0 ; d'où :

$$f'(x_0) = u(x_0) \,.\, v'(x_0) + v(x_0) \,.\, u'(x_0)$$

La fonction dérivée est :

$$f' : \quad x \in D \longrightarrow f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x).$$

Autrement dit :

Le produit de deux fonctions dérivables dans D ⊂ R est dérivable dans D ; et la fonction dérivée est f′ (x) = u (x).v′ (x) + v (x). u′(x).

On écrit :

$$\mathbf{(uv)' = uv' + vu'} \qquad (1083;\ 1)$$

Remarque 1. Du résultat précédent, on peut déduire l'expression de la dérivée d'un produit de trois fonctions.

Soit :

$$f = uvw$$
$$= u \cdot (vw).$$

En appliquant la formule (282; 1) on a :

$$f' = u'(vw) + u(vw)'$$
$$= u'vw + u(v'w + vw')$$

d'où finalement :

$$\boldsymbol{(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'} \qquad (1083;\ 2)$$

Remarque 2. Si $w = v = u$ les formules (1083; 1) et (1083; 2) deviennent:

$$\boldsymbol{(u^2)' = 2\,uu'} \qquad (1083;\ 3)$$

et

$$\boldsymbol{(u^3)' = 3\,u^2u'} \qquad (1083;\ 4)$$

Par suite :

$$(x^2)' = 2\,x$$
$$(x^3)' = 3\,x^2.$$

1084. Dérivée du produit d'une fonction par un nombre réel.

En appliquant la formule (1083; 1) et en remarquant que la dérivée de la constante A est nulle, on voit que

$$\boldsymbol{(Au)' = A \cdot u'} \qquad (1084;\ 1)$$

◇ *Exemples.* — *Calculer les dérivées des fonctions :*

$$f(x) = 4x^3;\ f(x) = -5x^2;\ f(x) = -3x.$$

Il suffit d'appliquer la formule précédente :

1° $y = 4x^3$ a pour dérivée $y' = 4 \cdot (x^3)' = 4 \times 3x^2 = 12x^2$;
2° $y = -5x^2$ a pour dérivée $y' = -5 \cdot (x^2)' = -5\ (2x) = -10x$;
3° $y = -3x$ a pour dérivée $y' = -3 \cdot (x)' = -3 \times 1 = -3$.

1085. Dérivée de l'inverse d'une fonction.

Soit la fonction v dérivable dans $D \subset R$:

$$v: \quad x \in D \longrightarrow v(x) \in R.$$

En supposant que $v(x)$ ne s'annule pas dans D, on peut envisager la fonction f :

$$f: \quad x \in D \longrightarrow f(x) = \frac{1}{v(x)} \in R.$$

C'est la fonction inverse de la fonction v; elle est continue dans D.

On a :

$$f = \frac{1}{v}: \quad x_0 \in D \longrightarrow y_0 = \frac{1}{v(x_0)}$$

$$x_1 \in D \longrightarrow y_1 = \frac{1}{v(x_1)}.$$

A l'accroissement $\Delta x = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ de l'image $f(x)$; et :

$$\Delta y = \frac{1}{v(x_1)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_1)}{v(x_0) \cdot v(x_1)} = -\frac{\Delta v}{v(x_0) \cdot v(x_1)}.$$

Le taux d'accroissement est :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{v(x_0) \cdot v(x_1)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tend vers $v'(x_0)$; d'où :

$$f'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{[v(x_0)]^2}$$

La fonction dérivée est donc :

$$f' : \qquad x \in D \longrightarrow f'(x) = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Autrement dit :

L'inverse d'une fonction v (x) dérivable dans D ⊂ R et ne s'annulant pas dans D est dérivable, et la fonction dérivée est

$$\mathbf{f'(x) = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}}.$$

On écrit :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad (1085\,;\,1)$$

◇ *Exemples. — Calculer les dérivées des fonctions :*

$$y = \frac{1}{x};\ y = \frac{1}{x-2};\ y = \frac{1}{x^2-3x+4} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{(x-2)(x-1)}.$$

1° *Dérivée de* $y = \dfrac{1}{x}$.

On pose :

$$v(x) = x; \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 1.$$

La formule (1085; 1) donne :

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Ce résultat est valable pour $D = R - \{0\}$.

2° *Dérivée de* $y = \dfrac{1}{x-2}$.

On pose :

$$v(x) = x - 2; \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 1.$$

La formule (1085; 1) donne :

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2}.$$

Évidemment le résultat précédent est valable pour $D = R - \{2\}$.

3° *Dérivée de* $y = \dfrac{1}{4 - 3x + x^2}$.

On pose $v(x) = x^2 - 3x + 4$. Cette fonction n'a pas de racine dans R.

On a :

$$v'(x) = 2x - 3.$$

D'où :

$$y' = \frac{3 - 2x}{(x^2 - 3x + 4)^2}.$$

Ce résultat est valable pour D = R.

4° *Dérivée de* $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-1)}$.

On pose : $v(x) = (x-2)(x-1) = x^2 - 3x + 2.$

D'où : $v'(x) = 2x - 3$

et :

$$y' = \frac{3 - 2x}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{3 - 2x}{(x-2)^2 (x-1)^2}.$$

Ce résultat est valable pour $D = R - \{1; 2\}$.

1086. Dérivée du quotient de deux fonctions.

Soient les deux fonctions u et v dérivables dans $D \subset R$:

u : $x \in D \longrightarrow u(x) \in R$

v : $x \in D \longrightarrow v(x) \in R.$

En supposant que $v(x)$ ne s'annule pas dans D, on peut envisager la fonction f :

f: $x \in D \longrightarrow f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \in R.$

Or on a :

$$f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}.$$

D'où (cf. formule (1083 ; 1)) :

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left[\frac{1}{v(x)}\right]'$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{v(x)} - u(x) \cdot \frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$$

et

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}. \qquad (1086 ; 1)$$

Ou plus brièvement :

$$\left(\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{v}}\right)' = \frac{\mathbf{vu}' - \mathbf{uv}'}{\mathbf{v}^2}. \qquad (1086\,;\,2)$$

◇ *Exemple 1. — Calculer les dérivées des fonctions homographiques suivantes :*

$$y = \frac{x-1}{x-2} \qquad y = \frac{x+2}{2x+3} \qquad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$$

1° *Dérivée de* $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

On pose :

$$u\,(x) = x - 1 \quad \text{et} \quad v\,(x) = x - 2$$

d'où :

$$u'\,(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'\,(x) = 1.$$

La formule (1086; 2) donne :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2} \\ &= -\frac{1}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Ce résultat est valable dans $D = R - \{2\}$.

2° *Dérivée de* $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$.

On pose :

$$u\,(x) = 2x + 3 \quad \text{et} \quad v\,(x) = x + 2.$$

D'où :

$$u'\,(x) = 2 \quad \text{et} \quad v'\,(x) = 1.$$

La formule (1086; 2) donne :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(x+2)-(2x+3)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Ce résultat est valable dans $D = R - \{-2\}$.

3° *Dérivée de* $y = \dfrac{ax+b}{a'x+b'}$ avec $ab' - ba' \neq 0$.

On pose :

$$u(x) = ax + b \quad \text{et} \quad v(x) = a'x + b'$$

D'où :

$$u'(x) = a \qquad \text{et} \quad v'(x) = a'.$$

Et :

$$y' = \frac{a(a'x + b') - a'(ax + b)}{(a'x + b')^2}$$

$$= \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}.$$

Ce résultat est valable dans $D = R - \left\{-\frac{b'}{a'}\right\}$.

◇ *Exemple 2. — Calculer la dérivée de la fonction* $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$.

On pose :

$$u(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + x + 1.$$

D'où :

$$u'(x) = 4x - 3 \qquad \text{et} \quad v'(x) = 2x + 1.$$

Et :

$$y' = \frac{(4x - 3)(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(2x^2 - 3x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{5x^2 + 2x - 4}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Ce résultat est valable dans $D = R$, car $x^2 + x + 1$ n'a pas de racine.

1087. Dérivée logarithmique.

Soit la fonction dérivable $y = f(x)$.

On appelle dérivée logarithmique le rapport de la dérivée à la fonction.

La dérivée logarithmique de y est donc $\frac{y'}{y}$.

1088. Dérivées logarithmiques des produits et quotients de fonctions.

1° ***La dérivée logarithmique d'une fonction constante est nulle.***

2° Soit la fonction $y = \mathrm{A}u$. On a $y' = \mathrm{A} \cdot u'$. D'où :

$$\frac{y'}{y} = \frac{\mathrm{A}u'}{\mathrm{A}u} = \frac{u'}{u}$$

La dérivée logarithmique de la fonction $y = \mathrm{A} \cdot u$ est $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u}$.

3° Soit la fonction $y = uvw$. On a $y' = u'vw + uv'w + uvw'$. D'où :

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$$

La dérivée logarithmique de la fonction $y = uvw$ est

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}.$$

4° Soit la fonction $y = \frac{u}{v}$. On a $v \cdot y = u$; d'où $\frac{v'}{v} + \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u}$

et $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$.

La dérivée logarithmique de la fonction $y = \frac{u}{v}$ est $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$.

5° Soit la fonction $y = u^n$, $n \in \mathrm{N}$. On a :

$$y = u \cdot u \cdot \ldots u$$

D'où :

$$\frac{y'}{y} = n \cdot \frac{u'}{u}$$

6° Soit la fonction $y = \frac{1}{u^n}$, $n \in \mathrm{N}$. On a :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{(u^n)'}{u^n} = -n \cdot \frac{u'}{u}$$

7° Soit la fonction $y = \sqrt[p]{u^q}$, $u \geqslant 0$ et $p \in \mathrm{N}$, $q \in \mathrm{N}$. On a :

$$y = \sqrt[p]{u^q} \Leftrightarrow y^p = u^q$$

D'où :

$$p \cdot \frac{y'}{y} = q \cdot \frac{u'}{u}$$

et

$$\frac{y'}{y} = \frac{q}{p} \cdot \frac{u'}{u}.$$

8° On résume les paragraphes 5°, 6°, 7° par :

La dérivée logarithmique de la fonction* $\mathbf{y = u^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, *est

$$\frac{\mathbf{y'}}{\mathbf{y}} = \alpha \cdot \frac{\mathbf{u'}}{\mathbf{u}}.$$

1089. Dérivée de la fonction $\mathbf{y = u^{\alpha}} \cdot (\alpha \in \mathbf{Q})$.

On a :

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{u'}{u}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y' &= \alpha \cdot \frac{u'}{u} \cdot y \\ &= \alpha \cdot \frac{u'}{u} \cdot u^{\alpha} \\ &= \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u' \end{aligned}$$

***La dérivée de* $\mathbf{y = u^{\alpha}}$ *est* $\mathbf{y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'}$.**

En particulier :

***La dérivée de* $\mathbf{y = \frac{1}{u^{\alpha}}}$ *est* $\mathbf{y' = -\alpha \cdot \frac{u'}{u^{\alpha+1}}}$**

***La dérivée de* $\mathbf{y = \sqrt{u}}$ *est* $\mathbf{y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$.**

Évidemment :

***La dérivée de* $\mathbf{y = \frac{1}{x^{\alpha}}}$ *est* $\mathbf{y' = -\alpha \frac{1}{x^{\alpha+1}}}$.**

***La dérivée de* $\mathbf{y = \sqrt{x}}$ *est* $\mathbf{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$.**

1090. Dérivabilité et continuité.

Soit une fonction f définie sur I, et dérivable en un point x_0 de I. On a donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

On considère alors la fonction :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

D'où :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[\varphi(x) + f'(x_0)]$$

Lorsque x tend vers x_0, $\varphi(x)$ tend vers 0, et

$$\lim_{x=x_0} f(x) = f(x_0)$$

ce qui montre que $f(x)$ est continue en x_0.

Donc :

Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.

Mais la réciproque est inexacte; une fonction continue en un point n'est pas nécessairement dérivable en ce point.

1091. Dérivée d'une fonction composée [1].

Soient les fonctions f et g :

f : $x \in R \longrightarrow u = f(x) \in R$

g : $u \in R \longrightarrow v = g(u) \in R$.

On envisage la fonction $h = g_0 f : v = g(u) = g[f(x)] = h(x)$.

On suppose que f admet une dérivée au point x_0 : $u'_0 = f'(x_0)$, et que g admet une dérivée au point u_0 : $g'(u_0)$.

On considère la fonction :

$$\varphi(u) = \frac{g(u) - g(u_0)}{u - u_0} - g'(u_0)$$

D'où :

$$g(u) - g(u_0) = (u - u_0) \cdot [\varphi(u) + g'(u_0)]$$

et

$$\frac{g(u) - g(u_0)}{x - x_0} = \frac{u - u_0}{x - x_0} \cdot [\varphi(u) + g'(u_0)]$$

Lorsque x tend vers x_0, on a :

$$h'(x_0) = u'(x_0) \cdot g'(u_0)$$

ou

$$\frac{\mathbf{dh}}{\mathbf{dx}} = \frac{\mathbf{dh}}{\mathbf{du}} \times \frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}}. \qquad (1091 ; 1)$$

1. Démonstration valable même dans le cas où $f'(x_0) = 0$.

1092. Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction.

Soit la fonction f bijective (monotone sur l'intervalle I) et dérivable au point x_0 de I.

On a donc :

$$\lim_{x=x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{avec} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Si on considère la fonction $g = \overset{-1}{f}$, on a :

$$x = \overset{-1}{f}(y) \quad x_0 = \overset{-1}{f}(y_0)$$

Comme f et $\overset{-1}{f}$ sont continues, si x tend vers x_0, alors $y = f(x)$ tend vers $y_0 = f(x_0)$ et réciproquement.

Donc :

$$\lim_{y=y_0} \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Autrement dit :

Si la fonction f est bijective, bicontinue et dérivable sur [a ; b], et si f′ (x) n'est pas nul, alors la fonction réciproque $\overset{-1}{f}$ ***est dérivable au point y = f (x), et sa dérivée est*** $\frac{1}{f'(x)}$.

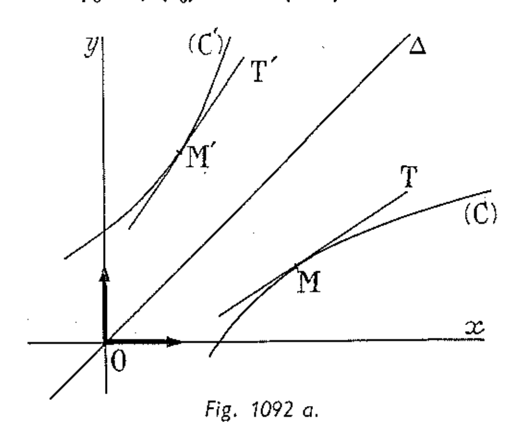


Fig. 1092 a.

Si on représente la fonction f : x ⟶ f (x) par une courbe (C), et la fonction $\overset{-1}{f} : x \to \overset{-1}{f}(x)$ *par une courbe (C′), en axes orthonormés, les deux courbes sont symétriques pour la première bissectrice, et les tangentes en deux points symétriques ont des pentes inverses (fig. 1092 a).*

1093. Dérivées successives.

Soit une fonction f dérivable dans $D \subset R$.

f : $\quad x \in D \longrightarrow f(x) \in R.$

Sa fonction dérivée f' est définie dans D, et

f' : $\quad x \in D \longrightarrow f'(x) \in R.$

La fonction f' peut être dérivable dans $D' \subset D$. Sa dérivée est *la dérivée seconde de* f, on la note f'' et :

$$f'': \qquad x \in D \longrightarrow f''(x) \in R.$$

La fonction f'' peut être dérivable, à son tour, dans D″. Sa dérivée est *la dérivée troisième;* on la note f''' et

$$f''' \qquad x \in D'' \longrightarrow f'''(x) \in R.$$

On définit ainsi les *dérivées successives.*

On note :

$$f(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

. . . .

1094. Espace vectoriel des fonctions dérivables.

On voit immédiatement, en utilisant les résultats des n°s 1082 et 1084 que :

L'ensemble des fonctions dérivables, au moins une fois, est un espace vectoriel sur R.

L'ensemble des fonctions dérivables, au moins deux fois, est un espace vectoriel sur R.

CHAPITRE LXXVII

DÉRIVÉES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

1095. Aire d'une surface plane [1].

De même qu'à un segment on a associé un nombre réel positif qui est la longueur de ce segment, à une surface plane on peut associer un nombre réel positif qui est l'aire de la surface.

On définit ainsi une fonction φ :

$$\varphi : \qquad S \longrightarrow \varphi(S) \in R^{+}.$$

Cette fonction φ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$S = S' \Rightarrow \varphi(S) = \varphi(S')$$

$$S \cap S' = \varnothing \Rightarrow \varphi(S \cup S') = \varphi(S) + \varphi(S');$$

autrement dit :

Deux surfaces isométriques ont la même aire.

L'aire de la réunion de deux surfaces disjointes est égale à la somme des aires des deux surfaces.

On peut définir une fonction φ en se donnant l'aire d'un rectangle. Si un rectangle ABCD a pour dimension $AB = a$ et $AD = b$, on prend pour aire de ce rectangle $\mathcal{A} = ab$.

On en déduit alors les formules donnant les aires des polygones convexes usuels (cf. n°s 318 à 327, du cours de Première CM).

1. On rappelle ici les notions sur l'aire d'une surface qui sont indispensables à l'étude des dérivées des fonctions trigonométriques.

1096. Aire d'un triangle.

L'aire d'un triangle ABC peut être donnée par de nombreuses formules, utiles à connaître :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{abc}{4R} \quad \text{(R, rayon du cercle circonscrit)}$$

$$\mathcal{A} = p \cdot r \quad \text{(r, rayon du cercle inscrit, p, demi-périmètre)}$$

$$= (p - a)\, r_A = (p - b)\, r_B = (p - c)\, r_C$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C}$$

1097. Aire algébrique d'un parallélogramme dans le plan.

Soit un parallélogramme dans le plan rapporté à deux axes orthonormés.

L'aire algébrique de ce parallélogramme est :

$$\mathcal{A} = \operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= AB \cdot AD \cdot \sin A.$$

1098. Aire d'un cercle.

Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R.

Un polygone régulier convexe de n côtés circonscrit à ce cercle a pour aire :

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} \cdot p_n \cdot R,$$

p_n étant le périmètre de ce polygone régulier.

Lorsque n augmente indéfiniment p_n tend vers le périmètre $2\pi R$ du cercle. La limite de $\mathcal{A}_n$ est donc πR^2. C'est cette limite qu'on prend, par définition, comme aire $\mathcal{A}$ du cercle :

$$\mathcal{A} = \pi R^2. \qquad (1098;\ 1)$$

Et on peut énoncer :

L'aire d'un cercle est égale au produit du nombre π et du carré du rayon.

1099. Aire d'un secteur circulaire.

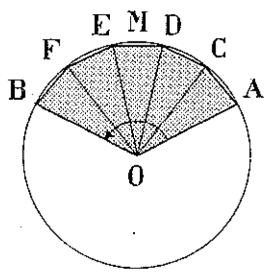


Fig. 1099 a

Soit un secteur circulaire OAMB (fig. 1099 *a*). Un secteur polygonal régulier de *n* côtés inscrit dans ce secteur a pour aire :

$$\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} \cdot \lambda_n \cdot a.$$

Lorsque *n* augmente indéfiniment λ_n tend vers la longueur λ de l'arc AMB, et l'apothème *a* tend vers R. La limite de $\mathcal{A}_n$ est donc $\frac{1}{2}\lambda R$.

C'est cette limite qu'on prend, par définition, comme aire $\mathcal{A}_n$ du secteur :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\lambda R \qquad (1099 ; 1)$$

Si l'angle d'ouverture est *m* degrés, on a :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi R \times m}{360} \cdot R$$

ou

$$\mathcal{A} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot m. \qquad (1099 ; 2)$$

Si l'angle d'ouverture est α radians, on a :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \alpha R \cdot R$$

ou

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \alpha R^2. \qquad (1099 ; 3)$$

1100. Inégalités sin $x < x <$ tg x.

Soit le cercle trigonométrique (U) rapporté aux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 1100 *a*).

x étant la mesure d'un arc en radians et étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ *on considère le point M de (U) d'abscisse curviligne x, c'est-à-dire tel que* $\overline{\text{arc } IM} = x$ *ou tel que* $\overline{\text{angle}}\,(Ox; \overrightarrow{OM}) = x$.

Le point M est situé sur le premier quadrant. Si M se projette en C sur $x'Ox$, on a :

$$\overline{OC} = OC = \cos x$$

et

$$\overline{CM} = CM = \sin x.$$

Si la droite OM coupe l'axe $t'It$ en T, on a :

$$\overline{IT} = IT = \operatorname{tg} x.$$

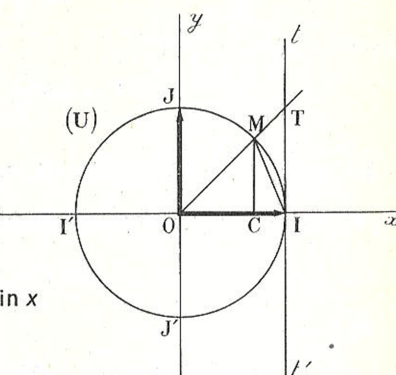


Fig. 1100 a.

Par suite :

$$\text{Aire triangle OIM} = \frac{1}{2} OI \cdot CM = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\text{Aire secteur OIM} = \frac{1}{2} x$$

$$\text{Aire triangle OIT} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

Or :

Aire triangle OIM < aire secteur OIM < aire triangle OIT.

D'où :

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (1100;1)$$

Et :

Si $\boldsymbol{0 < x < \frac{\pi}{2}}$, ***on a :*** $\boldsymbol{\sin x < x < \operatorname{tg} x}$.

1101. Inégalité $\sin x > x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$.

Soit encore x exprimé en radians, avec $0 < x < \frac{\pi}{2}$. On a :

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$$

ou :

$$\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right). \qquad (1101;1)$$

D'après la formule (1100; 1) :

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

et

$$\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{4},$$

donc :

$$1 - \sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{4}.$$

En remplaçant dans (1101; 1), tg $\frac{x}{2}$ par $\frac{x}{2}$ et $1 - \sin^2\frac{x}{2}$ par $1 - \frac{x^2}{4}$, on minore le second membre de cette formule; d'où :

$$\sin x > x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right). \qquad (1101;2)$$

Et :

Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ***on a :*** $x\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) < \sin x$.

1102. Limite de $\frac{\sin x}{x}$ lorsque x tend vers 0.

Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, de la formule (1100; 1) on tire :

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

et de la formule (1101; 2) :

$$1 - \frac{x^2}{4} < \frac{\sin x}{x}$$

D'où :

$$1 - \frac{x^2}{4} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $1 - \frac{x^2}{4}$ tend vers 1, et par suite :

$$\lim_{x=0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, on pose $x = -X$, et X tend alors vers 0 par valeurs positives.

Or :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-X)}{-X} = \frac{\sin X}{X}$$

Cours Maintenon

et

$$\lim_{x=0-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

D'où l'énoncé général :

Si x est la mesure d'un arc en radians, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1, lorsque x tend vers 0.

Remarque. — Le résultat précédent permet de calculer la limite de $\frac{\sin kx}{x}$. En effet, on a :

$$\frac{\sin kx}{X} = k \cdot \frac{\sin kx}{kx}.$$

Or la limite de $\frac{\sin kx}{kx} = \frac{\sin X}{X}$, avec $kx = X$, est 1. Donc :

$$\lim_{x=0} \frac{\sin kx}{x} = k. \qquad (1102; 1)$$

1103. Continuité des fonctions $x \rightarrow \sin x$ et $x \rightarrow \cos x$.

1° On a : $\sin x = \frac{\sin x}{x} \cdot x$

Lorsque x tend vers 0, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1; donc $\sin x$ tend vers 0, c'est-à-dire que : $\lim_{x=0} \sin x = \sin 0.$ (1103; 1)

D'où :

La fonction $x \rightarrow \sin x$ est continue pour $x = 0$.

2° La formule $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ montre que si x tend vers 0, $\cos^2 x$ tend vers 1.

Or si x tend vers 0, on peut supposer que x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et que $\cos x$ est positif. Donc $\cos x$ tend vers 1, c'est-à-dire que :

$$\lim_{x=0} \cos x = \cos 0. \qquad (1103; 2)$$

D'où :

La fonction $x \rightarrow \cos x$ est continue pour $x = 0$.

3° On a :

$$\sin(x_0 + \Delta x) = \sin x_0 \cdot \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \sin \Delta x.$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\cos \Delta x$ tend vers 1 et $\sin \Delta x$ tend vers 0, donc $\sin(x_0 + \Delta x)$ tend vers $\sin x_0$:

$$\lim_{x=x_0} \sin x = \sin x_0.$$

D'où :

La fonction x → sin x est continue quel que soit x.

4° On a :

$$\cos(x_0 + \Delta x) = \cos x_0 \cdot \cos \Delta x - \sin x_0 \cdot \sin \Delta x.$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\cos(x_0 + \Delta x)$ tend vers $\cos x_0$:

$$\lim_{x=x_0} \cos x = \cos x_0 \qquad (1103; 4)$$

D'où :

La fonction x → cos x est continue quel que soit x.

1104. Continuité des fonctions x → tg x et x → cotg x.

La fonction $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est le quotient de deux fonctions continues; elle est donc continue, sauf lorsque $\cos x = 0$, c'est-à-dire si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

La fonction x → tg x est continue pour toutes les valeurs de son ensemble de définition $\left(\mathbf{x} \neq \dfrac{\pi}{2} + \mathbf{k}\pi\right)$.

De même :

La fonction x → cotg x est continue pour toutes les valeurs de son ensemble de définition $(\mathbf{x} \neq \mathbf{k} \cdot \pi)$.

1105. Dérivée de sin x.

Soit la fonction f :

$$f: \quad x \longrightarrow \sin x$$

x étant exprimé en radians.

Elle est définie et continue pour toutes les valeurs de x; et :

$$f: \quad x_0 \longrightarrow \sin x_0$$

$$x_1 \longrightarrow \sin x_1.$$

A l'accroissement $\Delta x = h = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = k = y_1 - y_0 = \sin x_1 - \sin x_0$ de l'image $f(x) = \sin x$; et :

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin x_1 - \sin x_0 \\ &= 2 \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x_1 + x_0}{2} \\ &= 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

Par suite le taux d'accroissement est :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k}{h} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right)$ tend vers $\cos x_0$ et $\dfrac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ tend vers 1; le nombre dérivé est :

$$f'(x_0) = \cos x_0.$$

La fonction dérivée est donc :

$$f' : \qquad x \longrightarrow y' = f'(x) = \cos x.$$

Autrement dit :

La fonction f : x ⟶ sin x est dérivable dans R et, si x est exprimé en radians, sa fonction dérivée est f' : x ⟶ f'(x) = cos x.

Ou :

Si x est exprimé en radians, la dérivée de y = sin x est y' = cos x.

On a donc :

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

et par suite la dérivée n^{ieme} est :

$$y = \sin \left(x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \qquad (1105;\ 1)$$

De plus :

$$y = \sin (ax + b) \quad \Rightarrow \quad y' = a \cos (ax + b) \qquad (1105;\ 2)$$

et :

$$y = \sin u \quad \Rightarrow \quad y' = \cos u \cdot u' \qquad (1105;\ 3)$$

1106. Dérivée de cos x.

Soit la fonction f :

f : $x \longrightarrow \cos x$

x étant exprimé en radians.

Elle est définie et continue pour toutes les valeurs de x; et :

f : $x_0 \longrightarrow \cos x_0$

$x_1 \longrightarrow \cos x_1$.

A l'accroissement $\Delta x = x_1 - x_0$ de la variable x correspond l'accroissement $\Delta y = y_1 - y_0 = \cos x_1 - \cos x_0$ de l'image $f(x) = \cos x$; et :

$$\begin{aligned}\Delta y &= \cos x_1 - \cos x_0 \\ &= -2 \cdot \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cdot \sin \frac{x_1 + x_0}{2} \\ &= -2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).\end{aligned}$$

Par suite le taux d'accroissement est :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Lorsque Δx tend vers 0, $\sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ tend vers $\sin x_0$ et $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ tend vers 1; le nombre dérivé est :

$$f'(x_0) = -\sin x_0.$$

La fonction dérivée est donc :

f': $x \longrightarrow y' = f'(x) = -\sin x$.

Autrement dit :

La fonction f : x ⟶ cos x est dérivable dans R et, si x est exprimé en radians, sa fonction dérivée est f' : x ⟶ f'(x) = − sin x.

Ou :

Si x est exprimé en radians, la dérivée de y = cos x est y' = − sin x.

On a donc :

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

et par la suite la dérivée n[ième] est

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1106;\,1)$$

De plus :

$$y = \cos(ax + b) \quad \Rightarrow \quad y' = -\,a \sin(ax + b) \qquad (1106;\,2)$$

et

$$y = \cos\,u \quad \Rightarrow \quad y' = -\,\sin u \cdot u' \qquad (1106;\,3)$$

1107. Dérivée de tg *x* et de cotg *x*.

1° Soit la fonction $x \longrightarrow y = \operatorname{tg} x$. Elle est définie et continue pour :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

On sait que :

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

En posant :

$$u = \sin x \quad \text{et} \quad v = \cos x$$

on a :

$$u' = \cos x \quad \text{et} \quad v' = -\,\sin x.$$

Or la dérivée de $y = \dfrac{u}{v}$ est :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

d'où :

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ou :

$$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

Autrement dit :

La fonction **f** : **x** $\rightarrow$ ***tg x est dérivable pour x*** $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; ***et, si x est exprimé en radians, sa fonction dérivée est :***

$$f' : \quad x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\, x$$

ou :

Si x est exprimé en radians, $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ ***la dérivée de y = tg x est :***

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\, x.$$

2° De même pour la fonction $x \rightarrow y = \mathrm{cotg}\, x$, avec $x \neq k\pi$, on trouve :

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Autrement dit :

Si x est exprimé en radians $(x \neq k\pi)$ ***la dérivée de y = cotg x est*** $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \mathrm{cotg}^2\, x)$.

CHAPITRE LXXVIII

FONCTIONS VECTORIELLES DÉRIVABLES

1108. Fonction vectorielle.

On considère la fonction f qui à une valeur de la variable réelle t fait correspondre un vecteur libre de R^3.

$$f: \qquad t \in R \longrightarrow \vec{V} = \vec{V}(t) \in R^3$$

On définit ainsi une *fonction vectorielle.*

1109. Vecteur dérivé.

Soit la valeur t_0 de la variable t; on considère le vecteur

$$\frac{\vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t}$$

On appelle vecteur dérivé, pour t_0, la limite, si elle existe, du rapport précédent lorsque Δt tend vers 0.

On note :

$$\vec{V}'_0 = \vec{V}'(t_0) = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t}$$

1110. Fonction vectorielle dérivée.

De la même façon que du nombre dérivé on a déduit la fonction dérivée, on déduit ici du vecteur dérivé la fonction vectorielle dérivée (cf. nº 1079).

$$t \in R \longrightarrow \vec{V}'(t)$$

On note :

$$\vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

1111. Coordonnées du vecteur fonction dérivée.

Si X (t), Y (t), Z (t) sont les coordonnées du vecteur $\vec{V}$ (t), on a :

$$\vec{V}(t) = X(t)\cdot\vec{i} + Y(t)\cdot\vec{j} + Z(t)\cdot\vec{k}$$

D'où :

$$\frac{\vec{V}(t_0+\Delta t) - V(t_0)}{\Delta t} = \frac{X(t_0+\Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}\cdot\vec{i} + \frac{Y(t_0+\Delta t) - Y(t_0)}{\Delta t}\cdot\vec{j} + \frac{Z(t_0+\Delta t) - Z(t_0)}{\Delta t}\cdot\vec{k}$$

Par suite :

$$\vec{V}(t_0) = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\vec{V}(t_0+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}$$
$$= X'(t_0)\cdot\vec{i} + Y'(t_0)\cdot\vec{j} + Z'(t_0)\cdot\vec{k}$$

Et :

Si les coordonnées de la fonction vectorielle $\vec{V}$(t) sont X, Y, Z, les coordonnées de la fonction vectorielle dérivée sont X', Y', Z'.

1112. Dérivées successives.

On peut envisager les dérivées successives du vecteur $\vec{V}$

$$\vec{V}\,(X\,;Y\,;Z)$$
$$\vec{V}'\,(X'\,;Y'\,;Z'$$
$$\vec{V}''\,(X''\,;Y''\,;Z'')$$

1113. Dérivée d'un vecteur constant.

Les coordonnées du vecteur constant $\vec{V} = \vec{K}$ sont des constantes; leurs dérivées sont nulles. Donc :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = 0.$$

Et :

La dérivée d'un vecteur constant est nulle.

1114. Dérivée d'une somme de vecteurs.

Soient les vecteurs $\vec{V_1}$ $(X_1; Y_1; Z_1)$ et $\vec{V_2}$ $(X_2; Y_2; Z_2)$. Les coordonnées du vecteur $\vec{V_1} + \vec{V_2}$ sont $X = X_1 + X_2$; $Y = Y_1 + Y_2$; $Z = Z_1 + Z_2$.

Donc les coordonnées de $\frac{d(\vec{V_1} + \vec{V_2})}{dt}$ sont $X' = X'_1 + X'_2$, $Y' = Y'_1 + Y'_2$, $Z' = Z'_1 + Z'_2$.

Or $(X'_1 Y'_1; Z'_1)$ et $(X'_2; Y'_2; Z'_2)$ sont les coordonnées respectives de $\frac{d\vec{V_1}}{dt}$ et $\frac{d\vec{V_2}}{dt}$.

Par suite :

$$\frac{d(\vec{V_1} + \vec{V_2})}{dt} = \frac{d\vec{V_1}}{dt} + \frac{d\vec{V_2}}{dt} \qquad (1114; 1)$$

On généralise à plus de deux vecteurs.

1115. Dérivée du produit d'un vecteur par un nombre réel.

Soit :

$$\vec{U} = \lambda \cdot \vec{V}$$

Les coordonnées du vecteur $\vec{U}$ sont αX; αY; αZ. Donc les coordonnées de $\frac{d\vec{U}}{dt}$ sont $\alpha X'$, $\alpha Y'$, $\alpha Z'$; ce sont des coordonnées de $\alpha . \frac{d\vec{V}}{dt}$.

D'où :

$$\frac{d(\alpha \cdot \vec{V})}{dt} = \alpha \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (1115; 1)$$

1116. Dérivée du produit d'un vecteur par une fonction numérique.

Soit :

$$\vec{U} = f(t) \cdot \vec{V}$$

Les coordonnées de $\vec{V}$ sont :

$$\vec{U} \begin{cases} f(t) \cdot X \\ f(t) \cdot Y \\ f(t) \cdot Z \end{cases}$$

Les coordonnées de $\frac{d\vec{U}}{dt}$ sont :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} \begin{cases} f'(t) \cdot X + f(t) \cdot X' \\ f'(t) \cdot Y + f(t) \cdot Y' \\ f'(t) \cdot Z + f(t) \cdot Z'. \end{cases}$$

Par suite :

$$\mathbf{\frac{d\,[f(t) \cdot \vec{V}]}{dt} = f'(t) \cdot \vec{V} + f(t) \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}} \qquad (1116\,;\,1)$$

ou

$$\mathbf{\frac{d\,[f \cdot \vec{V}]}{dt} = f' \cdot \vec{V} + f \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}} \qquad (1116\,;\,2)$$

1117. Dérivée d'un produit scalaire.

Soient les deux vecteurs :

$$\vec{u}\,(X_1\,;\,Y_1\,;\,Z_1)$$
$$\vec{v}\,(X_2\,;\,Y_2\,;\,Z_2)$$

On a :

$$f(u) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$= X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

et

$$\frac{df}{du} = X_1'X_2 + Y_1'Y_2 + Z_1'Z_2 + X_1X_2' + Y_1Y_2' + Z_1Z_2'$$
$$= \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

D'où :

$$\mathbf{\frac{d\,(\vec{u} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}} \qquad (1117\,;\,1)$$

1118. Dérivée d'une fonction vectorielle composée.

Soit $\vec{V}$, fonction de u dérivable par rapport à u : $\vec{V} = \vec{V}(u)$. On suppose que u est une fonction numérique de la variable t dérivable par rapport à t.

Les coordonnées de $\vec{V}$ sont :

$$\vec{V} \begin{cases} X(u) \\ Y(u) \\ Z(u) \end{cases}$$

Les coordonnées de $\frac{d\vec{V}}{dt}$ sont :

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\begin{cases}\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{du}\cdot\frac{du}{dt}\\ \frac{dY}{dt} = \frac{dY}{du}\cdot\frac{du}{dt}\\ \frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{du}\cdot\frac{du}{dt}\end{cases}$$

Par suite :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{du}\cdot\frac{du}{dt} \qquad (1118;1)$$

1119. Dérivée d'un vecteur de norme constante.

Soit le vecteur $\vec{V} = \vec{V}(t)$ avec $\|\vec{V}\| = k$, k étant une constante. On suppose que $\vec{V}$ n'est pas constant (cf n° 1113).

On a :

$$\vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$$

ou

$$\vec{V}^2 = k^2$$

En dérivant, on obtient :

$$\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} = 0. \qquad (1119;1)$$

Et :

Si un vecteur non constant a une norme constante, le vecteur dérivé et le vecteur sont orthogonaux.

1120. Dérivée de la norme d'un vecteur.

Soit le vecteur

$$\vec{V} = \vec{V}(t).$$

On a :

$$\vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$$

En dérivant, on obtient :

$$\vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dt} = \|\vec{V}\|\cdot\frac{d(\|\vec{V}\|)}{dt}$$

D'où :

$$\frac{d(\|\vec{V}\|)}{dt} = \frac{\vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|} = \vec{v} \qquad (1120;\ 1)$$

ou encore

$$\frac{\mathbf{d}(\|\vec{\mathbf{V}}\|)}{\mathbf{dt}} = \frac{\vec{\mathbf{V}}}{\|\vec{\mathbf{V}}\|} \cdot \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{V}}}{\mathbf{dt}} \qquad (1120;\ 2)$$

En remarquant que $\vec{V}\frac{\|\vec{V}\|}{\vec{V}}$ est un vecteur unitaire, on a

$$\frac{\mathbf{d}(\|\vec{\mathbf{V}}\|)}{\mathbf{dt}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{V}}}{\mathbf{dt}} \qquad (1120;\ 3)$$

1121. Dérivée d'un vecteur de norme unité dans le plan orthonormé.

Soit le vecteur $\overrightarrow{OM} = \vec{R}$, avec $\|\vec{R}\| = 1$, dans le plan orthonormé Ox, Oy (fig. 1121 *a*).

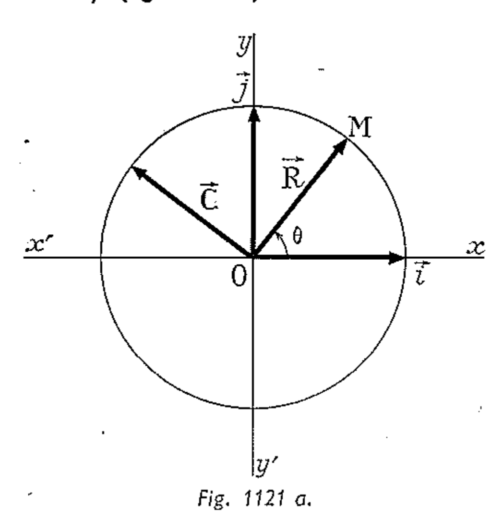


Fig. 1121 a.

Si on pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\ \vec{R}) = \theta$$

les coordonnées de $\vec{R}$ sont :

$$\vec{R} \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases}$$

Les coordonnées de la dérivée de $\vec{R}$ par rapport à θ, sont :

$$\frac{d\vec{R}}{d\theta} \begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

ou

$$\frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{R}}}{\mathbf{d}\theta} = \mathbf{C} \qquad (1121;\ 1)$$

$\vec{C}$ étant le vecteur unitaire tel que $\overline{\text{angle}}\,(\vec{R};\ \vec{C}) = +\frac{\pi}{2}$.

Et :

Le vecteur dérivé du vecteur unitaire $\vec{R}$ par rapport à son angle polaire θ est le vecteur unitaire $\vec{C}$ se déduisant de $\vec{R}$ par une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

On a donc aussi :

$$\frac{dR}{d\theta} = i \cdot \vec{R} \qquad (1121\ ;\ 1)$$

Les coordonnées de $\frac{d\vec{C}}{d\theta}$ sont :

$$\frac{d\vec{C}}{d\theta} = \frac{d^2\vec{R}}{d\theta^2} \begin{cases} \cos(\theta + \pi) \\ \sin(\theta + \pi) \end{cases}$$

Et :

$$\frac{d\vec{C}}{d\theta} = -\vec{R} \qquad (1121\ ;\ 3)$$

ou

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\theta^2} = -\vec{R} \qquad (1121\ ;\ 4)$$

CHAPITRE LXXIX

COURBES ET DÉRIVABILITÉ

1122. Hodographe d'une fonction vectorielle.

Soit la fonction vectorielle :

$$t \in R \longrightarrow \vec{V} = \vec{V}(t)$$

A cette fonction vectorielle on associe, dans l'espace ponctuel R^3, la fonction ponctuelle :

$$t \in R \longrightarrow M \in R^3$$

avec

$$\overrightarrow{OM} = \vec{V}(t)$$

L'ensemble $C = \{ M / \overrightarrow{OM} = \vec{V}(t) \}$ des points M est l'hodographe de la fonction vectorielle.

Cet ensemble C est une courbe au sens des définitions précédentes.

Dans ce qui suit on suppose que la fonction vectorielle est continue et dérivable, et on pose :

$$\overrightarrow{M'} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \vec{V}'(t)$$

et

$$\overrightarrow{M'_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_0 = \vec{V}'(t_0).$$

1123. Arcs réguliers.

Si t décrit l'intervalle $[a; b]$, le point M décrit un arc de courbe simple (cf. n° 1075).

L'arc AB est régulier si la dérivée $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ ne s'annule en aucun point de l'arc,

1124. Points ordinaires. Points singuliers.

Soit un point M_0 (t_0) d'une courbe C.

Si le vecteur $\dfrac{dM}{dt}$ est nul pour t_0, c'est-à-dire au point M_0, on dit que M_0 est *un point singulier*. Dans le cas contraire, M_0 est *un point ordinaire*.

Donc :

Tous les points d'un arc régulier sont des points ordinaires.

1125. Tangente.

Soit un point ordinaire M_0 de la courbe C.

Le point M_0 et le vecteur $\overrightarrow{M'_0}$ déterminent une droite M_0T de vecteur directeur M'_0, appelée tangente à la courbe C au point M_0.

Le point M_0 est le point de contact de la courbe et de la tangente (fig. 1125 *a*).

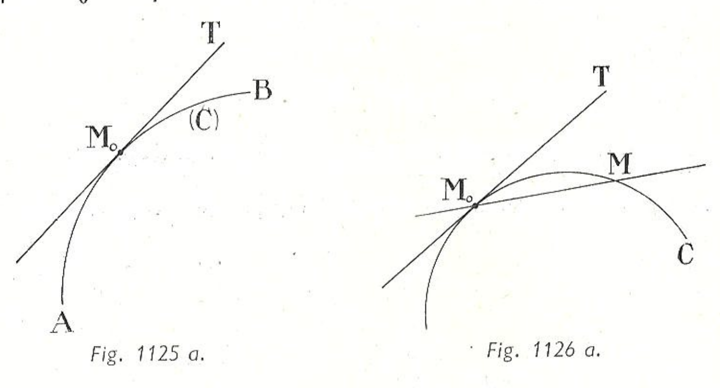


Fig. 1125 a. *Fig. 1126 a.*

1126. Limite et tangente.

Soit le point $M_0(t_0)$ et la tangente M_0T en M_0 à l'arc régulier AB (fig. 1126 *a*). On considère le point $M(t)$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est un vecteur directeur de la droite M_0M: il en est de même du vecteur :

$$\frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t}$$

Or on sait (cf. n° 1109) que

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \vec{V}'(t_0) = \overrightarrow{M'_0}$$

ou

$$\lim_{M=M_0} \frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t} = \overrightarrow{M'_0}$$

Donc :

La sécante M_0M à la courbe régulière C a pour limite la tangente M_0T en M_0 à C, lorsque le point M tend vers le point M_0.

1127. Courbes paramétrées.

Si la courbe C est paramétrée, on a :

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

et par suite :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}.$$

La tangente en M_0 a pour équation :

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}$$

avec $M(x; y; z)$, $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M'_0(x'_0; y'_0\ z'_0)$.

1128. Courbes planes définies par une équation explicite.

Si la courbe C est définie par l'équation explicite $y = f(x)$, on a :

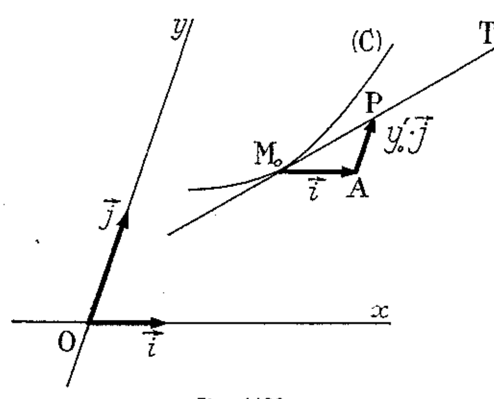


Fig. 1128 a.

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$
$$= x \cdot \vec{i} + f(x) \cdot \vec{j}$$

D'où :

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dx} = \vec{i} + y' \cdot \vec{j} \qquad (1128;\ 1)$$

Le vecteur $\vec{T}[1;\ y'_0 = f'(x_0)]$ est un vecteur directeur de la tangente en M_0 à C.

$y'_0 = f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (fig. 1128 *a*).

L'équation de la tangente en M_0 est

$$y - y_0 = y'_0 \cdot (x - x_0) \cdot$$

1129. Courbes définies en coordonnées polaires.

Soit une courbe C définie par une relation entre les coordonnées polaires $(\theta;\ r)$ du point M :

$$r = f(\theta)$$

On suppose que f est dérivable.

On a (fig. 1129 *a*) :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{R}$$

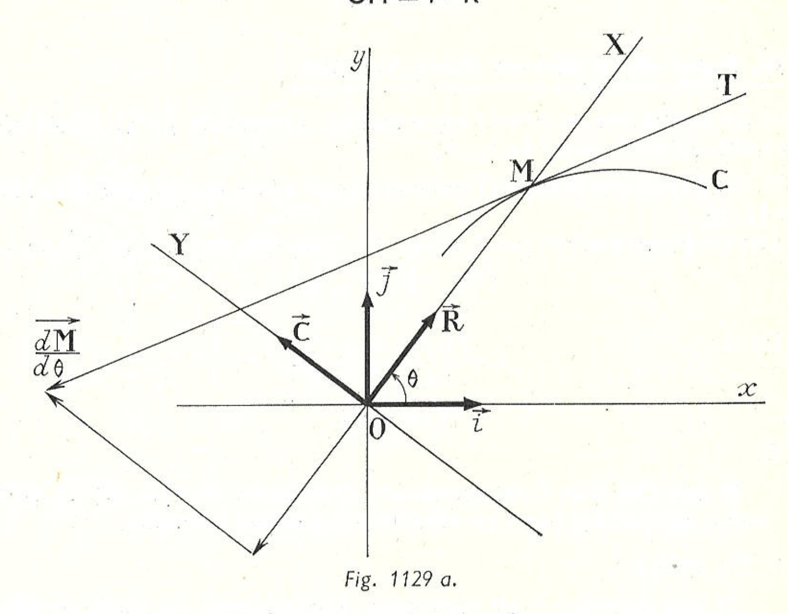


Fig. 1129 a.

$\vec{R}$ étant le vecteur unitaire tel que $\overline{\text{angle}}\,(\vec{i};\ \vec{R}) = \theta$. Soit le vecteur $\vec{C} = i \cdot \vec{R}$ (cf. nº 1121).

On a :

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \vec{R} + r \cdot \frac{d\vec{R}}{d\theta}$$

ou

$$\frac{\overrightarrow{\mathbf{dM}}}{\mathbf{d\theta}} = \frac{\mathbf{dr}}{\mathbf{d\theta}} \cdot \vec{\mathbf{R}} + \mathbf{r} \cdot \vec{\mathbf{C}} \qquad (1129;\ 1)$$

Cette formule permet la construction de la tangente dans la base orthonormée $(\vec{R};\ \vec{C})$.

CHAPITRE LXXX

THÉORÈME DE ROLLE

1130. Signe de la dérivée d'une fonction.

1° On donne une fonction f constante sur l'intervalle $[a; b]$. Sa dérivée est nulle en tout point de $]a; b[$.

2° On donne une fonction f monotone croissante sur $[a; b]$ et dérivable sur $[a; b]$.

Soit un point quelconque x_0 de $]a; b.[$ Quel que soit $x \in]a; b[$, on a :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

ou

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

Et :

Si une fonction f est monotone croissante sur* [a; b] *et dérivable sur*]a; b[*, alors sa dérivée est positive ou nulle.

3° De même :

Si une fonction f est monotone décroissante sur* [a; b] *et dérivable sur*]a; b[*, alors sa dérivée est négative ou nulle.

1131. Théorème de Rolle.

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle.

$$f : \quad x \in R \longrightarrow f(x) \in R$$

***définie et continue sur un intervalle* [a; b] *fermé et borné, possédant une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert*]a; b[*, et telle que* f (a) = f (b).**

Dans ces conditions, il existe un point c appartenant à l'intervalle ouvert*]a; b[*tel que* f′ (c) = *0.

1° *Si la fonction* f *est constante*, la dérivée est nulle en tout point de $]a; b[$, et le théorème est évident.

2° *Si la fonction* f *n'est pas constante*, elle prend sur $[a; b]$ des valeurs différentes de $f(a) = f(b)$; pour fixer les idées, on suppose que f prend des valeurs supérieures à $f(a) = f(b)$. La fonction f, étant continue sur $]a; b[$, possède une borne supérieure M. Cette borne est atteinte pour un point c de $]a; b[$. (cf. n° 1028). Cette borne étant supérieure à $f(a) = f(b)$, on en déduit que c est différent de a et b. Donc $c \in]a; b[$.

$f(c) = M$ est un maximum; il existe donc un voisinage $]\alpha; \beta[$ de c tel que f croît sur $]\alpha; c]$ et décroît sur $[c; \beta[$.

Si x appartient à $]\alpha; c]$, on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$; par suite la limite de ce rapport pour $x = c$ est positive ou nulle :

$$\lim_{x=c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c - 0) \geqslant 0$$

Si x appartient à $[c; \beta[$, on a $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c.} < 0$; par suite la limite de ce rapport pour $x = c$ est négative ou nulle :

$$\lim_{x=c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c + 0) \leqslant 0.$$

Comme la fonction f est dérivable sur $]a; b[$, donc en c, on a :

$$f'(c - 0) = f'(c + 0);$$

cette condition exige alors $f'(c - 0) = f'(c + 0) = 0$; autrement dit $f'(c) = 0$, ce qui démontre le théorème .

1132. Interprétation graphique du théorème de Rolle.

La fonction f est représentée graphiquement par un arc régulier AB (fig. 1132 *a* et *b*).

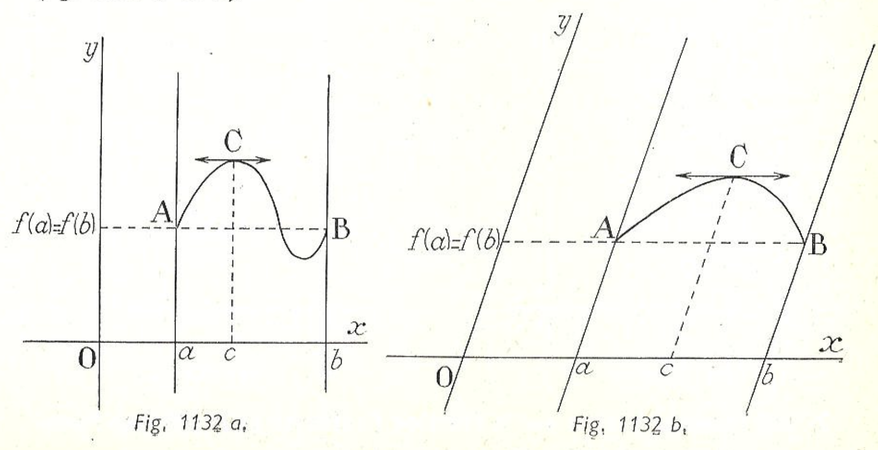


Fig. 1132 a. *Fig. 1132 b.*

Le théorème de Rolle exprime que sur cet arc AB, il existe un point C, au moins, où la tangente à l'arc AB est parallèle à l'axe x'Ox.

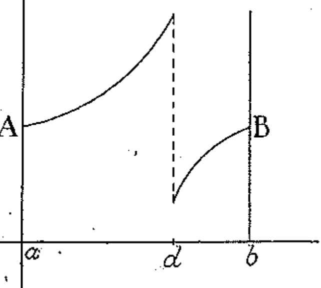


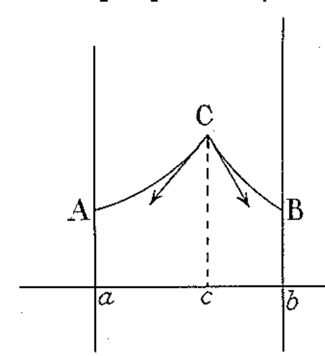
Fig. 1133 a.

1133. Remarques.

1° Les hypothèses faites sur la fonction f sont indispensables.

La figure (1133 *a*) montre que la continuité sur $[a; b]$ est indispensable.

La figure (1133 *b*) montre que la dérivabilité sur $[a; b]$ est indispensable. Ici on a $f'(c-0) \neq f'(c+0)$.



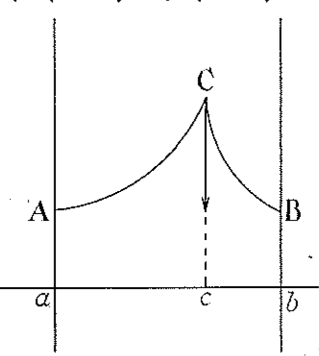


Fig. 1133 b.

La figure (1133 *c*) montre que la condition $f(a) = f(b)$ est indispensable.

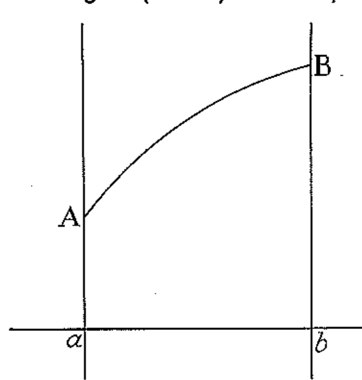


Fig. 1133 c.

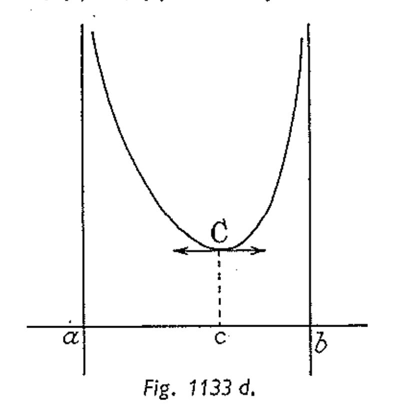


Fig. 1133 d.

2° Les conditions faites sur la fonction f suffisent pour affirmer l'exis-

tence du point $c \in]a; b[$. Mais ce point peut exister si les conditions ne sont pas satisfaites.

Sur la figure (1133 *d*), la condition *f* définie en *a* et *b* n'est pas vérifiée.

Sur la figure (1133 e), *f* n'est pas continue pour $d \in [a; b]$.

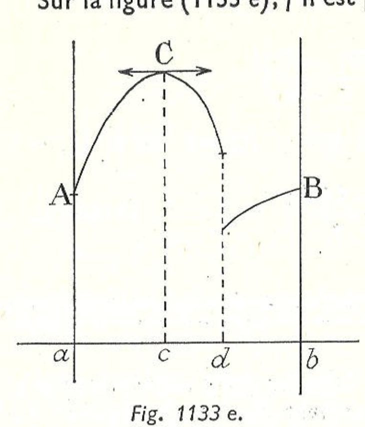


Fig. 1133 e.

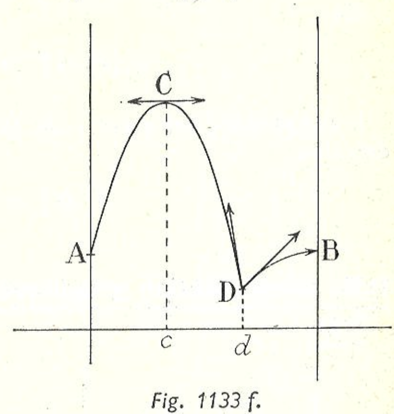


Fig. 1133 f.

Sur la figure (1133 *f*), la fonction *f* n'est pas dérivable en $d \in]a; b[$.

1134. Théorème des accroissements finis.

Soit* f *une fonction réelle d'une variable réelle :

$$\mathbf{f}: \quad x \in R \longrightarrow f(x) \in R,$$

***définie, continue sur un intervalle* [a; b], *fermé et borné, possédant une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert* [a; b].**

Dans ces conditions, il existe un point* c *appartenant à l'intervalle ouvert* [a; b] *tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Soit la fonction auxiliaire φ :

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

La fonction φ est continue, sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, car c'est la somme de deux fonctions possédant ces deux propriétés.

D'autre part, on a :

$$\varphi(a) = f(a)$$

et

$$\varphi(b) = f(a).$$

donc aussi :

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

On peut alors appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ.

Or :

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il existe donc un point c de $]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Et $\varphi'(c) = 0$ entraîne

$$\mathbf{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \qquad (1134; 1)$$

1135. Interprétation graphique du théorème des accroissements finis.

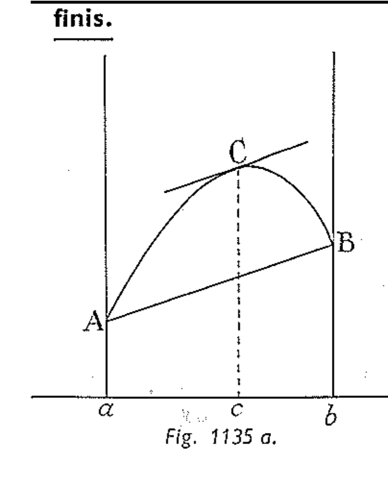


Fig. 1135 a.

La fonction f est représentée graphiquement par un arc régulier AB (fig. 1135 *a*).

Le théorème des accroissements finis exprime que sur cet arc AB, il existe un point C, au moins, où la tangente est parallèle à la corde AB.

En effet $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite AB, et $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente en C à l'arc AB.

1136. Autres formes de la formule des accroissements finis.

La formule (1134; 1) s'écrit :

$$\boldsymbol{f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'(c)} \qquad (1136; 1)$$

En posant $b = a + h$, on a :

$$\boldsymbol{f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta \cdot h)} \qquad (1136; 2)$$

avec $0 < \theta < 1$.

On peut aussi écrire

$$\boldsymbol{f(a + h) = f(a) + h\,[f'(a) + \varepsilon]} \qquad (1136; 3)$$

avec $\lim\limits_{h=0} \varepsilon = 0$.

En faisant $h = x$ et $a = 0$, on a :

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(\theta \cdot x) \qquad (1136 ; 4)$$

1137. Fonction à dérivée nulle.

Soit une fonction f continue sur $]a; b[$ et dont la dérivée est nulle sur $]a; b[$.

Soit un point x_0 de $]a; b[$. Quel que soit le point x de $]a; b[$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[x; x_0]$; donc :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \cdot f'(c)$$

avec $c \in]x; x_0[$. Or en c, d'après l'hypothèse, on a $f'(c) = 0$; et :

$$(\forall x) \; x \in]a; b[\quad : \quad f(x) = f(x_0)$$

ce qui signifie que f est constante sur $]a; b[$.

Et :

Si une fonction f, définie et continue sur un intervalle]a; b[ouvert et borné, admet une dérivée nulle en tout point de cet intervalle, alors la fonction f est constante sur]a; b[.

1138. Fonctions ayant la même dérivée sur un intervalle.

Soient deux fonctions f et g ayant la même dérivée en tout point de l'intervalle $]a; b[$, ouvert et borné.

La fonction $f - g$ a donc une dérivée nulle en tout point de $]a; b[$; elle est donc constante sur $]a; b[$.

Et :

Si deux fonctions f et g, définies et continues sur un intervalle]a; b[ouvert et borné, ont la même dérivée en tout point de cet intervalle, alors leur différence est constante.

1139. Variations d'une fonction.

On donne une fonction f définie, continue, dérivable sur un intervalle $]a; b[$.

1° On suppose qu'en tout point de $]a; b[$, la dérivée est positive ou nulle.

Soient deux points quelconques x' et x'' de $]a; b[$, $(x' < x'')$. La théorème des accroissements finis donne :

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x')\cdot f'(c) \qquad c \in]x'; x''[$$

Comme $f'(c)$ est positif ou nul, on a : $f(x'') - f(x') \geqslant 0$; et :

$$(\forall x')(\forall x'') : \qquad x' < x'' \Rightarrow f(x') \leqslant f(x'')$$

et la fonction f est croissante sur $]a; b[$.

Si une fonction f, définie et continue sur]a; b[, admet une dérivée positive ou nulle sur]a; b[, alors elle est croissante sur]a; b[.

2° On démontre de même :

Si une fonction f, définie et continue sur]a; b[, admet une dérivée négative ou nulle sur]a; b[, alors elle est décroissante sur]a; b[.

1140. Formule réduite de Taylor [1].

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un intervalle [a; b] fermé et borné, possédant des dérivées jusqu'à l'ordre 4 en tout point de l'intervalle ouvert]a; b[.

Dans ces conditions, il existe un point c appartenant à l'intervalle ouvert]a; b[tel que :

$$\mathbf{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \frac{(b-a)^4}{4!}f^{(4)}(c)}$$

Soit la fonction auxiliaire :

$$\varphi(x) = f(b) - \left[f(x) + \frac{b-x}{1!}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \frac{(b-x)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(b-x)^4}{4!}\cdot A\right]$$

A étant une constante déterminée par la condition $\varphi(a) = 0$.

La fonction φ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, car c'est une somme de fonctions possédant ces deux propriétés.

---

1. La formule est démontrée jusqu'à l'ordre $n = 4$. La démonstration est générale.

D'autre part on a : $\varphi(a)$, et $\varphi(b) = 0$; donc :

$$\varphi(b) = \varphi(a)$$

On peut alors appliquer le théorème de Rolle à la fonction φ.

Or on a :

$$\varphi'(x) = -\left[f'(x) - f'(x) + \frac{b-x}{1!}f''(x) - \frac{(b-x)}{1!}f''(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) + \frac{(b-x)^3}{3!}f^{(4)}(x) - \frac{(b-x)^3}{3!}\cdot A\right]$$

$$= \frac{(b-x)^3}{3!}[A - f^{(4)}(x)]$$

Il existe donc un point c de $]a; b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$:

$$\varphi'(c) = \frac{(b-c)^3}{3!}[A - f^{(4)}(c)]$$

et $\varphi'(c) = 0$ donne

$$A = f^{(4)}(c)$$

Par suite :

$$\varphi(a) = 0 = f(b) - \left[f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \right.$$

$$\left. + \frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \frac{(b-a)^4}{4!}f^{(4)}(c)\right]$$

ou

$$\mathbf{f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) +}$$

$$\mathbf{\frac{(b-a)^3}{3!}f'''(a) + \frac{(b-a)^4}{4!}f^{(4)}(c)}$$

avec

$$\mathbf{a < c < b}$$

1141. Autre forme de la formule de Taylor.

En posant $b = a + h$, on a :

$$\mathbf{f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a + \theta \cdot h)}$$

$$\mathbf{0 < \theta < 1}$$

1142. Formule réduite de Mac-Laurin.

Avec $a = 0$ et $h = x$, on a :

$$\mathbf{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(\theta \cdot x)}$$

$$\mathbf{0 < \theta < 1}$$

C'est la formule très importante de Mac-Laurin.

◇ *Exemple.* — Appliquer la formule de Mac-Laurin à $f(x) = \cos x$.

On a :

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$

D'où :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \cos(\theta \cdot x) \qquad 0 < \theta < 1$$

CHAPITRE LXXXI

FORMES INDÉTERMINÉES

1143. Forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Soient deux fonctions f et g continues dans un voisinage V du point $x = a$, et telles que $f(a) = 0$ et $g(a) = 0$. La fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ prend alors, pour $x = a$, la forme $\frac{0}{0}$, appelée *forme indéterminée*.

La fonction quotient $\frac{f}{g}$ n'est pas définie pour $x = a$; on se propose de la prolonger pour $x = a$.

Si $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$, on convient de dire que la valeur de la fonction $\frac{f}{g}$ pour $x = a$ est égale à λ.

On dit que la fonction $\frac{f}{g}$ a été prolongée par continuité; que la vraie valeur de la fonction $\frac{f}{g}$ pour $x = a$ est λ; que l'on a levé l'indétermination.

Remarque.

Le raisonnement précédent s'étend au cas où $a = +\infty$ (ou $a = -\infty$) si

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

◇ *Exemple 1.* — Soit la fonction f :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$$

Lorsque x *tend vers* 0, f (x) *prend la forme indéterminée* $\frac{0}{0}$ *·Trouver la vraie valeur.*

On rend rationnel le numérateur de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}$$

Lorsque x tend vers 0, on a :

$$\lim_{x=0} f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

◇ *Exemple 2. — Calculer :*

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

Pour $x = 0$, la fonction f :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

On a :

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x} \cdot \cos^2 2x$$

$$= \frac{1 - \cos x}{4 \sin^2 x \cos^2 x} \cdot \cos^2 2x$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}$$

$$= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x}\right) \cdot g(x)$$

Le premier facteur a pour limite $\frac{1}{4}$; on va donc s'occuper de

$$g(x) = \frac{1 - \cos x.}{\sin^2 x}$$

On a :

$$g(x) = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{1 + \cos x}.$$

D'où :

$$\lim_{x=0} g(x) = \frac{1}{2}.$$

Finalement :

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\text{tg}^2 2x} = \frac{1}{8}.$$

1144. Formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$.

Ces trois formes se ramènent à la forme $\frac{0}{0}$.

Dans le premier cas, on écrit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$$

Dans le second cas, on écrit :

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Dans le troisième cas, on écrit :

$$f(x) - g(x) = f(x) \cdot \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

◇ Exemple 1. — *Calculer la vraie valeur de* $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}$ *pour* $x = 0$.

La fonction s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot [1 - 2x]$$

Lorsque x tend vers 0, par valeurs inférieures à 0 ou par valeurs supérieures à 0, $1 - 2x$ tend vers 1 et $\frac{1}{x^2}$ tend vers $+\infty$; donc :

$$\lim_{x=0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

◇ *Exemple 2.* — Étudier la limite de $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ pour x infini.

On a :

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= 2x - |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

Si x tend vers $+\infty$, on a : $|x| = x$ et :

$$f(x) = 2x - x\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

$$= x\left[2 - \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}\right]$$

Donc :

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty$$

Si x tend vers $-\infty$, on a : $|x| = -x$ et :

$$f(x) = 2x + x\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

$$= x \cdot \left[2 + \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}\right]$$

Donc :

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = -\infty$$

1145. Développements limités.

En utilisant la formule de Mac-Laurin, on peut obtenir une valeur approchée d'une fonction, dans un voisinage de 0; c'est un développement limité.

◇ *Exemple 1. — Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction* $f(x) = \sin x$.

On a :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \end{array}$$

D'où :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon(x) \qquad \varepsilon(x) = \frac{x^5}{5!}\sin(\theta \cdot x)$$

ou

$$\mathbf{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x)} \qquad (1145\,;1)$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction de x, tendant vers 0 si x tend vers 0, et négligeable si x est suffisamment petit.

◇ *Exemple 2. — Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction* f (x) = *cos* x.

On a :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \end{array}$$

D'où :

$$\mathbf{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)} \qquad (1145\,;2)$$

◇ *Exemple 3. — Appliquer la formule de Mac-Laurin à la fonction* f (x) = tg x.

On a :

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{tg} x & f(0) = 0 \\ f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = 2\,[\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x] & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = 2\,(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)\,(1 + \operatorname{tg}^2 x) & f'''(0) = 2 \end{array}$$

D'où :

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{2}{3!}x^3 + \varepsilon(x)$$

ou

$$\mathbf{\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x)} \qquad (1145\,;3)$$

◇ *Exemple 4. — Trouver le développement limité de* $f(x) = \sqrt{1+x}$.

On a :

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \varepsilon(x) \qquad (1145\,;4)$$

De même :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \varepsilon(x) \qquad (1145\,;5)$$

◇ *Exemple 5. — Trouver le développement limité de* $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

On a :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$$

D'où :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \varepsilon(x) \qquad (1145\,;6)$$

De même :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \varepsilon(x) \qquad (1145\,;7)$$ (1)

1146. Applications des développements limités.

On peut se servir des développements limités pour comparer des fonctions ou pour étudier des limites.

◇ *Exemple 1. — Calculer :*

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

(1) Il est utile de connaître les formules 1145, 1 à 7 de mémoire.

On a :

$$1 - \cos x = 1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x)\right]$$
$$= \frac{x^2}{2} - \varepsilon(x)$$

et

$$\operatorname{tg} 2x = 2x + \varepsilon_1(x)$$
$$\operatorname{tg}^2 2x = 4x^2 + \varepsilon_2(x)$$

Et enfin :

$$\frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x} = \frac{1}{8} + \varepsilon_3(x)$$

D'où :

$$\lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 2x} = \frac{1}{8}.$$

◇ *Exemple 2. — Étudier* $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ *au voisinage de l'infini.*

On a (cf. 1144, exemple 2).

$$f(x) = 2x - |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}.$$

Or en posant $u = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$, il vient :

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = \sqrt{1 + u} = 1 + \frac{u}{2} + \varepsilon(u)$$
$$= 1 + \frac{1}{x} + \varepsilon(x).$$

Et :

$$f(x) = 2x - |x| \cdot \left[1 + \frac{1}{x} + \varepsilon(x)\right].$$

Si x tend vers $+\infty$, on a :

$$f(x) = 2x - x\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \varepsilon(x)$$

ou

$$f(x) = x - 1 + \varepsilon(x)$$

Si x tend vers $-\infty$, on a :

$$f(x) = 2x + x\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \varepsilon(x).$$

ou

$$f(x) = 3x + 1 + \varepsilon(x)$$

CHAPITRE LXXXII

PRIMITIVES

1147. Aire algébrique d'un rectangle.

Dans le plan orthonormé on considère la surface rectangulaire ABCD définie par (fig. 1147 *a*) :

$$S = [a;\ b] \times [0; h]$$

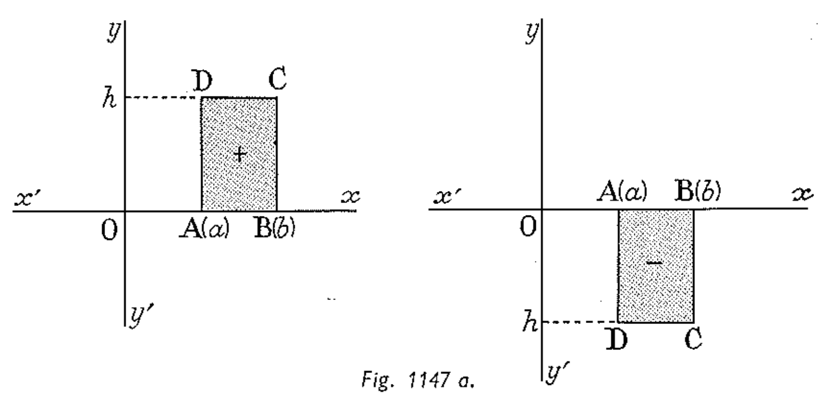


Fig. 1147 a.

Son aire algébrique est :

$$\overline{\mathcal{A}} = \text{Det}\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$$

ou

$$\overline{\mathcal{A}} = (b - a) \cdot h \qquad (1147; 1)$$

1148. Fonctions en escalier.

On appelle fonction en escalier sur A = [a; b] toute fonction constante par intervalles.

Soit $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ une partition de l'intervalle A; *f* est une fonction en escalier si elle est définie par :

f : $\qquad x \in A_i \longrightarrow f(x) = \lambda_i.$

◇ *Exemple 1.*

La fonction E est une fonction en escalier sur [0; 3]; en effet :

E : $x \in [0\,;1[\longrightarrow f(x) = 0$

$x \in [1\,;2[\longrightarrow f(x) = 1$

$x \in [2\,;3[\longrightarrow f(x) = 2$

$x = 3 \longrightarrow f(3) = 3$

La figure **1148** *a* donne la représentation graphique de cette fonction.

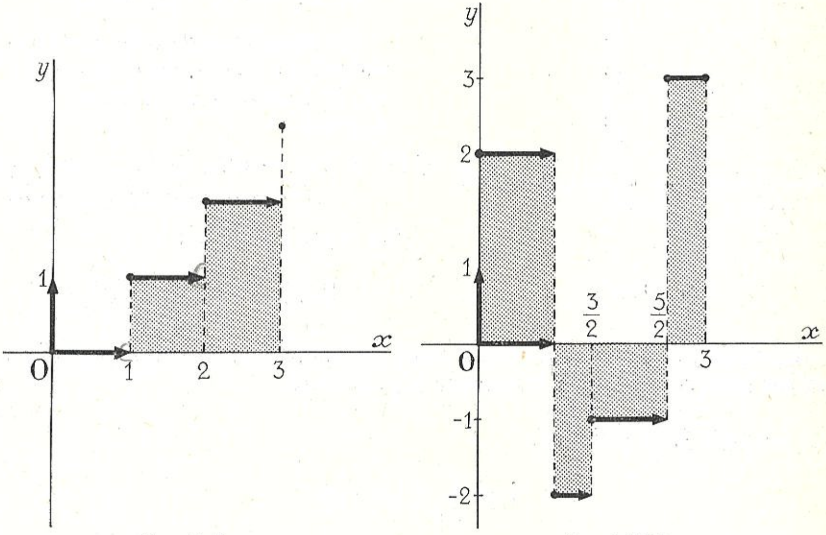


Fig. 1148 a. *Fig. 1148 b.*

◇ *Exemple 2.*

On considère la fonction f définie sur [0; 3] par

f : $x \in [0\,;1[\longrightarrow f(x) = 2$

$x \in \left[1\,;\frac{3}{2}\right[\longrightarrow f(x) = -2$

$x \in \left[\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right[\longrightarrow f(x) = -1$

$x \in \left]\frac{5}{2}\,;3\right] \longrightarrow f(x) = 3$

Cette fonction est une fonction en escalier sur [0; 3].

La figure **1148** *b* donne une représentation graphique de cette fonction.

1149. Intégrale d'une fonction en escalier.

Soit une fonction f en escalier sur $A = [a; b]$ définie sur la partition
$A_1 = [a; a_1[$ $A_2 = [a_1; a_2[$ ... $A_{n-1} = [a_{n-2}; a_{n-1}[$, $A_n = [a_{n-1}; b]$
par :

$$f: \quad x \in A_1 \longrightarrow f(x) = \lambda_1$$
$$x \in A_2 \longrightarrow f(x) = \lambda_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x \in A_n \longrightarrow f(x) = \lambda_n.$$

On appelle intégrale, sur l'intervalle [a; b] fermé et borné [1]***, de la fonction en escalier f le nombre***

$$\mathbf{I_a^b(f) = (a_1 - a)\lambda_1 + (a_2 - a_1)\lambda_2 + \ldots + (b - a_{n-1}) \cdot \lambda_n}$$

On note souvent :

$$I_a^b(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Fig. 1149 a.

Le signe ∫ se lit somme. Cette notation rappelle l'aire du rectangle : dx est la largeur et $f(x)$ la hauteur (fig. 1149 *a*).

◇ *Exemple 1. — Calculer :*

$$I = \int_0^3 E(x) \cdot dx$$

En utilisant les résultats de l'exemple 1 du nº 1148, on a :

$$I = 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3$$
$$= 3$$

Donc :

$$I = \int_0^3 E(x) \cdot dx = 3.$$

$I = 3$ n'est autre que la somme des aires algébriques des rectangles hachurés sur la figure 1148 *a*.

◇ *Exemple 2. — f étant la fonction en escalier étudiée dans l'exemple 2 du* nº 1148, *calculer :*

$$I = \int_0^3 f(x) \cdot dx$$

(1) Un tel intervalle [*a*, *b*,] fermé et borné est appelé un compact.

En utilisant les résultats de l'exemple 2 du n° 1148, on a :

$$I = 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times (-2) + 1 \times (-1) + \frac{1}{2} \times 3$$
$$= 2 - 1 - 1 + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{3}{2}$$

Donc :

$$I = \int_0^3 f(x) \cdot dx = \frac{3}{2}$$

$I = \frac{3}{2}$ n'est autre que la somme des aires algébriques des rectangles hachurés sur la figure 1148 *b*.

1150. Intégrale d'une fonction.

Soit une fonction f définie sur le compact $[a; b]$. On partage l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de même largeur (fig. 1150 *a*).

$$A_1 = [a; a_1[\quad A_2 = [a_1; a_2[\ldots \quad A_n = [a_{ni}; b]$$

avec :

$$a_1 - a = a_2 - a_1 = \ldots = b - a_{n-1} = h$$

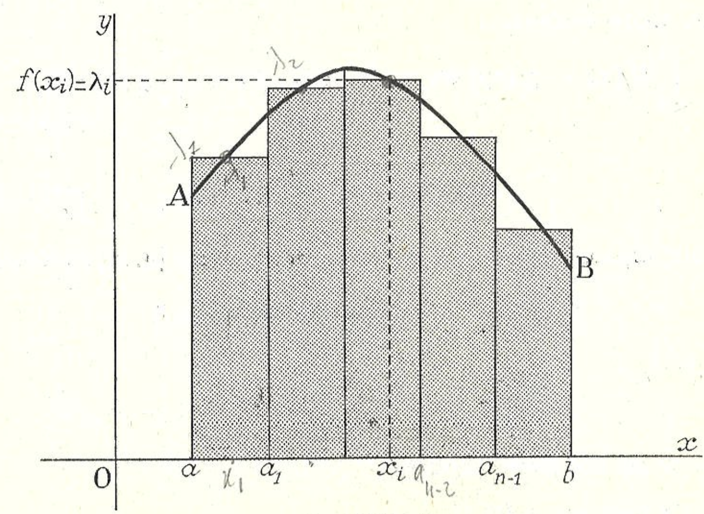


Fig. 1150 a.

Dans A_i on choisit un point x_i, et on considère le nombre $\lambda_i = f(x_i)$.

Soit φ_n la fonction en escalier définie par

$$\varphi_n : \quad \begin{array}{l} x \in A_1 \longrightarrow f(x) = \lambda_1 \\ x \in A_2 \longrightarrow f(x) = \lambda_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x \in A_n \longrightarrow f(x) = \lambda_n. \end{array}$$

On pose :

$$I_n = \int_a^b \varphi_n(x) \cdot dx$$

Si lorsque n tend vers $+\infty$ et si quels que soient les points x_i choisis, I_n a une limite I, on dit que I est l'intégrale de f sur le compact [a; b].

On pose :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Toutes les fonctions ne sont pas intégrables, mais on démontre en particulier que :

Les fonctions continues sont intégrables.

1151. Propriétés.

1° De toute évidence :

$$\int_a^b [\mathbf{f(x)} + \mathbf{g(x)}]\, \mathbf{dx} = \int_a^b \mathbf{f(x)} \cdot \mathbf{dx} + \int_a^b \mathbf{g(x)} \cdot \mathbf{dx} \qquad (1151 ; 1)$$

et

$$\int_a^b \alpha \cdot \mathbf{f(x)}\, \mathbf{dx} = \alpha \cdot \int_a^b \mathbf{f(x)} \cdot \mathbf{dx} \qquad (1151 ; 2)$$

Si E est l'espace vectoriel des fonctions continues sur [a; b,] on considère

$$\Phi : \quad f \in E \longrightarrow \Phi(f) = \int_a^b f(x) \cdot dx \in R$$

et on a :

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g)$$
$$\Phi(\alpha f) = \alpha\, \Phi(f)$$

Donc Φ *est une forme linéaire.*

2° On a aussi si $c \in [a; b]$.

$$\int_a^b \mathbf{f(x)}\, \mathbf{dx} = \int_a^c \mathbf{f(x)}\, \mathbf{dx} + \int_c^b \mathbf{f(x)}\, \mathbf{dx} \qquad (1151 : 3)$$

3° Et aussi :

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = -\int_b^a \mathbf{f(x)\,dx} \qquad (1151\,;\,4)$$

1152. Formule de la moyenne.

1° Soit la fonction f intégrable sur le compact $A = [a;\ b]$; elle est bornée, soient :

$$m = \inf_{x \in A} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{x \in A} f\,x)$$

On a évidemment :

$$m \cdot (b - a) \leqslant \int_a^b f(x) \cdot dx \leqslant M \cdot (b - a) \qquad (1152\,;\ 1)$$

Par suite $\int_a^b f(x) \cdot dx$ est le produit de $b - a$ par un nombre μ compris entre m et M. D'où la formule

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,.\,dx} = \mu \cdot \mathbf{(b - a)} \qquad (1152\,;\,1)$$

◇ *Exemple.* — *f étant la fonction en escalier intégrée au n° 1149, exemple 2, calculer le nombre μ.*

On a :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{3}{2}$$

et

$$b - a = 3$$

Donc :

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = 3 \cdot \mu$$

D'où :

$$3\,\mu = \frac{3}{2}$$

et

$$\mu = \frac{1}{2}$$

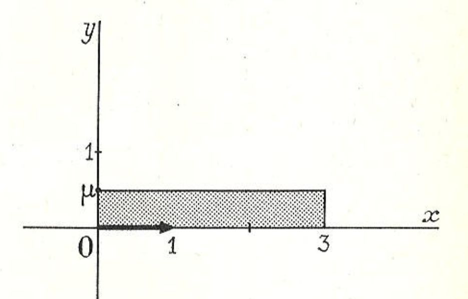


Fig. 1152 a.

La figure (n° 1152 a) montre l'interprétation de μ; μ est la hauteur du rectangle ABCD dont l'aire est égale à $I = \int_a^b f(x)\,.\,dx$.

2° Si la fonction f est continue, il existe (cf. n° 1028, 3°) un nombre c compris entre a et b, tel que $\mu = f(c)$, et on a :

$$\int_a^b \mathbf{f(x) \cdot dx = f(c) \cdot (b - a)} \qquad (1152;2)$$

1153. Aire d'une surface.

Soit une fonction f continue et positive sur $[a; b]$.

L'arc AB représente graphiquement la fonction $y = f(x)$ sur $[a; b]$ (fig. 1153 a).

Le trapèze mixtiligne A'B'BA limite une surface. Par définition l'aire de ce trapèze mixtiligne est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

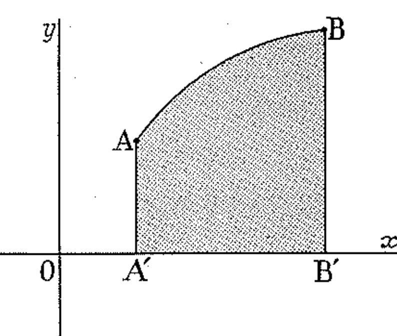


Fig. 1153 a.

Remarque.

Si $f(x)$ n'est pas toujours positive sur $[a; b]$ l'intégrale donne une aire algébrique (fig. 1153 b).

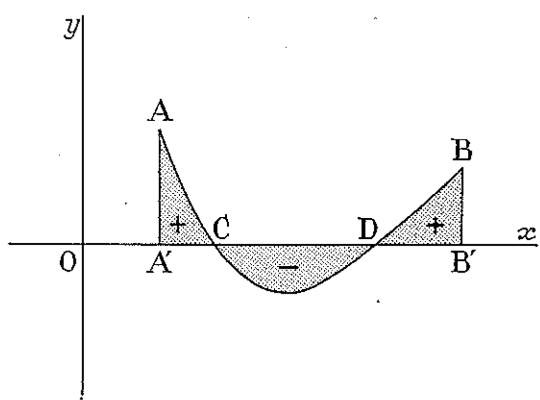


Fig. 1153 b.

1154. Fonction définie à l'aide d'une intégrale.

1° Soit une *fonction* f *intégrable sur* [a; b], on se propose d'étudier la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt. \qquad (1154;1)$$

lorsque x décrit $[a; b]$.

Si x est l'abscisse du point M de l'arc AB, F(x) est l'aire du trapèze mixtiligne A'M'MA (fig. 1154 *a*). Cette aire est donc bien une fonction de x lorsque x décrit $[a;\ b]$.

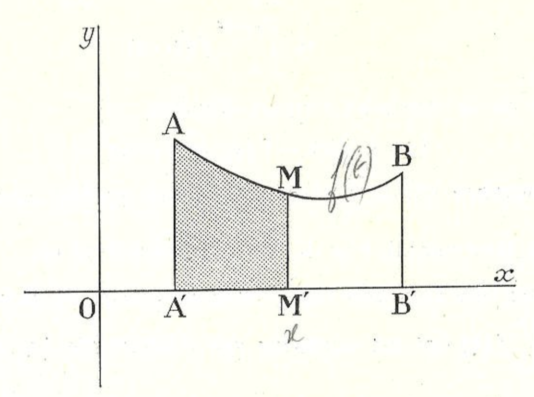


Fig. 1154 a.

◇ *Exemple.* — ***Soit la fonction E définie sur [0; 3]. Étudier la fonction*** $F(x) = \int_0^x E(t).\,dt$.

Si x décrit $[0;\ 1[$, $E(t) = 0$ et $F(x) = 0$ sur $[0;\ 1[$
Si x décrit $[1;\ 2[$, $E(t) = 1$ et $F(x) = x - 1$ sur $[1;\ 2[$ et $F(2) = 1$
Si x décrit $[2;\ 3[$, $E(t) = 2$ et $F(x) = 2x - 3$ sur $[2;\ 3[$ et $F(3) = 3$.

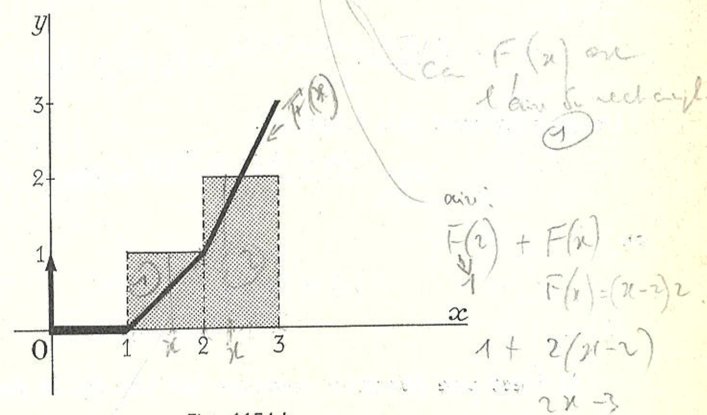


Fig. 1154 b.

La fonction F est représentée graphiquement sur la figure (1154 *b*).

2° La fonction $F(x)$ définie au 1° est continue. En effet :

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$
$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\cdot dt$$

La formule de la moyenne permet d'écrire :

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \mu\cdot \Delta x$$

μ étant un nombre compris entre les bornes de $f(t)$ dans l'intervalle $[x;\ x+\Delta x]$.

Lorsque Δx tend vers 0, $F(x+\Delta x)$ tend vers $F(x)$ et :

Si f est une fonction intégrable sur** [a ; b], **la fonction

***F (x)** = $\int_a^x$ **f (t) · dt est continue sur l'intervalle** [a; b].*

L'exemple précédent montre bien que la fonction $F(x) = \int_a^x E(t)\cdot dt$ est continue sur [0; 3], même lorsque la fonction E est discontinue ($t = 1$ et $t = 2$).

3° On suppose maintenant que la fonction f est continue sur $[a; b]$.

La formule de la moyenne permet alors d'écrire :

$$F(x+\Delta x) - F(x) = f(c)\cdot\Delta x$$

c étant un nombre compris entre x et $x+\Delta x$ ($c = x + \theta.\Delta x$, $0 < \theta < 1$)

On a :

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x+\theta\cdot\Delta x).$$

Lorsque Δx tend vers 0, on a :

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

ou

$$F'(x) = f(x) \qquad (1154;\ 2)$$

Donc :

Si f est une fonction continue sur** [a; b], **la fonction

$$\mathbf{F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt}$$

est continue et dérivable sur** [a; b] **et on a F′(x) = f(x).

1155. Fonctions primitives.

1° ***On dit qu'une fonction F (x) est une primitive de la fonction f (x) si F′(x) = f (x).***

Ainsi :

$F(x) = x^3 + 1$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$, car $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

2° *Si la fonction f est continue, toute fonction* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *est une primitive de* f(x).

En effet, d'après 1154; 3°, on a $F'(x) = f(x)$.

3° Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, toute fonction $G(x) = F(x) + C$, C étant une constante arbitraire, est aussi une primitive de $f(x)$, car

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

D'autre part, soient deux primitives $F(x)$ et $G(x)$ de la fonction $f(x)$, on a donc :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad G'(x) = f(x)$$

donc :

$$G'(x) = F'(x)$$

et par suite (cf. n° 1138) :

$$G(x) = F(x) + C$$

Donc :

Si F (x) est une primitive de f (x), toute autre primitive de f (x) est de la forme F (x) + C.

1156. Intégrale indéfinie.

Si $F(x)$ est une primitive quelconque de $f(x)$, on note souvent :

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx$$

Symbolise l'ensemble des primitives de f(x)

et

$\int$ **f (x) dx** ***est appelée une intégrale indéfinie, ou la primitive générale de* f (x).**

1157. Relation entre intégrale définie et primitive.

Soit :

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

nulle pour x = a

et deux nombres α et β de l'intervalle $[a; b]$. On a :

$$F(\alpha) = \int_a^\alpha f(t) \cdot dt$$

$$F(\beta) = \int_a^\beta f(t) \cdot dt$$

D'où :

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^\beta f(t) \cdot dt - \int_a^\alpha f(t) \cdot dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f(t) \cdot dt.$$

D'où la formule importante :

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{f(t) \cdot dt} = \boldsymbol{F(\beta) - F(\alpha)} \qquad (1157 ; 1)$$

1158. Recherche des primitives.

A chaque dérivée correspond une primitive; le tableau des dérivées donne immédiatement un tableau de primitives.

$$\int dx = x + c$$

$$n \neq -1 \qquad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos (ax + b) \cdot dx = \frac{\sin (ax + b)}{a} + C$$

$$\int \sin (ax + b) \cdot dx = -\frac{\cos (ax + b)}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) \, dx = \mathrm{tg}\, x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\, x + C.$$

◇ *Exemples 1. — Calculer :* $I = \int (x^2 - 3x + 2)\, dx.$

On peut intégrer terme à terme :

$$I = \int x^2\, dx - 3 \int x\, dx + 2 \int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x + C$$

ou

$$I = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

◇ *Exemple 2. — Calculer :* $I = \int (\sin 2x + \cos 3x) \cdot dx.$

On a :

$$I = \int \sin 2x \cdot dx + \int \cos 3x \cdot dx$$

ou

$$I = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C$$

◇ *Exemple 3. — Calculer :* $I = \int \cos^2 x \cdot dx.$

On a :

$$I = \int \cos^2 x \cdot dx$$
$$= \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \cdot dx$$

ou

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

◇ *Exemple 4. — Calculer* $\int_1^2 x^4\, dx.$

On a :

$$F(x) = \int x^4\, dx$$
$$= \frac{x^5}{5} + C$$

Et (cf. formule 1157; 1) :

$$\int_1^2 x^4\,dx = F(2) - F(1)$$

$$= \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2$$

$$= \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5}$$

ou

$$= \int_1^2 x^4 \cdot dx = \frac{31}{5}.$$

EXERCICES SUR LE LIVRE VIII

Dérivées.

Calculer les dérivées des fontions suivantes :

1574. $y = x^3 - 4x + 3$ $\qquad$ $y = x^2 - 5x + 7.$

1575. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 7$ $\qquad$ $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 7x.$

1576. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ $\qquad$ $y = \frac{x - 7}{x^2 + 1}.$

1577. $y = \frac{3x^2 - 5}{x^2 - 1}$ $\qquad$ $y = \frac{3x^2 - 5}{(x^2 - 1)^2}.$

1578. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x}$ $\qquad$ $y = (5 - 3x)(4x - 3).$

1579. $y = \frac{(x - 1)^3}{(x + 1)^3}$ $\qquad$ $y = (5 - 3x)(x^2 - 1)^2.$

1580. $y = 3x^2 - 5x + \frac{5}{x}$ $\qquad$ $y = (x^2 - 4x + 5)(2x^2 + 8x - 7).$

1581. $y = (x - 1)^3 (x + 2)^4$ $\qquad$ $y = \frac{4x^2 - 5}{x}.$

1582. $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{2x^2 - x + 1}$ $\qquad$ $y = \frac{x}{(x + 1)^2}.$

1583. $y = \frac{3x^2 - 7x + 1}{x^2 + x - 5}$ $\qquad$ $y = \frac{2x + 1}{4x^2 + 3x - 1}.$

1584. $y = (x^2 - 1)(x^2 + 2x + 1)$ $\qquad$ $y = (x^4 + 1)(x^4 + 8x^2 - 9).$

1585. $y = \frac{4x^2 - 7x}{x^2 - 2x + 3}$ $\qquad$ $y = (4x^2 - 7x)(x^2 - 2x + 3).$

1586. $x = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$ $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$.

1587. $y = \frac{(x+1)^2}{(x-2)^3}$ $y = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$.

1588. $y = \sqrt{1+x^2}$ $y = \sqrt{x-1}$.

1589. $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}$.

1590. $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

1591. $y = \frac{4x-1}{\sqrt{2x-1}}$

1592. $y = (2x+1)\sqrt{x}$.

1593. $y = (x^2-1)\sqrt{2x-5}$.

1594. $y = (x^2 - 3x + 2)\sqrt{4x-3}$.

1595. $y = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1596. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

1597. $y = \sqrt{x - 1 - x^2}$. (Attention!)

1598. $y = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{4x^2-3}$.

1599. $y = \sin(2x+3)$.

1600. $y = \cos(5x-3)$.

1601. $y = \operatorname{tg}(3x-1)$.

1602. $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{4}{3}\right)$.

1603. $y = \sin x + \sin\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - 1\right)$

1604. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1605. $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

1606. $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{2}\right)$.

1607. $y = \sin[(x^2-1)\pi]$.

1608. $y = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$.

1609. $y = 2\sin^2 x - 3\sin x + 1$.

1610. $y = \operatorname{tg}^2 x - 1$.

1611. $y = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$.

1612. $y = \sin^2 x \cdot \cos^3 x$.

1613. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$.

1614. $y = \frac{x(3+2x^2)}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

1615. $y = \frac{(2x^2+1)\sqrt{x^2-1}}{3x^3}$.

1616. $y = x(x^2-1)\sqrt{x^2+1}$.

1617. $y = \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x + \cos x}$.

1618. $y = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$.

1619. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{(x+1)\operatorname{tg} x + 1}$.

1620. $y = x - \sin x \cos x$.

1621. $y = (\sin^2 x + 2)\cos x$.

1622. $y = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{\cos x}{\sin x}$.

1623. $y = 3(x^2-2)\cos x + (x^3 - 6x)\sin x$.

1624. $y = \frac{\sin x}{5}\left[\frac{4}{3\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^5 x}\right] + \frac{8}{15}\operatorname{tg} x$.

1625. Soit $y = \frac{x^3}{1-x}$. Calculer $\frac{d^4y}{dx^4}$.

1626. On donne $y \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}$. Calculer $\frac{d^2y}{dx^2}$ et vérifier que $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 3\ y^5$.

Formes indéterminées.

Étudier les formes indéterminées suivantes :

1627. $\frac{(x-2)}{x^2-3x+2}$ pour $x = 2$.

1628. $\frac{(x-2)^2}{x^4-16}$ pour $x = 2$.

1629. $\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ pour $x = 0$.

1630. $\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+16}-4}$ pour $x = 0$.

1631. $\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x}-3}$ pour $x = 0$.

1632. $\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ pour $x = 0$.

1633. $\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ pour $x = 0$.

1634. $\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$ pour $x = 1$.

1635. $\frac{2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x}{x(1-\cos 3x)}$ pour $x = 0$.

1636. $\frac{\sin x}{1-(1-x)^2}$ pour $x = 0$.

1637. $\sqrt{x^2+x-2} - x$ pour x infini.

1638. $2x+1-2\sqrt{x^2-1}$ pour x infini.

1639. $\sqrt{x^2+x-2} - 2\sqrt{x^2-1}$ pour x infini.

1640. $-x+1+\sqrt{x^2+4}$ pour x infini.

Trouver les développements limités des fonctions suivantes :

1641. $1-\cos x$ et $1+\sin x$.

1642. $\frac{\sin x}{x}$ et $x\cos x + 1$.

1643. $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$.

1644. $4\sin x\cos x$.

1645. $4\sin^2 x\cos x$.

1646. $\sqrt{1+x}-1$.

1647. $1-\cos x-\operatorname{tg} x$.

1648. $x - \frac{4}{15}\sin x + \frac{1}{15}\operatorname{tg} x - \frac{8}{5}\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1649. $\sqrt{1+x}$ et $\sqrt{1-x}$.

1650. $\sqrt{1-x^2}$ et $\sqrt{1+x^3}$.

1651. $\frac{1}{1-x^2}$ et $\frac{1}{1+x^2}$.

1652. $\frac{1}{2-4x^2}$ et $\frac{1}{2-x^2}$.

1653. $\sqrt{4+x}$ et $\sqrt{4-x}$.

Utiliser les développememts limités pour étudier les limites suivantes :

1654. $\lim_{x=0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt{4+x}}{\sqrt{9+x} - 3}$

1655. $\lim_{x=0} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{2x+8}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}}$.

1656. $\lim_{x=0} \frac{3x - 2\sin x - \operatorname{tg} x}{3x^5}$.

Primitives et intégrales.

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

1657. $x^2 + 3x - 2$.

1658. $x^4 - 3x^2 + x - 7$.

1659. $4x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x$.

1660. $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{4}{3}$.

1661. $x^2 + 3x - \frac{1}{x^2}$.

1662. $x^3 - 5x^2 - \frac{1}{x^2}$.

1663. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^3}$.

1664. $\frac{x^2-1}{x^2}$.

1665. $x^2 + 1 - \sin x$.

1666. $2\sin x - 3\cos x$.

1667. $\sin 3x + 2\cos 2x$.

1668. $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

1669. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$.

1670. $\sin x + x\cos x$.

1671. $\cos^2 x \sin x$.

1672. $\sin^2 x \cos x$.

1673. $\cos^2 x$.

1674. $\sin^2 x$.

1675. $\sin 3x \cos x$.

1676. $\cos 4x \cdot \cos 2x$.

Calculer les intégrales suivantes :

1677. $\int_0^2 x^3\,dx$.

1678. $\int_0^2 (x^2 - x + 3)\,dx$.

1679. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

1680. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \sin 2x)\,dx$.

1681. $\int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\,dx$

1682. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$.

QUATRIÈME PARTIE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

LIVRE IX

APPLICATIONS DE L'ANALYSE

CHAPITRE LXXXIV

GÉNÉRALITÉS SUR LES COURBES

1159. Formule préliminaire.

On considère la courbe C définie par l'équation explicite $y = f(x)$; on suppose que la fonction f est dérivable successivement autant de fois qu'il sera nécessaire (fig. 1159 *a*).

Soit M_0 le point de C, de coordonnées x_0 et $y_0 = f(x_0)$, et M le point de C, de coordonnées $x = x_0 + h$ et $y = f(x_0 + h)$, h étant un nombre réel suffisamment petit.

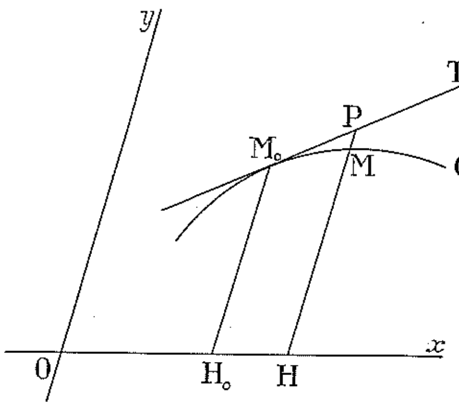


Fig. 1159 a.

La tangente en M_0 a pour coefficient directeur $y'_0 = f'(x_0)$ et on suppose que $f'(x_0)$ est fini. L'équation de cette tangente est :

$$y - y_0 = y'_0 (x - x_0)$$

Le point P de cette tangente ayant pour abscisse $x_0 + h$ a pour ordonnée

$$y_P = y_0 + h \cdot y'_0$$

ou

$$y_P = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

Si H est le point de l'axe $x'Ox$, d'abscisse $x_0 + h$, on a donc :

$$\overline{HM} = f(x_0 + h)$$

et

$$\overline{HP} = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

D'où :

$$\overline{PM} = \overline{HM} - \overline{HP}$$
$$= f(x_0 + h) - [f(x_0) + h \cdot f'(x_0)]$$

Or, en utilisant la formule de Taylor : 6°p 99

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) +$$
$$+ \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0 + \theta \cdot h). \qquad 0 < \theta < 1$$

D'où la formule préliminaire :

$$\overline{PM} = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x_0 + \theta \cdot h) \qquad (1159 ; 1)$$

ou

$$\overline{PM} = \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \varepsilon. \qquad (1159 ; 2)$$

ε étant suffisamment petit pour être négligeable.

1160. Étude de la courbe au voisinage d'un point.

1° $f''(x_0) \neq 0$.

Dans ce cas :

$$\overline{PM} = \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \varepsilon$$

Quel que soit le signe de h, $\overline{PM}$ garde le même signe, et dans un voisinage de M_0 suffisamment petit, la courbe est du même côté de la tangente.

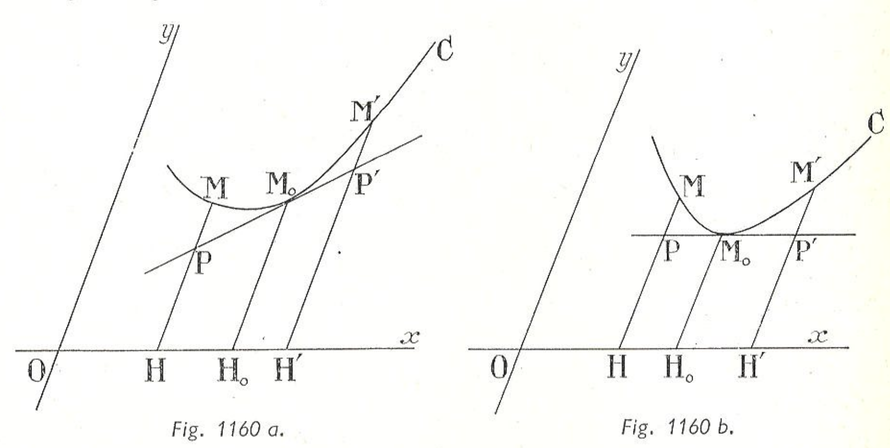


Fig. 1160 a. *Fig. 1160 b.*

Si $f''(x_0)$ est positif, la courbe est au-dessus de la tangente (fig. 1160 *a* et *b*). On dit que la courbe a sa concavité vers les y positifs.

Si $f''(x_0)$ est négatif, $\overline{PM}$ est négatif et la courbe est au-dessous de la tangente (fig. 1160 *c* et *d*). On dit que la courbe a sa concavité vers les *y* négatifs.

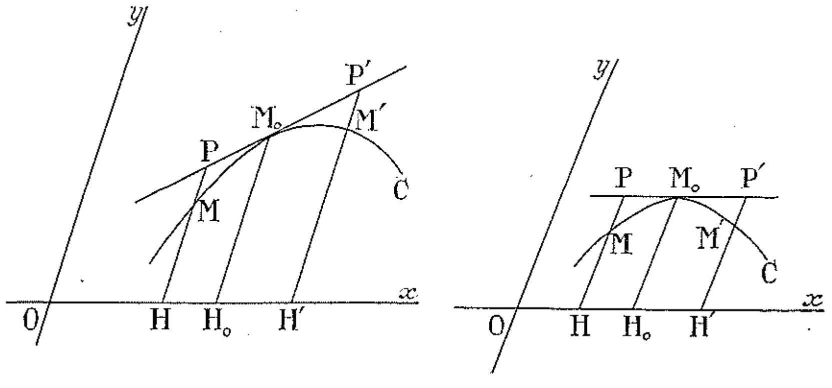


Fig. 1160 c. *Fig. 1160 d.*

2° $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$.

Dans ce cas la formule préliminaire s'écrit :

$$\overline{PM} = \frac{h^3}{2} f'''(x_0) + \varepsilon.$$

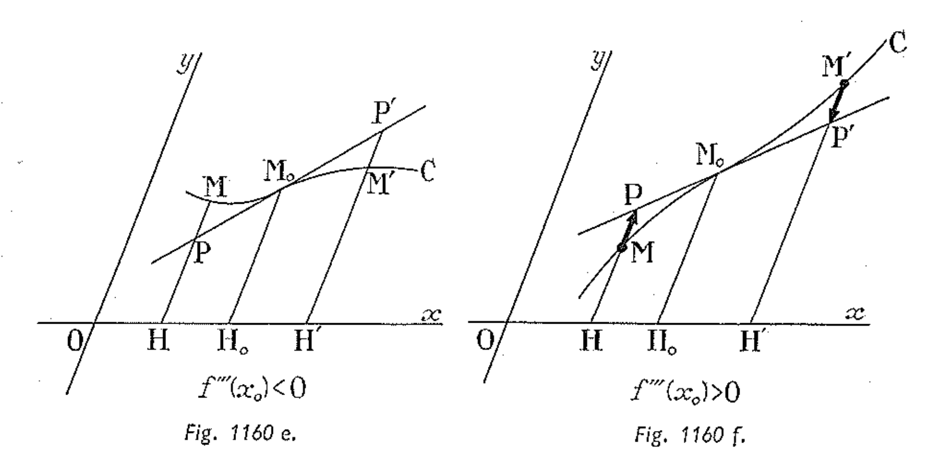


Fig. 1160 e. *Fig. 1160 f.*

$\overline{PM}$ change donc de signe avec *h*; la courbe traverse sa tangente. On dit alors que M_0 est un point d'inflexion (fig. 1160 e, *f*, *g*).

3° $\mathbf{f'''(x_0) = 0}$.

Si $f'''(x_0)$ est nul, la discussion se poursuit de la même manière, mais il faut utiliser les dérivées $f^{(4)}(x_0)$...

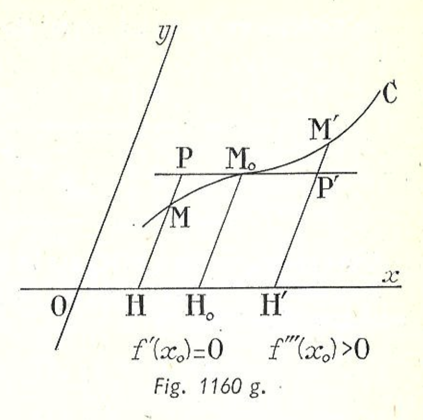


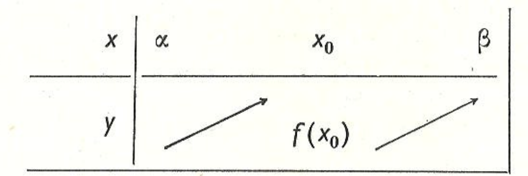
Fig. 1160 g.

1161. Cas où la dérivée $f'(x_0)$ est infinie.

Si la dérivée $f'(x_0)$ est infinie la tangente en M_0 est parallèle à l'axe Oy. La forme de la courbe dans un voisinage de M_0 se déduit alors très facilement de l'étude des variations.

1° *La fonction* f *est croissante dans* $[\alpha; x_0]$ *et dans* $[x_0; \beta]$.

Le tableau de variation serait donc le suivant :



x	α		x_0		β
y		↗	$f(x_0)$	↗	

La courbe traverse alors la tangente (fig. 1161 *a*). Il y a un point d'inflexion à tangente parallèle à Oy.

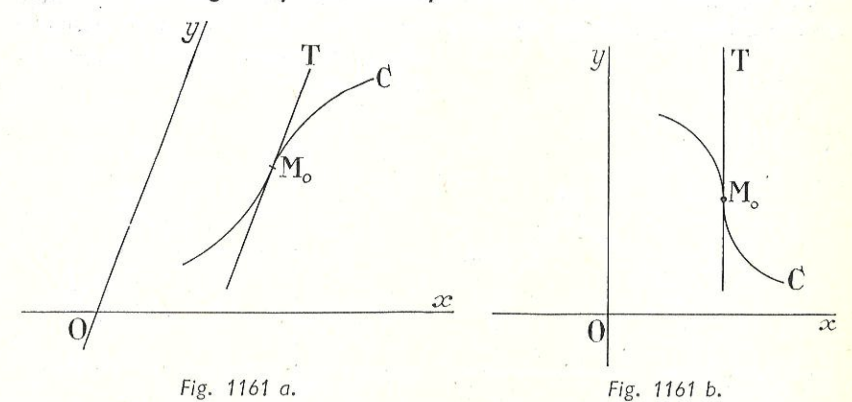
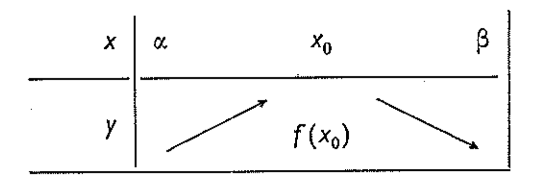


Fig. 1161 a. *Fig. 1161 b.*

Si la fonction f *décroît dans* $[\alpha; x_0]$ *et dans* $[x_0; \beta]$ on a un résultat analogue (fig. 1161 *b*).

2° *La fonction* f *est croissante dans* $[\alpha; x_0]$ *et décroissante dans* $[x_0; \beta]$.

Le tableau de variation serait donc le suivant :



x	α	x_0	β
y	↗	$f(x_0)$	↘

Dans ce cas, on dit que M_0 est un point de rebroussement (fig. 1161 *c*).

Si la fonction f *décroît dans* $[\alpha; x_0]$ *et croît dans* $[x_0; \beta]$, on a un résultat analogue (fig. 1161 *d*).

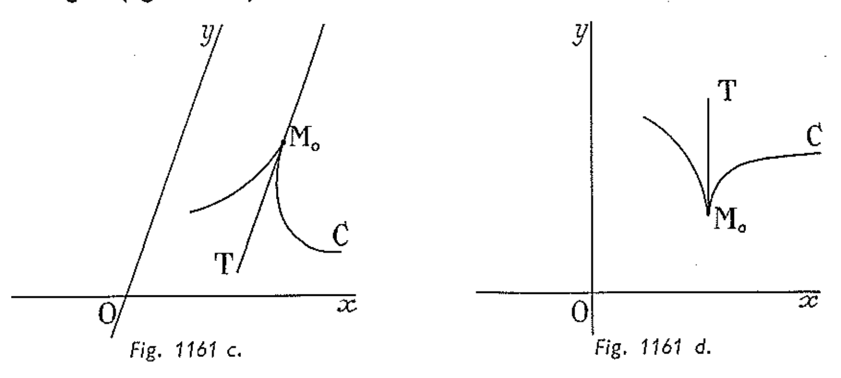


Fig. 1161 c. *Fig. 1161 d.*

1162. Cas où la fonction f n'est pas dérivable pour x_0.

On suppose maintenant que la fonction f est continue pour x_0, mais qu'elle admet un nombre dérivé à droite $a = f'(x_0 + 0)$ et un nombre dérivé à gauche $b = f'(x_0 - 0)$, avec $a \neq b$.

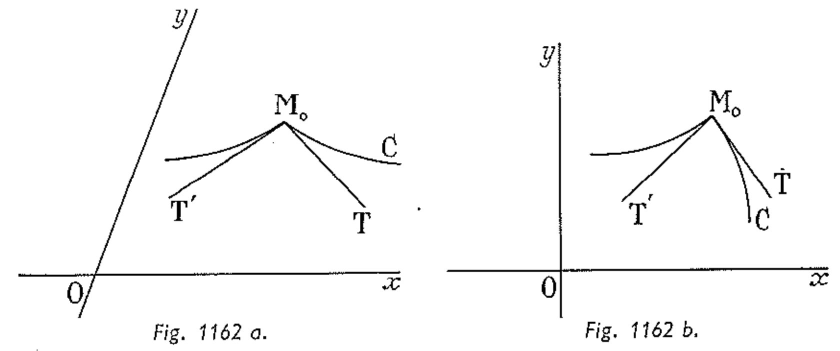


Fig. 1162 a. *Fig. 1162 b.*

Il y a alors une demi-tangente à droite, et une demi-tangente à gauche (fig. 1161 *a* et *b*). *Le point M_0 est un point anguleux.*

1163. Asymptotes parallèles aux axes.

1° Si lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) $f(x)$ tend vers une limite finie a, on dit que *la droite* Δ *d'équation* $y = a$ *est asymptote à la courbe C.*

On coupe la courbe (C), la droite Δ et l'axe $x'Ox$ par une parallèle à Oy d'équation $x = u$, u étant un paramètre; soient M, P, H les points d'intersection (fig. 1163 *a* et *b*).

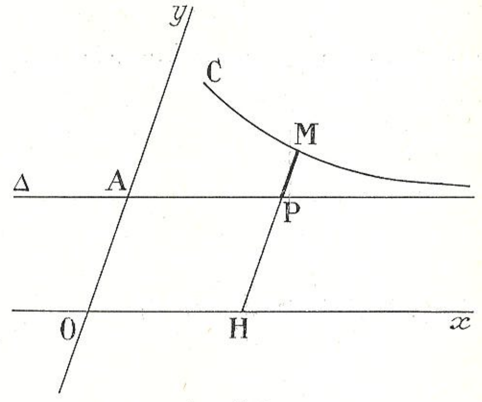


Fig. 1163 a.

On a :

$$\overline{HP} = a$$

$$\overline{HM} = f(x)$$

D'où :

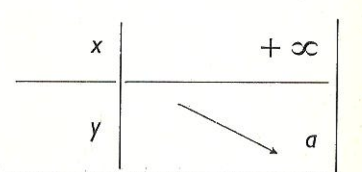
$$\overline{PM} = f(x) - a$$

Donc :

$$\lim_{x=+\infty} \overline{PM} = 0.$$

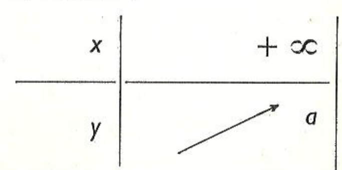
Le signe de $\overline{PM}$ pour x dans un voisinage de $+\infty$, permet de préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote; l'étude des variations de la fonction f donne d'ailleurs immédiatement cette position.

Si les variations sont résumées dans le tableau suivant :



x		$+\infty$
y	↘	a

la position de la courbe est celle de la figure (1163 *a*). Pour le tableau :



x		$+\infty$
y	↗	a

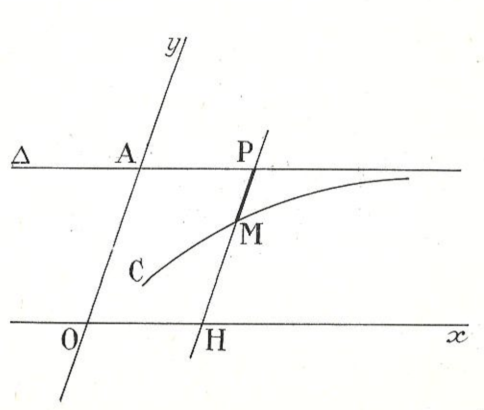


Fig. 1163 b.

la position est celle de la figure (1163, *b*). Pour le tableau :

x		$+\infty$
y	a	↘

la position de la courbe est celle de la figure (1163 *c*). Enfin pour le tableau :

x	$-\infty$	
y	a	↗

c'est celle de la figure (1163 *d*).

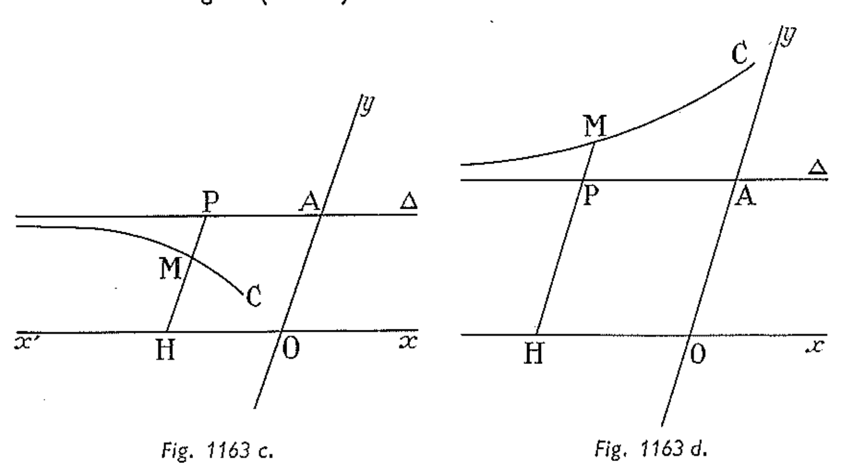


Fig. 1163 c. *Fig. 1163 d.*

2° Si lorsque x tend vers une valeur finie a, $f(x)$ tend vers l'infini, on dit que *la droite* Δ *d'équation* $x = a$ *est asymptote à la courbe C.*

On coupe C, Δ, et $y'Oy$ par une parallèle à $x'Ox$, d'équation $y = u$, u étant un paramètre; soient M, P, H les points d'intersection (fig. 1163 e).

On a :

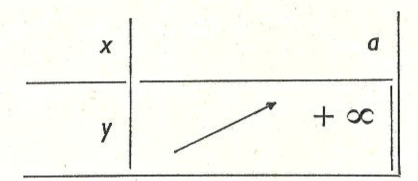
$$\overline{\text{PM}} = x - a$$

D'où :

$$\lim_{x=a} \text{PM} = 0$$

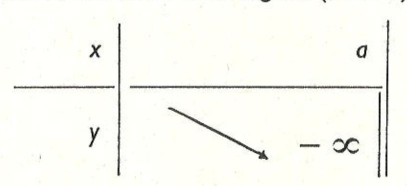
L'étude des variations de f permet de préciser la position de C par rapport à l'asymptote Δ.

Si les variations sont résumées dans le tableau suivant :



x		a
y	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

la position de la courbe est celle de la figure (1163 e). Pour le tableau :



x		a
y	$\searrow$	$-\infty$ ‖

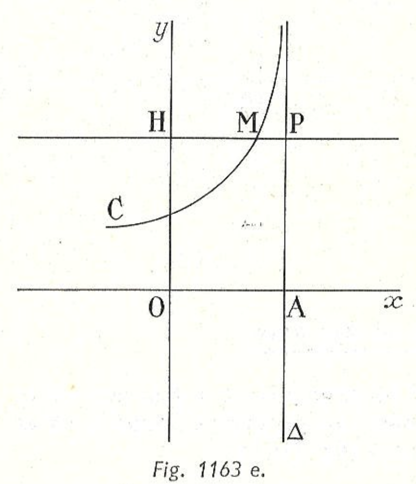


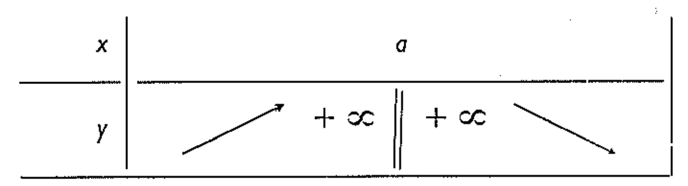
Fig. 1163 e.

Fig. 1163 f.

a position est celle de la figure (1163 f). Pour le tableau :

x		a		
y	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	$-\infty$	$\nearrow$

on a la figure (1163 *g*). Pour le tableau :



x		a	
y	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘

on a la figure 1163 *h*.

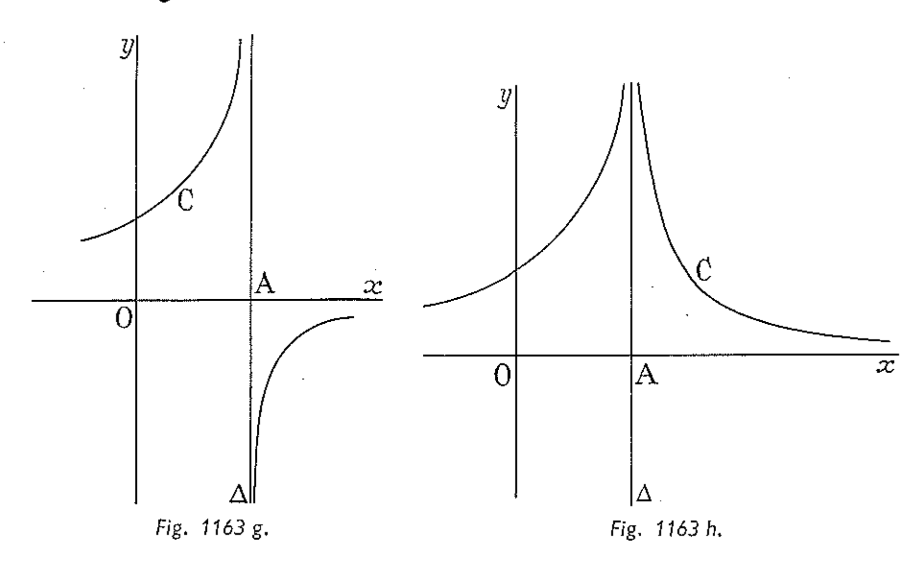


Fig. 1163 g. *Fig. 1163 h.*

1164. Asymptote non parallèle à un des axes.

1° Soit la courbe C, une droite Δ d'équation $y = ax + b$ (a non nul et fini). La droite d'équation $x = u$, u étant un paramètre coupe C, Δ et $x'Ox$ en M, P, H respectivement, et on a (fig. 1164 a). :

$$\overline{HM} = f(x).$$
$$\overline{HP} = ax + b.$$

D'où :

$$\overline{PM} = f(x) - [ax + b]$$

Si lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), $\overline{PM}$ tend vers 0, on dit que la droite Δ est asymptote à la courbeC.

2° On doit avoir :

$$\lim_{x=+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

ou

$$\lim_{x=+\infty} [y - ax - b] = 0$$

ou

$$\lim_{x=+\infty} (y - ax) = b$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \left(\frac{y}{x} - a\right) = \lim_{x=+\infty} \frac{b}{x}$$

ou

$$\lim_{x=+\infty} \left(\frac{y}{x} - a\right) = 0$$

ou

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y}{x} = a$$

Donc :

$$\mathbf{a} = \lim_{x=+\infty} \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}} \qquad (1164;1)$$

$$\mathbf{b} = \lim_{x=+\infty} (\mathbf{y} - \mathbf{ax}) \qquad (1164;2)$$

On peut ainsi déterminer l'asymptote Δ.

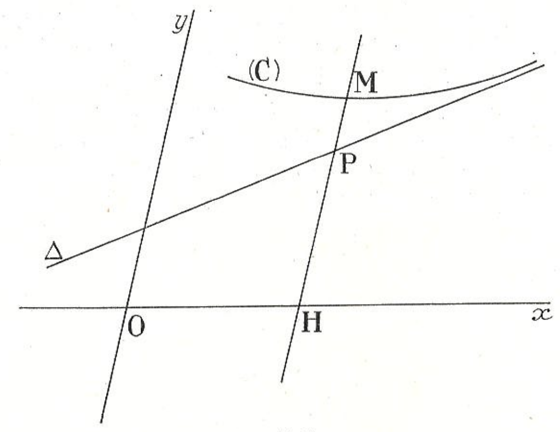


Fig. 1164 a.

3° Il est souvent avantageux pour la recherche des asymptotes de mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x)$ étant une fonction de x tendant vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

On considère la droite Δ d'équation $y = ax + b$; on a alors

$$\begin{aligned}\overline{PM} &= f(x) - (ax + b)\\ &= \varepsilon(x)\end{aligned}$$

et Δ est bien asymptote à la courbe C.

De plus le signe de $\varepsilon(x)$ dans un voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$) permet de préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1165. Marche à suivre pour l'étude d'une fonction.

Il est souvent commode d'étudier une fonction en utilisant le plan suivant :

1° *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction.* Généralement cet ensemble est un ou plusieurs intervalles.

2° *Calculer la dérivée et étudier son signe.*

3° *Partager l'ensemble de définition en intervalles* dans lesquels la fonction est définie, continue, dérivable, et dans chacun desquels la dérivée est constamment de même signe.

4° *Étudier la fonction pour toutes les bornes des intervalles* précédents, y compris, éventuellement, les bornes infinies.

5° *Résumer les résultats obtenus dans un tableau de variation*, comprenant trois lignes : une ligne pour la variable x; une ligne pour l'étude du signe de la dérivée y et une ligne pour les variations de la fonction y.

6° *Tracer la courbe représentative*, lorsque la question est posée. Elle fournit un aperçu concret intéressant sur les variations.

Le cas échéant, il y a lieu de rechercher les asymptotes et les particularités de la courbe représentative.

CHAPITRE LXXXV

FONCTIONS ALGÉBRIQUES

1166. Fonctions polynomiales du troisième degré.

On considère la fonction f de la forme

$$f: \quad x \in R \longrightarrow y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (a \neq 0)$$

Cette fonction est définie, continue et dérivable dans $]-\infty; +\infty[$.

Sa dérivée première est :

$$y' = 3\,ax^2 + 2\,bx + c$$

et sa dérivée seconde est :

$$y'' = 6\,ax + 2\,b$$

La dérivée seconde s'annule pour $x = -\dfrac{b}{3\,a}$; la valeur correspondante de la fonction est

$$f\left(-\frac{b}{3a}\right) = H = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}$$

et la valeur correspondante de la dérivée est :

$$f'\left(-\frac{b}{3a}\right) = p = \frac{3\,ac - b^2}{3\,a}$$

Le discriminant réduit de la fonction

$$3\,ax^2 + 2\,bx + c \quad \text{est} \quad \Delta' = b^2 - 3\,ac.$$

1° $\Delta' = b^2 - 3\,ac < 0$.

Si $\Delta' = b^2 - 3\,ac$ est négatif, la dérivée $y' = 3\,ax^2 + 2\,bx + c$ garde un signe constant, celui du coefficient a. La fonction est donc monotone croissante ou monotone décroissante suivant le signe de a.

Les variations sont résumées dans les tableaux suivants :

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$
y'		$+$	p	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	H	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$
y'		$-$	p	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	H	$\searrow$	$-\infty$

La courbe a la forme de la courbe de la figure (1166 *a*). Le point

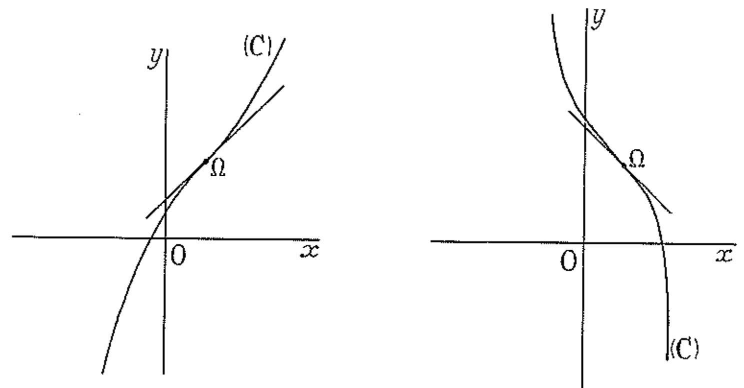


Fig. 1166 a.

$\Omega\left(-\frac{b}{3a}; \mathrm{H}\right)$ est un point d'inflexion; le coefficient directeur de la tangente inflexionnelle est p.

2° $\Delta' = b^2 - 3ac = 0$.

Si $\Delta' = b^2 - 3ac$ est nul, la dérivée $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ s'annule pour $x = -\dfrac{b}{3a}$; pour les autres valeurs de x, elle a le signe du coefficient a.

Les variations sont résumées dans les tableaux suivants :

	x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{3a}$		$+\infty$
$a > 0$	y'		$+$	0	$+$	
	y	$-\infty$	$\nearrow$	H	$\nearrow$	$+\infty$

	x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{3a}$		$+\infty$
$a < 0$	y'		$-$	0	$-$	
	y	$+\infty$	$\searrow$	H	$\searrow$	$+\infty$

La figure (1166 *b*) donne les formes possibles de la courbe représentative.

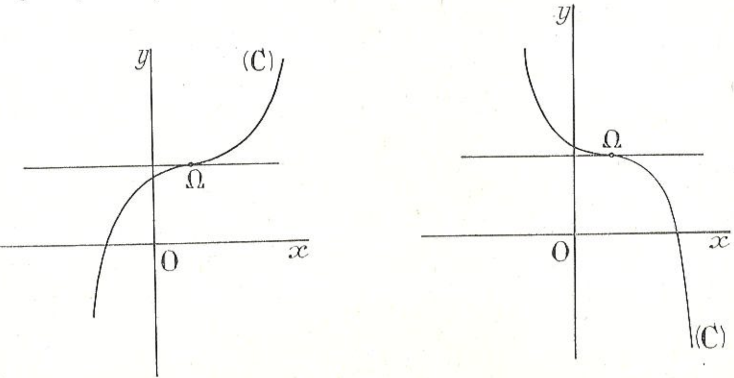


Fig. 1166 b.

Le point $\Omega\left(-\frac{b}{3a}; \text{H}\right)$ est un point d'inflexion à tangente parallèle à $x'Ox$.

3° $\Delta' = b^2 - 3\,ac > 0$.

Si $\Delta' = b^2 - 3\,ac$ est positif, y' s'annule pour deux valeurs distinctes α et β. Les tableaux de variation sont les suivants :

	x	$-\infty$		α		$-\frac{b}{3a}$		β		$-\infty$
$a > 0$	y'		$+$	0	$-$	p	$-$	0	$+$	
	y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	H	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

	x	$-\infty$		α		$-\frac{b}{3a}$		β		$+\infty$
$a < 0$	y'		$-$	0	$+$	p	$+$	0	$-$	
	y	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	H	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

La figure (1166 *c*) donne les formes possibles de la courbe représentative. Le point $\Omega\left(-\frac{b}{3a}; \text{H}\right)$ est encore un point d'inflexion.

Remarque.

On considère le point $\Omega\left(-\frac{b}{3a}; \text{H}\right)$ et on fait une translation des axes de vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$; les formules de translation sont :

$$\begin{cases} x = X + \lambda \\ y = Y + H \end{cases} \qquad \left(\lambda = -\frac{b}{3a}\right)$$

et $y = f(x)$ prend la forme canonique (cf. n° 695; 2°) :

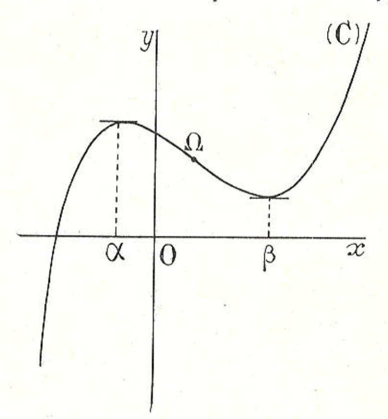
$$Y + H = aX^3 + pX + H$$

ou

$$Y = aX^3 + pX$$

avec $p = \dfrac{3ac - b^2}{3a}$.

Cette forme canonique montre que, dans tous les cas, le point Ω est un centre de symétrie et un point d'inflexion de la courbe.



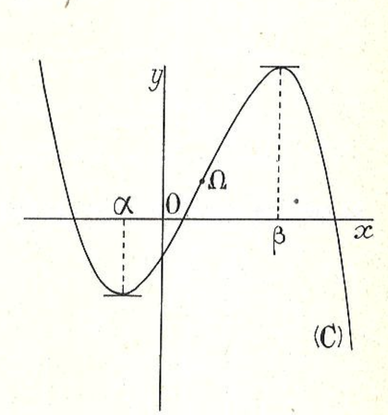


Fig. 1166 c.

Évidemment, le rapport $\dfrac{y}{x} = ax^2 + bx + c + \dfrac{d}{x}$ tend vers ∞ si x tend vers $\pm \infty$; il n'y a donc pas d'asymptote.

1167. Exemples.

◇ *Exemple 1. — Étudier la fonction*

f : $\quad x \in R \longrightarrow y = f(x) = x^3 - x^2 + 2x.$

L'ensemble de définition est $R =]-\infty; +\infty[$.

La dérivée est :

$$y' = 3x^2 - 2x + 2$$

Le discriminant du trinôme $3x^2 - 2x + 2$ est $\Delta' = -5$; il est négatif; la fonction est donc monotone décroissante.

La dérivée seconde est :

$$y'' = 6x - 2$$

Elle s'annule pour $x = \frac{1}{3}$; on a $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$ et $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y'		$+$	$\frac{5}{3}$	$+$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{16}{27}$	↗	$+\infty$

La courbe représentative est donnée à la figure n° (1167 *a*). Cette courbe

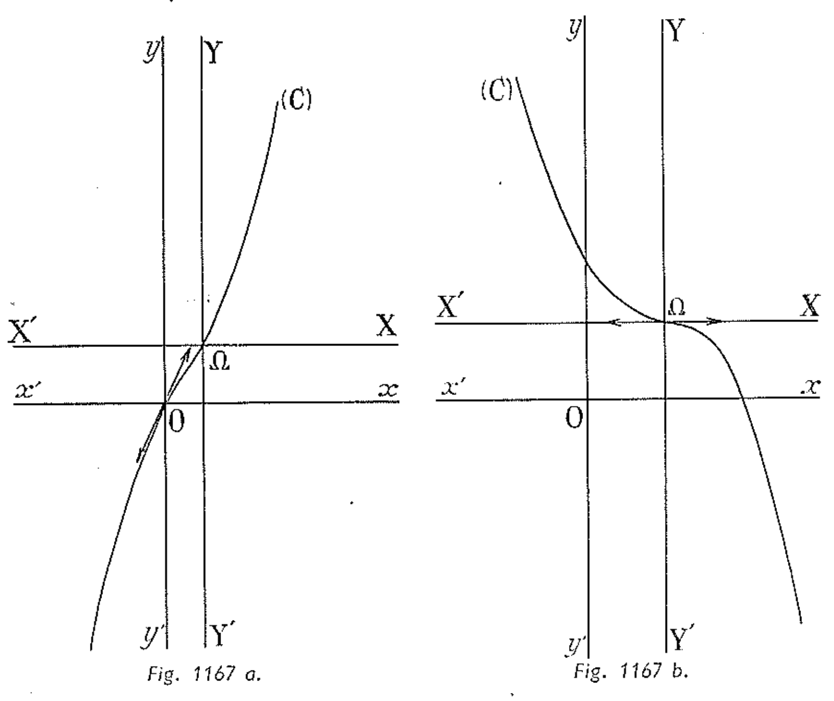


Fig. 1167 a. *Fig. 1167 b.*

coupe l'axe $x'Ox$ en O. La courbe rapportée aux axes (ΩX; ΩY) a pour équation $Y = X^3 + \frac{5}{3} X$.

◇ *Exemple 2. — Étudier la fonction* f :

$$x \longrightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2.$$

L'ensemble de définition est R.

La dérivée est :

$$\begin{aligned} y' &= -3x^2 + 6x - 3 \\ &= -3(x-1)^2 \end{aligned}$$

La dérivée seconde est :

$$\begin{aligned} y'' &= -6x + 6 \\ &= -6(x-1) \end{aligned}$$

Elle s'annule pour $x = 1$; alors $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↘	$-\infty$

La courbe représentative est celle de la figure nº 1167 *b*. La courbe représentative rapportée aux axes $(\Omega X; \Omega Y)$ a pour équation $Y = -X^3$.

◇ *Exemple 3. — Étudier la fonction* $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$.

L'ensemble de définition est R.

La dérivée est :

$$\begin{aligned} y' &= 12x^2 - 12x \\ &= 12x(x-1) \end{aligned}$$

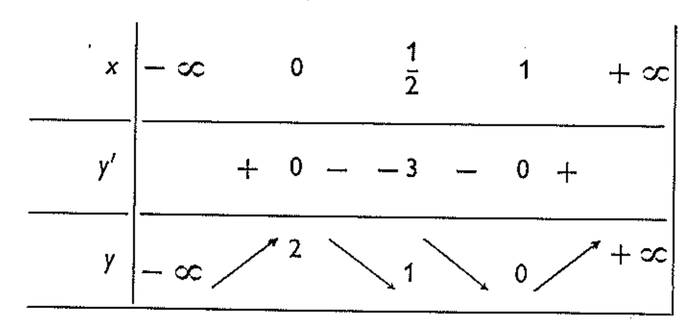
Elle s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$; et on a $f(0) = 2$ et $f(1) = 0$.

La dérivée seconde est :

$$\begin{aligned} y'' &= 24x - 12 \\ &= 12(2x-1) \end{aligned}$$

Elle s'annule pour $x = \frac{1}{2}$; et alors $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -3$.

D'où le tableau de variation :



x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	1	↘	0	↗	$+\infty$

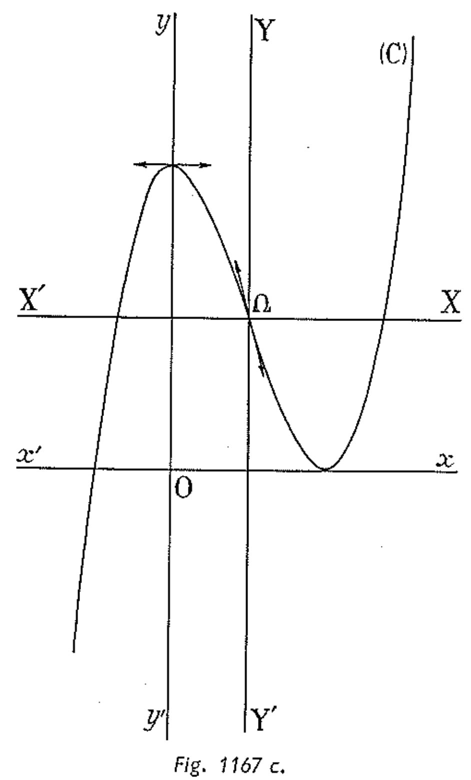


Fig. 1167 c.

La courbe représentative est celle de la figure n° (1167 *c*). L'équation réduite est $Y = 4X^3 - 3X$.

1168. Fonctions $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

On considère la fonction :

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \qquad (a' \neq 0)$$

On suppose que a' n'est pas nul, et que la fonction est irréductible.

Si $\Delta = b'^2 - 4a'c'$ est positif, le trinôme $a'x^2 + b'x + c'$ a deux zéros distincts α et β : la fonction a deux pôles α et β. L'ensemble de définition est $R - \{\alpha; \beta\}$.

Si $\Delta = b'^2 - 4a'c'$ est nul, la fonction a un pôle double α; et l'ensemble de définition est $R - \{\alpha\}$.

Si $\Delta = b'^2 - 4a'c'$ est négatif, le dénominateur n'a pas de zéro; et l'ensemble de définition est R.

Dans tous les cas, on a :

$$\lim_{x=+\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} = \frac{a}{a'}$$

et toutes les courbes représentatives admettent la droite d'équation $y = \dfrac{a}{a'}$ pour asymptote parallèle à $x'Ox$.

Remarques.

1° Pour calculer la dérivée, il peut être intéressant de faire la division du numérateur par le dénominateur.

2° L'équation de la courbe est $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$; elle peut s'écrire :

$$y(a'x^2 + b'x + c') - (ax^2 + bx + c) = 0.$$

La courbe est une courbe algébrique du 3e degré, c'est-à-dire une cubique. La translation $t_{\overrightarrow{O\Omega}}$ avec $\Omega\left(-\dfrac{b'}{2a'}; \dfrac{a}{a'}\right)$ donne l'équation réduite $Y = \dfrac{AX + B}{X^2 + K}$.

1169. Exemples.

◇ *Exemple 1. — Étudier la fonction*

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow y = f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}.$$

Le dénominateur s'annule pour $\alpha = 2$ et $\beta = 4$. L'ensemble de définition est donc $R - \{2;\ 4\}$.

La dérivée y' est :

$$y' = 2 \cdot \frac{-x^2 + 5x - 7}{(x-2)^2\,(x-4)^2}$$

Le trinôme $-x^2 + 5x - 7$ n'a pas de zéro; et il est toujours négatif.
Si x tend vers $\pm\infty$, $f(x)$ tend vers 1.
Lorsque x tend vers 2 ou 4, $|f(x)|$ tend vers $+\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

La courbe représentative est donnée sur la figure n° (1169 *a*).

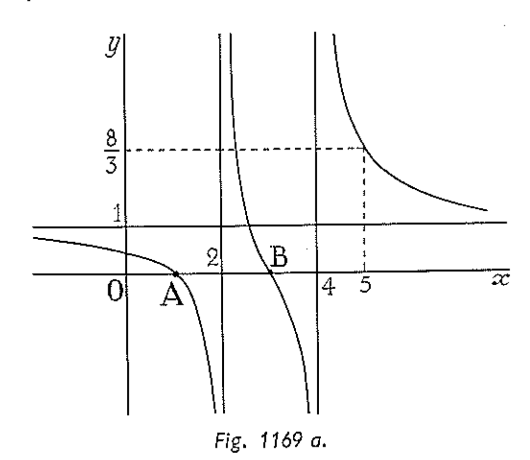


Fig. 1169 a.

La courbe a une asymptote parallèle à $x'Ox$ ayant pour équation $y = 1$, et deux asymptotes parallèles à $y'Oy$, ayant pour équations $x = 2$ et $x = 4$.

La courbe coupe l'axe $x'Ox$ en A (1; 0) et B (3; 0); et coupe l'axe $y'Oy$ en C $\left(0; \frac{3}{8}\right)$. Elle coupe aussi son asymptote parallèle à $x'Ox$ en un point dont l'abscisse est donnée par l'équation $f(x) = \frac{a}{a'}$, c'est-à-dire :

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8} = 1$$

ou

$$-4x + 3 = -6x + 8$$

ou

$$2x = 5$$

ou

$$x = \frac{5}{2}.$$

◇ *Exemple 2. — Étudier la fonction* $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}$.

Le dénominateur s'annule pour $\alpha = -1$ et $\beta = 2$. L'ensemble de définition est $R - \{-1; 2\}$.

La dérivée est :

$$y' = -\frac{2x(x+4)}{(x^2 - x - 2)^2}$$

et elle s'annule pour $x = 0$ et $x = -4$; ou $f(0) = -1$ et $f(-4) = \frac{7}{9}$.

Si x tend vers $\pm \infty$, $f(x)$ tend vers 1.

Lorsque x tend vers -1 ou vers 2, $|f(x)|$ tend vers $+\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-4		-1		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$\frac{7}{9}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

La courbe représentative est celle de la figure n° 1169 *b*.

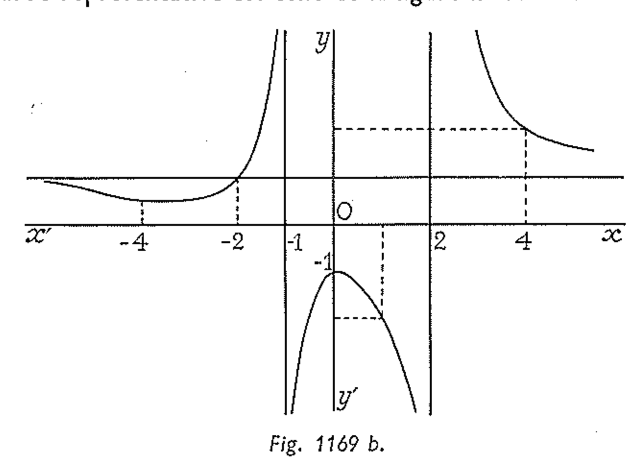


Fig. 1169 b.

◇ *Exemple 3. — Étudier la fonction* $f(x) = -\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 2)^2}$.

Le dénominateur s'annule pour $\alpha = 2$. L'ensemble de définition est donc $R - \{2\}$.

La dérivée est

$$y' = \frac{2(x - 5)}{(x - 2)^3}.$$

Elle a le signe de $(x - 2)(x - 5)$, et change de signe pour $x = 2$ et $x = 5$; on a $f(5) = -\frac{4}{3}$.

Si x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers -1.
Si x tend vers 2, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		+	‖	−	0	+	
y	-1	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{4}{3}$	↗	-1

La courbe représentative est celle de la figure n° (1169 *c*).

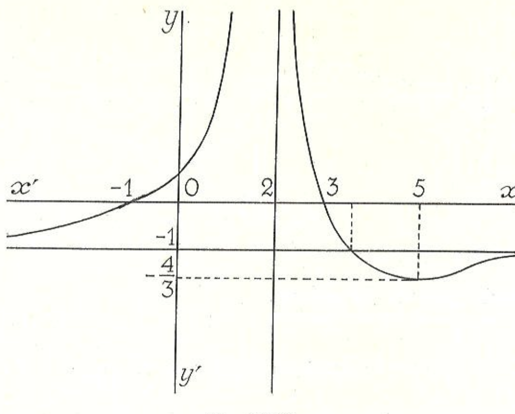


Fig. 1169 c.

◇ *Exemple 4. — Étudier la fonction* $y = \frac{-x}{x^2 - x + 1}$.

Le dénominateur ne s'annule pas; l'ensemble de définition est R.

La dérivée est

$$y' = \frac{x^2 - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

qui s'annule pour $x = +1$ et $x = -1$; on a $f(-1) = \frac{1}{3}$ et $f(1) = 1$.

Lorsque x tend vers $\pm \infty$, $f(x)$ tend vers 0.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	-1	↗	0

La courbe représentative est celle de la figure n° (1169 *d*).

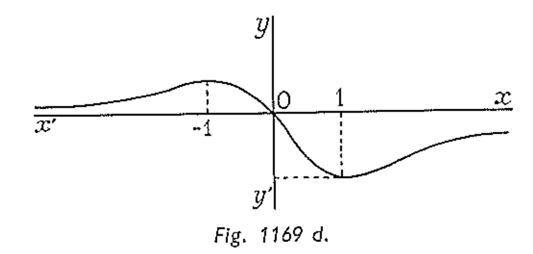


Fig. 1169 d.

1170. Quelques autres courbes.

◇ *Exemple 1. — Étudier la fonction* $f(x) = x + \frac{1}{2x^2}$.

Cette fonction est définie dans $R - \{0\}$.

La dérivée est

$$y' = 1 - \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{x^3}$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

Elle a le signe de $x(x-1)$, et change de signe pour $x = 0$ et $x = 1$.
Si x tend vers $\pm\infty$, $f(x)$ tend vers $\pm\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

La courbe a une branche infinie; l'équation $y = x + \frac{1}{2x^2}$ montre que $y = x$ est une asymptote oblique (cf. n° 1164; 3°).

La courbe est celle de la figure (1170 *a*).

◇ *Exemple 2. — Étude de la fonction* $x \to y = f(x) = 125\,x^3\,(x-1)^2$.

Cette fonction est définie, continue et dérivable dans $(-\infty;\ +\infty)$.

Sa dérivée est :

$$y' = f'(x) = 125\,x^2\,(5\,x^2 - 8\,x + 3).$$

Elle s'annule pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = \frac{3}{5}$; on a :

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{108}{25}.$$

Lorsque x tend $\pm\infty$, l'image $f(x)$ tend vers $\pm\infty$.

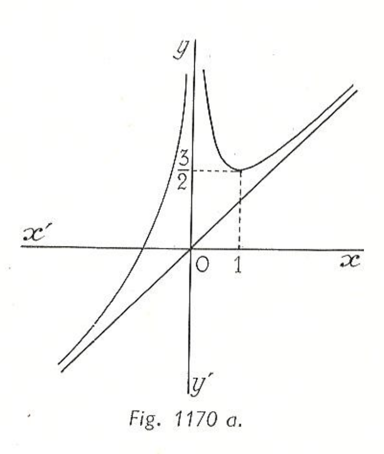


Fig. 1170 *a*.

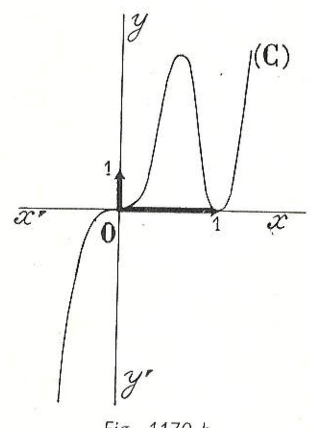


Fig. 1170 *b*.

On peut construire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{108}{25}$	↘	0	↗	$+\infty$

La courbe représentative (C) se construit facilement (fig. 1170 *b*).

◇ *Exemple 3. — Etudier la fonction* $f : x \longrightarrow y = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$.

Cette fonction est définie, continue et dérivable pour toutes les valeurs de x.

Elle s'écrit :
$$y = x - \frac{x - 2}{x^2 + 1}.$$

Sa dérivée est :
$$y' = \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 4)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Elle s'annule et change de signe pour $x = 0$ et $x = 1$; et $f(0) = 2$, $f(1) = \frac{3}{2}$.

Lorsque x tend vers $\pm \infty$, y tend vers $\pm \infty$.

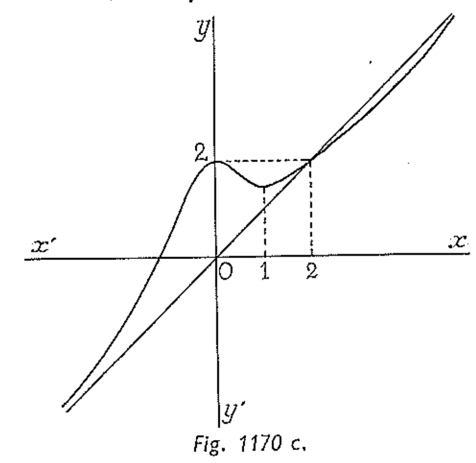


Fig. 1170 c.

Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

La courbe représentative est celle de la figure 1170 c. La droite $y = x$ est asymptote.

CHAPITRE LXXXVI

FONCTIONS CIRCULAIRES

1171. Périodicité.

1° ***On dit qu'une fonction f est périodique s'il existe, au moins, un nombre positif T tel que***

$$(\forall k)\ (k \in Z) : f(x + k \cdot T) = f(x)$$

On appelle période le plus petit des nombres T satisfaisant à la condition précédente.

2° Si une fonction est périodique, la courbe représentative est formée d'un nombre infini de parties se déduisant de l'une d'elles par des translations de vecteur $k.T.\vec{i}$ (fig. 1171 *a*).

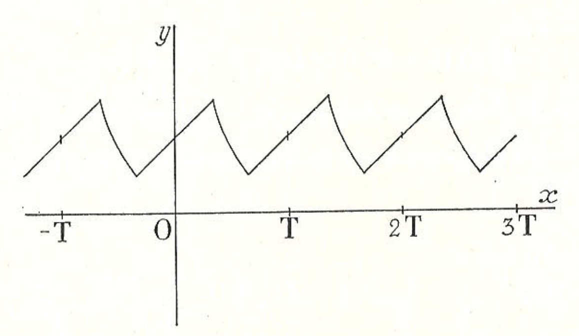


Fig. 1171 a.

Ainsi la fonction M est périodique de période T = 1 (fig. 1171 *b*).

3° *En conséquence, si une fonction est périodique, il suffit d'étudier cette fonction dans un intervalle d'amplitude T.*

Souvent des symétries permettent de restreindre encore l'intervalle d'étude.

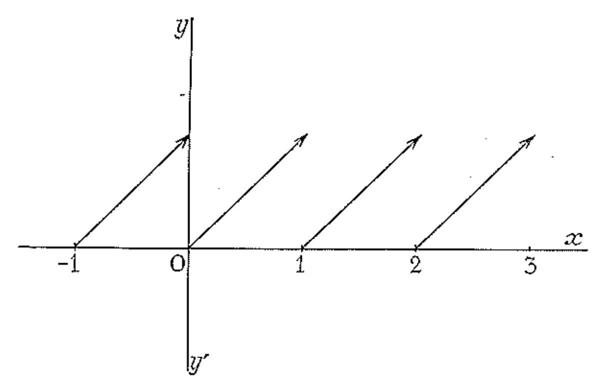


Fig. 1171 b.

1172. Fonction cosinus.

La fonction cosinus est définie par

cos : $x \in R \longrightarrow \cos x \in [-1 ; +1]$

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. L'ensemble de définition est R; l'ensemble des valeurs est $[-1; +1]$.

On a :

$$(\forall k)\ (k \in Z) : \cos(x + k \cdot 2\pi) = \cos x.$$

La fonction cosinus est périodique, et sa période est $T = 2\pi$.

La figure (1172 *a*) donne la courbe représentative; cette courbe s'appelle une sinusoïde.

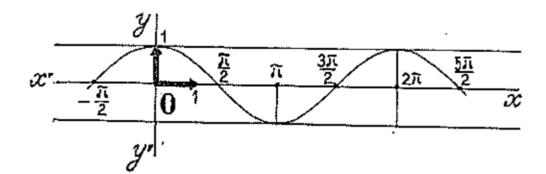


Fig. 1172 a.

Les droites d'équation $x = k\pi$ sont des axes de symétries; les points

de $x'Ox$ d'abscisse $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ sont des centres de symétries donc des points d'inflexion.

L'angle de Ox et des tangentes inflexionnelles est $\pm \frac{\pi}{2}$.

1173. Équation $\cos x = a$.

On considère la courbe (C) d'équation $y = \cos x$ et la droite (D) d'équation $y = a$. Les solutions de l'équation $\cos x = a$ sont les abscisses des points de l'intersection de (C) et (D).

D'où la discussion :

$a \notin [-1 ; +1]$ la droite (D) ne coupe pas la courbe (C) : l'équation n'a pas de solution (fig. 1173 *a*).

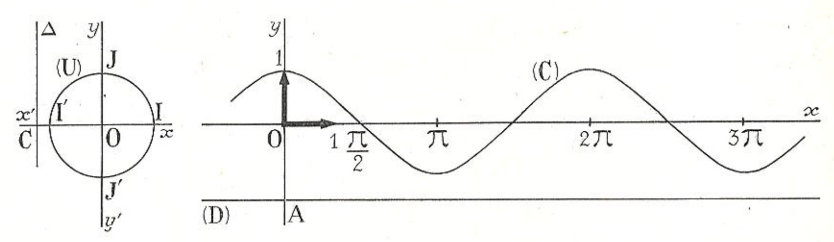


Fig. 1173 a.

$a = 1$; la droite (D) est tangente une infinité de fois à la courbe (C), et les points de contact ont pour abscisses $x = k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (fig. 1173 *b*).

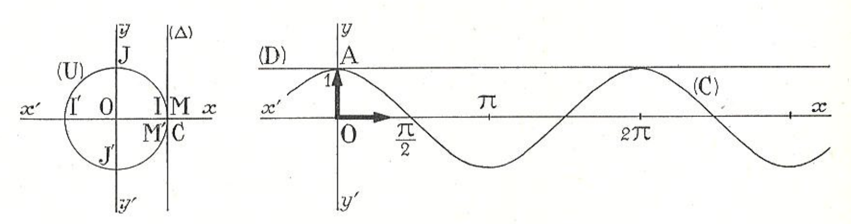


Fig. 1173 b.

$a = -1$, la droite (D) est tangente une infinité de fois à la courbe (C), et les points de contact ont pour abscisses $x = \pi + k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (fig. 1173 *c*).

$a \in]-1 ; +1[$, la droite (D) coupe la courbe (C) en une infinité de points.

Si α est l'abscisse du premier point d'intersection dans le demi-plan $x \geqslant 0$, les abscisses des autres points d'intersection sont

$$x = \alpha + k \cdot 2\pi$$

et $\qquad k \in z$

$$x = -\alpha + k \cdot 2\pi$$

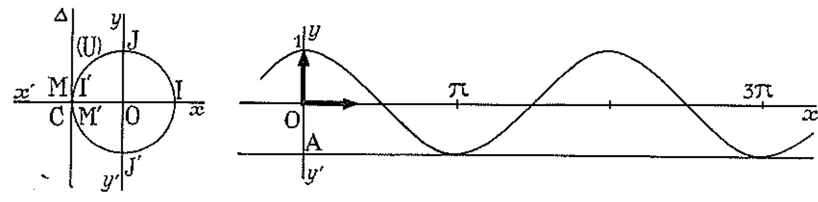


Fig. 1173 c.

α est la détermination principale (fig. 1173 *d*).

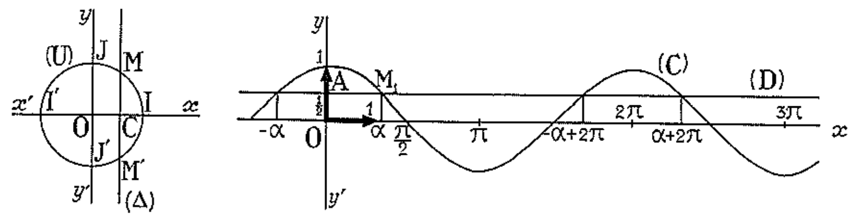


Fig. 1173 d.

Si $a = 0$, on a en particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et donc $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ (fig. 1173 *e*).

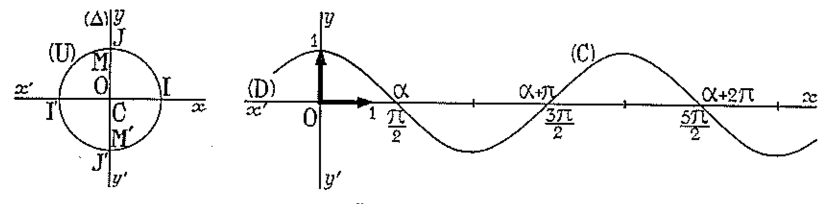


Fig. 1173 e.

◇ *Exemple. — Résoudre l'équation* cos $x = \frac{1}{2}$.

On sait que cos $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Les solutions de l'équation sont donc : (fig. 1173 *d*)

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

et

$$x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

1174. Fonction Arc cos x.

Soit la fonction cosinus :

$$f: \quad x \in \mathrm{R} \longrightarrow f(x) = \cos x.$$

$\overset{-1}{f}$ est une correspondance; en effet l'équation $\cos x = a$ a, en général, une infinité de solutions. La courbe représentative Γ de cette correspondance $\overset{-1}{f}$ s'obtient facilement par une symétrie pour la première bissectrice (axes orthonormés) (fig. 1174 *a*).

Il est intéressant de considérer la partie γ de la courbe Γ intérieure à la bande d'équation $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

γ définit une fonction (fig. 1174 *b*), en effet, à une valeur de x correspond au plus une valeur de y. Son ensemble de définition est $[-1; +1]$, et l'ensemble des valeurs est $[0; \pi]$.

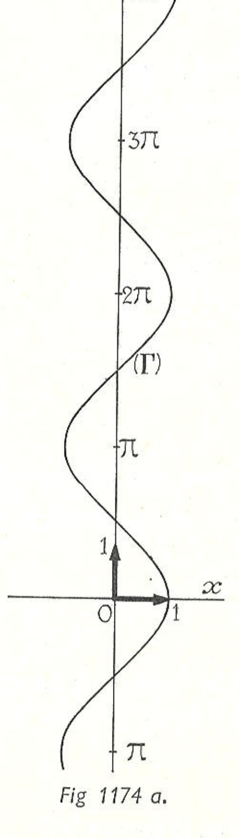


Fig 1174 a.

Fig. 1174 b.

On note :

$$y = \text{Arc} \cos x$$

Arc cos x est la détermination principale. Et :

Arc cos : $x \in [-1\,;+1] \longrightarrow \text{Arc} \cos x \in [0\,;\pi]$.

1175. Fonction sinus.

La fonction sinus est définie par

sin : $x \in R \longrightarrow \sin x \in [-1\,;+1]$.

Cette fonction est définie et continue quel que soit x. L'ensemble de définition est R, l'ensemble des valeurs est $[-1;+1]$.

On a :

$$(\forall k)\ (k \in Z) : \sin(x + k\cdot 2\pi) = \sin x.$$

La fonction sinus est périodique, et sa période est $T = 2\pi$.

La figure (1175 *a*) donne la courbe représentative; cette courbe est une sinusoïde.

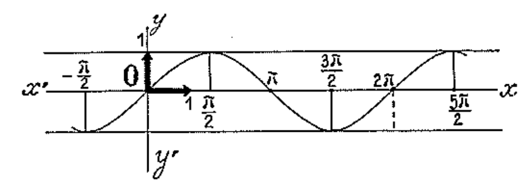


Fig. 1175 a.

Les droites d'équations $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ sont des axes de symétrie; les points de $x'Ox$ d'abscisses $x = k\cdot\pi$ sont des centres de symétrie, donc des points d'inflexion.

1176. Équation sin $x = a$.

On considère la courbe (C) d'équation $y = \sin x$ et la droite (D) d'équation $y = a$. Les solutions de l'équation $\sin x = a$ sont les abscisses des points de l'intersection de (C) et (D).

D'où la discussion :

$a \notin [-1;+1]$, la droite (D) ne coupe pas la courbe (C) : l'équation n'a pas de solution (fig. 1176 *a*).

$a = 1$, la droite (D) est tangente une infinité de fois à la courbe (C),

et les points de contact ont pour abscisses $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ($k \in Z$) (fig. 1176 *b*).

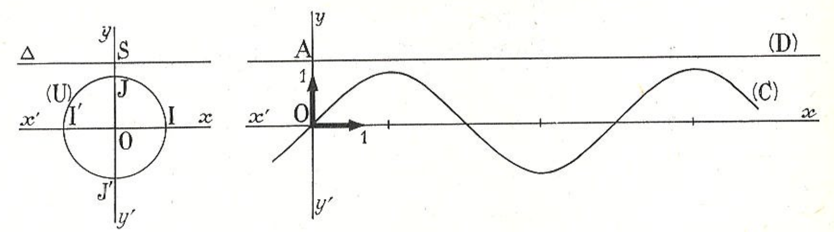


Fig. 1176 a.

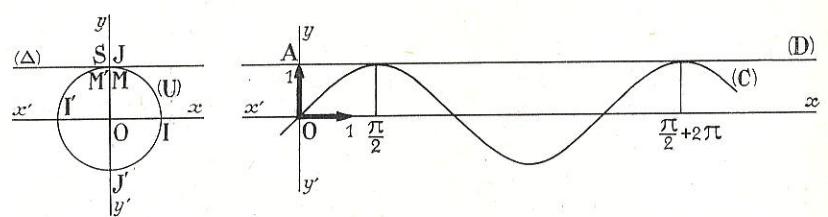


Fig. 1176 b.

$a = -1$, la droite (D) est tangente une infinité de fois à la courbe (C), et les points de contact ont pour abscisses $x = -\frac{\pi}{2} + k\ 2\pi$ ($k \in Z$) (fig. 1176 *c*).

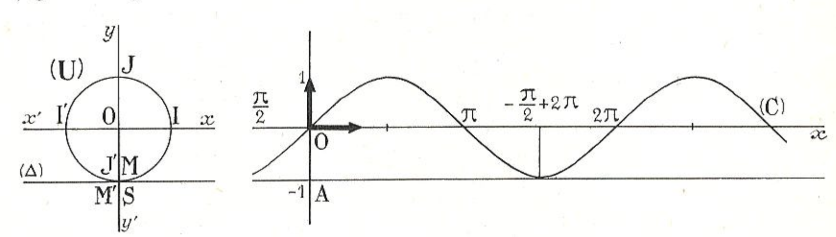


Fig. 1176 c.

$a \in]-1; 1[$, la droite (D) coupe la courbe (C) en une infinité de points. Si α est l'abscisse du point tel que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$, les abscisses des autres points d'intersection sont :

$$x = \alpha + k \cdot 2\pi$$

et

$$x = \pi - \alpha + k \cdot 2\pi$$

α est la détermination principale (fig. 1176 *d*).

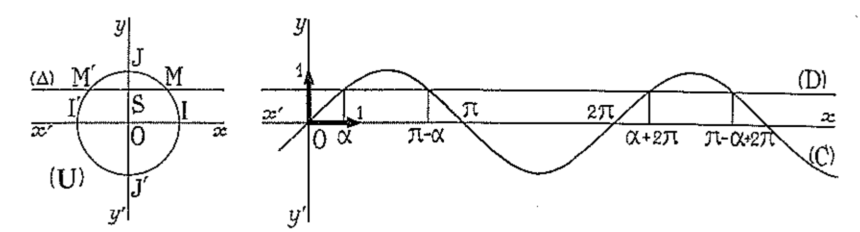


Fig. 1176 d.

Si $a = 0$, on a en particulier $\alpha = 0$ et $x = k \cdot \pi$ (fig. 1176 e).

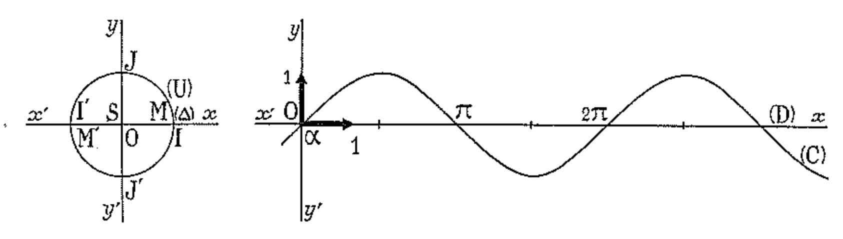


Fig. 1176 e.

◇ *Exemple. — Résoudre l'équation* $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

L'arc $x = \dfrac{\pi}{3}$ ayant pour sinus $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on a $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation sont donc :

$$x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

et $(k \in Z)$

$$x = \pi + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi.$$

1177. Fonction Arc sin x.

Soit la fonction :

f : $\quad x \in R \longrightarrow f(x) = \sin x.$

$\overset{-1}{f}$ est une correspondance; en effet l'équation $\sin x = a$ a, en général, une infinité de solutions. La courbe représentative Γ de cette correspon-

dance $\overset{-1}{f}$, s'obtient facilement par une symétrie pour la première bissectrice (Axes orthonormés) (fig. 1177 *a*).

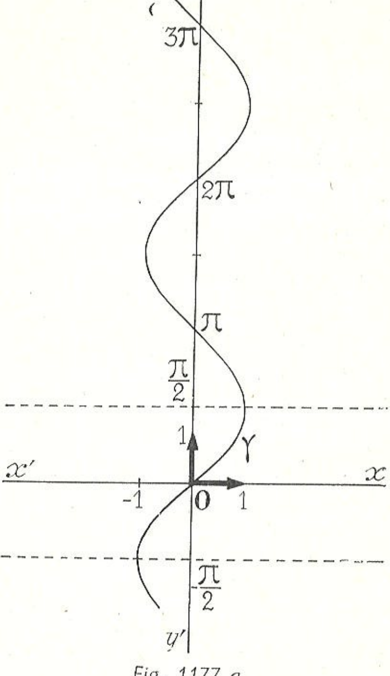


Fig. 1177 a.

Il est intéressant de considérer la partie γ de la courbe Γ intérieure à la bande d'équation $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$.

γ définit une fonction (fig. 1177 *b*); en effet à une valeur de x corres-

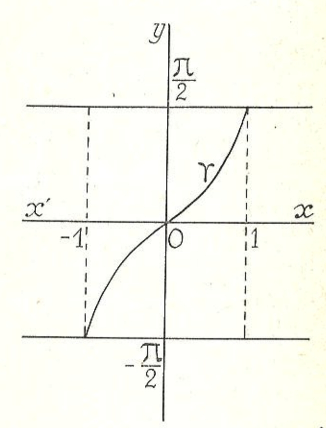


Fig. 1177 b.

pond au plus une valeur de y. Son ensemble de définition est $[-1; +1]$, et l'ensemble des valeurs est $\left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.

On note :

$$y = \text{Arc sin } x$$

Arc sin x est la détermination principale. Et :

Arc sin : $\quad x \in [-1; +1] \longrightarrow \text{Arc sin } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.

1178. Fonction tangente.

La fonction tangente est définie par :

tg : $\quad x \in R \longrightarrow \text{tg } x \in R$.

Cette fonction est définie et continue dans $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$. L'ensemble de définition est $R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, et l'ensemble des valeurs est R.

On a :

$$(\forall k)\ (k \in Z) : \text{tg}\ (x + k\cdot\pi) = \text{tg}\ x.$$

La fonction tangente est périodique; et sa période est π.

La figure (1178 *a*) donne la courbe représentative. Les points de $x'Ox$, d'abscisses $x = k\cdot\pi$ sont des centres de symétrie, donc des points d'inflexion.

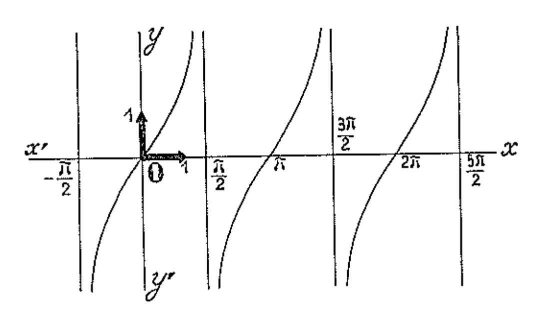


Fig. 1178 a.

1179. Équation tg $x = a$.

On considère la courbe (C) d'équation $y = \text{tg}\ x$ et la droite (D)

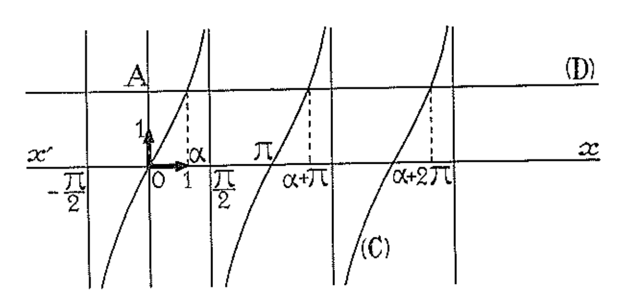


Fig. 1179 a.

d'équation $y = a$. Les solutions de l'équation tg $x = a$ sont les abscisses des points de l'intersection de (C) et (D) (fig. 1179 *a*).

La droite (D) coupe la courbe (C) en une infinité de points. Si α est l'abscisse du point d'intersection tel que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, on a :

$$x = \alpha + k \cdot \pi \qquad (k \in Z)$$

α est la détermination principale.

◇ *Exemple. — Résoudre l'équation* $tg\ x = \sqrt{3}$.

Sachant que $tg\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, on voit que l'équation admet la solution :

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \qquad (k \in Z)$$

118. Fonction Arc tg *x*.

Soit la fonction

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow f(x) = tg\ x.$$

$\overset{-1}{f}$ est une correspondance; en effet l'équation $tg\ x = a$ a, en général, une infinité de solutions. La courbe représentative Γ de cette correspondance f s'obtient facilement par une symétrie pour la première bissectrice (Axes orthonormés) (fig. 1180 *a*).

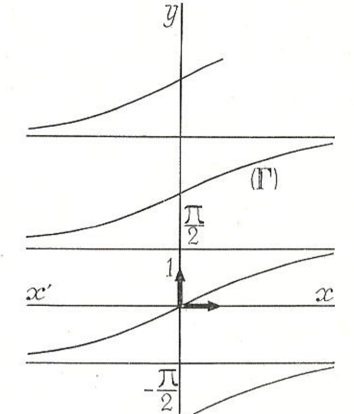


Fig. 1180 a.

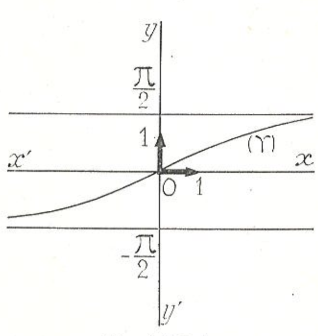


Fig. 1180 b.

Il est intéressant de considérer la partie γ de la courbe Γ intérieure à la bande d'équation $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{\pi}{2}$ (fig. 1180 *b*).

γ définit une fonction; en effet à une valeur de x correspond une valeur de y. On note :

$$y = \text{Arc tg } x$$

Arc tg x est la détermination principale. Et :

Arc tg : $\qquad x \in \mathrm{R} \longrightarrow \text{Arc tg } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right].$

1181. Fonction cotangente.

La fonction cotangente est définie par :

cotg : $\qquad x \in \mathrm{R} \longrightarrow \text{cotg } x \in \mathrm{R}.$

L'ensemble de définition est $\mathrm{R} - \{k\pi\}$; et l'ensemble des valeurs est R.

On a : $\qquad (\forall k)\ (k \in \mathrm{Z})\ \text{cotg}\,(x + k \cdot \pi) = \text{cotg } x$

La fonction cotangente est donc périodique, de période $\mathrm{T} = \pi$.
La figure (1181 *a*) donne la courbe représentative.

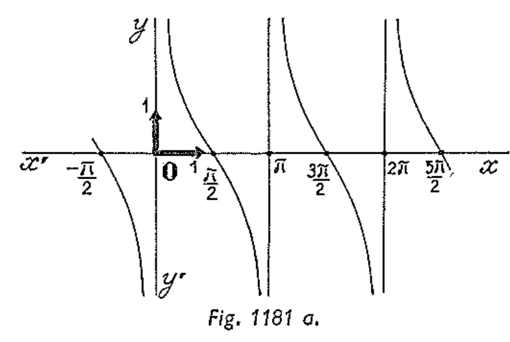


Fig. 1181 a.

1182. Équations trigonométriques.

◇ *Exemple 1. — Résoudre l'équation* $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Les deux arcs $2x - \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6} - x$ ayant le même sinus, on a :

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k \cdot 2\pi \qquad (1)$$

ou

$$2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x = \pi + k \cdot 2\pi \qquad (2)$$

De (1) on tire : $\qquad x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3}.$

De (2) on tire : $x = \frac{\pi}{6} + \pi + k \cdot 2\pi.$

◇ *Exemple 2.* — **Résoudre l'équation** $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

Les deux arcs $3x + \frac{\pi}{3}$ et $x - \frac{\pi}{6}$ ayant le même cosinus, on a :

$$3x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{6}, \qquad \text{mod } 2\pi \qquad (1)$$

ou

$$3x + \frac{\pi}{3} = -\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ mod } 2\pi \qquad (2)$$

De (1) on tire : $x = -\frac{\pi}{4}, \text{ mod } \pi$

De (2) on tire : $x = -\frac{\pi}{24}, \text{ mod } \frac{\pi}{2}.$

◇ *Exemple 3.* — **Résoudre l'équation** $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$

En remarquant que

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right).$$

L'équation s'écrit :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$$

D'où :

$$\frac{5\pi}{6} - 2x = 3x + \frac{\pi}{3}, \text{ mod } 2\pi \qquad (1)$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} - 2x = -\left(3x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ mod } 2\pi \qquad (2)$$

De (1) on tire : $x = \frac{\pi}{10}, \text{ mod } \frac{2\pi}{5}$

et de (2) on tire : $x = -\frac{7\pi}{6}, \text{ mod } 2\pi.$

◇ *Exemple 4. — Résoudre l'équation* $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Cette équation s'écrit :

$$\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{6}\right)$$

D'où :

$$3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{6}, \quad \text{mod } \pi$$

On tire :

$$x = \frac{\pi}{12}, \quad \text{mod } \frac{\pi}{4}.$$

◇ *Exemple 5. — Résoudre l'équation* $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$.

A l'aide du changement d'inconnue défini par :

$$\cos x = u$$

l'équation proposée s'écrit :

$$2u^2 + 3u - 2 = 0$$

Elle admet comme racines $u = -2$ et $u = \frac{1}{2}$. L'équation proposée est donc équivalente à la réunion des deux équations :

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} & (E_1) \\ \cos x = -2 & (E_2) \end{cases}$$

La première (E_1) admet pour solutions $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ et $x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$. La seconde (E_2) n'a pas de solutions.

◇ *Exemple 6. — Résoudre l'équation* $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \left(1 - \sqrt{3}\right) \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$.

Le changement d'inconnue $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$ fournit l'équation transformée :

$$u^2 + (1 - \sqrt{3})\, u - \sqrt{3} = 0.$$

On trouve aisément $u' = -1$ et $u'' = \sqrt{3}$. L'équation proposée est équivalente à la réunion des deux équations :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1 & (E_1) \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3} & (E_2) \end{cases}$$

En résolvant (E_1) on obtient :

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$$

ou

$$x = -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

Et en résolvant (E_2) on obtient :

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi$$

ou

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

En résumé l'équation proposée a pour solutions :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \end{cases}$$

◇ *Exemple 7. — Résoudre l'équation*

$$\cos x + \cos 3x - 2\cos 2x\cdot\cos 4x = 0.$$

L'idée générale est de transformer

$f(x) = \cos 3x + \cos x - 2\cos 2x\cdot\cos 4x$ en produit. Or :

$$\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x\cdot\cos x$$

et :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos 2x\cdot\cos x - 2\cos 2x\cdot\cos 4x \\ &= 2\cos 2x\,(\cos x - \cos 4x). \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = 0$ proposée est alors équivalente à la réunion des deux équations :

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 & (E_1) \\ \cos 4x = \cos x & (E_2) \end{cases}$$

L'équation (E_1) a pour solutions :

$$x = k\cdot\pi$$

L'équation (E_2) donne :

$$4x = x + k\cdot 2\pi$$
$$4x = -x + k\cdot 2\pi$$

d'où :

$$\begin{cases} x = k \cdot \frac{2\pi}{3} \\ x = k \cdot \frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation proposée sont donc :

$$\begin{cases} x = k \cdot \pi \\ x = k \cdot \frac{2\pi}{3} \\ x = k \cdot \frac{2\pi}{5} \end{cases}$$

1183. Fonctions trigonométriques.

◇ *Exemple 1. — Étudier la fonction* $f : x \to f(x) = 1 + \cos x$.

L'ensemble de définition est R; la fonction f est périodique de période $T = 2\pi$.

$f(-x) = f(x)$; donc la fonction est paire et l'axe $y'Oy$ est un axe de symétrie de la courbe représentative. Il suffit donc d'étudier la courbe dans $[0; \pi]$.

La dérivée est $y' = -\sin x$. D'où le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	0	$-$	-1	$-$	0
y	2	↘	1	↘	0

Soit I le point de coordonnées (0; 1); on fait la translation des axes de vecteur $\overrightarrow{OI}$; les formules de translation des axes sont

$$x = X$$
$$y = 1 + Y$$

D'où l'équation réduite

$$Y = \cos X$$

La courbe représentative (fig. 1183 *a*) est donc une sinusoïde.

◇ *Exemple 2. — Étudier la fonction* f : $x \longrightarrow f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

La fonction est définie dans R; son ensemble de valeurs est [— 1; + 1].

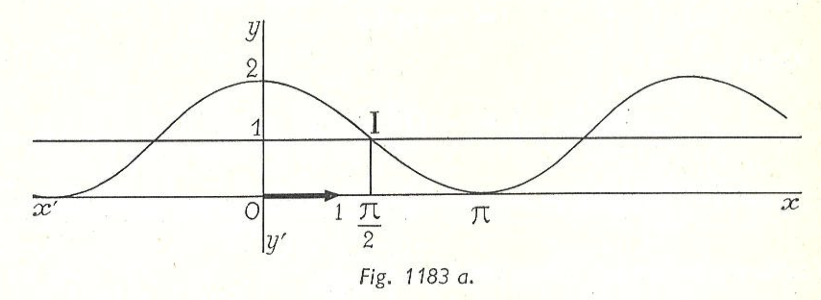


Fig. 1183 a.

La période s'obtient en remarquant que si $2x - \frac{\pi}{2}$ varie de 2π, x varie de π, et que par suite :

$$\cos\left[2(x + k\cdot\pi) - \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[2x + k\cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

La période est donc $T = \pi$.

La dérivée est

$$y' = -2\cdot\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

y' s'annule pour $2x - \frac{\pi}{2} = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{4} + k\cdot\frac{\pi}{2}$; et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

La dérivée seconde est

$$y'' = -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

y'' s'annule pour $2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{\pi}{2}$; et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

De plus, on a :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$
$$= \sin 2x$$

et

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$
$$= -\sin 2x$$

Donc :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

et le point I $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative. Il suffit donc d'étudier la fonction dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

De plus :

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos x$$

et

$$f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos x$$

Donc :

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

et la droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est un axe de symétrie. Il suffit donc d'étudier la fonction dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Le schéma suivant résume les remarques précédentes :

0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Étude directe	Symétrie Δ	Symétrie I	

On a alors immédiatement le tableau :

x	0		$\frac{\pi}{4}$
y'	2	$+$	0
y	0	↗	1

On effectue la translation des axes de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. Les formules de translation des axes sont :

$$x = \frac{\pi}{2} + \mathrm{X}$$
$$y = \mathrm{Y}$$

D'où :

$$\mathrm{Y} = \cos\left[2\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{X}\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{X}\right)$$

ou

$$\mathrm{Y} = \sin 2\mathrm{X}.$$

La courbe représentative (fig. 1183 *b*) est donc l'image de la sinusoïde

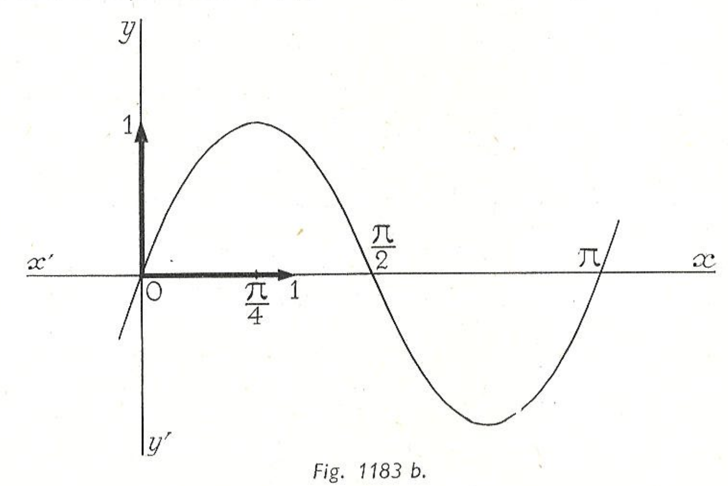


Fig. 1183 b.

d'équation $y = \sin x$, par l'affinité orthogonale d'axe $y'\mathrm{O}y$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

◇ *Exemple 3.* — *Étudier la fonction* f : x ⟶ f (x) = cos x − *sin* x + 1.

La fonction f est définie dans R; la période est T = 2π.

La dérivée est :

$$y' = -(\sin x + \cos x)$$
$$= -\cos x \cdot (1 + \operatorname{tg} x)$$

Elle s'annule pour $tg\ x = -1$, c'est-à-dire pour $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

On remarque alors que

$$f\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1$$
$$= -\sin x + \cos x + 1$$
$$= f(x)$$

Donc la droite Δ d'équation $x = \frac{3\pi}{4}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative; il suffit donc d'étudier la fonction dans un intervalle d'amplitude π, par exemple $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

La dérivée seconde est :

$$y'' = -\cos x + \sin x$$
$$= -\cos x \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$$

Elle s'annule pour $tg\ x = 1$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$. On a $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

On voit alors que :

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = 1.$$

ce qui montre que le point I $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ est un centre de symétrie de la courbe représentative. Il suffit donc finalement d'étudier la fonction dans $\left[-\frac{\pi}{4}; +\frac{\pi}{4}\right]$ et de tenir compte ensuite du schéma suivant :

$-\frac{\pi}{4}$	$+\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$
Étude directe	Symétrie I	Symétrie Δ	

On a alors :

x	$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$
y'	0	$-$	-1	$-$	$-\sqrt{2}$
y	$1+\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\searrow$	1

On effectue alors la translation des axes de vecteur $\overrightarrow{OI}$. Les formules de translation des axes sont

$$x = \frac{\pi}{4} + X$$
$$y = 1 + Y$$

D'où l'équation réduite :

$$1 + Y = \cos\left(\frac{\pi}{4} + X\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + X\right) + 1$$

ou

$$Y = -\sqrt{2} \cdot \sin X.$$

La courbe représentative est donc l'image d'une sinusoïde par une affinité d'axe D d'équation $y = 1$ et de rapport $-\sqrt{2}$ (fig. 1183 *c*).

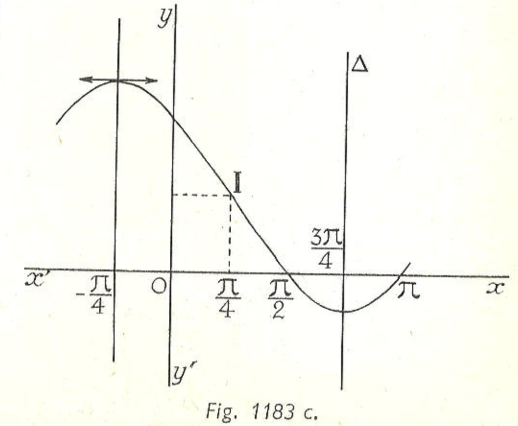


Fig. 1183 c.

◇ *Exemple 4. — Étudier la fonction* $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$.

La fonction f est définie dans R sauf pour les solutions de l'équation

$$1 - \sin x = 0$$

c'est-à-dire pour

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi.$$

La période est $T = 2\pi$.

La dérivée est :

$$y' = \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1 - \sin x)^2}.$$

La dérivée, comme la fonction, n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$. Elle s'annule et change de signe pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \pi$ (cf. exemple 3 précédent). Elle est négative dans $\left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$. D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
y'	2	$+$	‖	$-$	0	$+$	2
y	2	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗	2

La courbe représentative est donnée à la figure (1183 *d*)

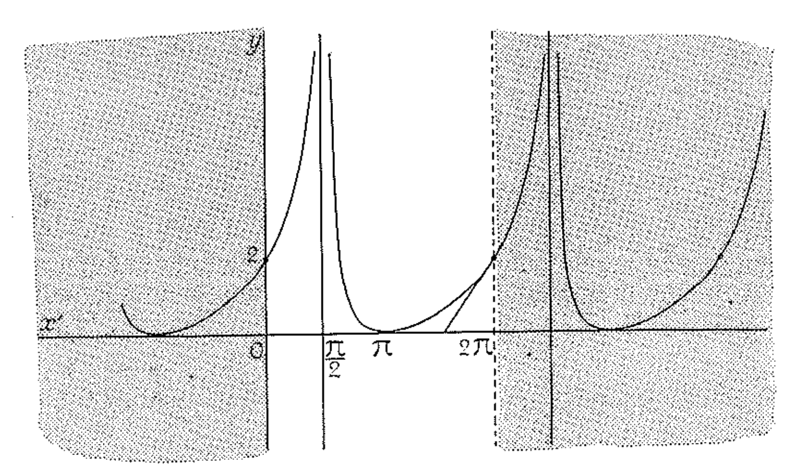


Fig. 1183 d.

◇ *Exemple 5. — Étudier la fonction* $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$.

On a :

$$y = \sin x \operatorname{tg} x$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$
$$= \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}$$

ou

$$y = \frac{1}{\cos x} - \cos x$$

La fonction est définie continue, dérivable dans R sauf pour les solutions de l'équation $\cos x = 0$, c'est-à-dire pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

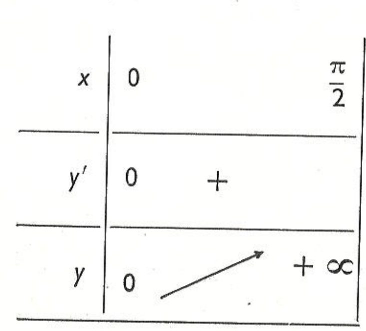
La période est $T = 2\pi$.

Les éléments de symétrie de la courbe représentative sont ceux de la courbe d'équation $y = \cos x$: les droites d'équation $x = k\pi$ sont des axes de symétrie et les points de l'axe $x'Ox$ ayant pour abscisses $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ sont des centres de symétrie. Il suffit donc d'étudier la fonction dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On a :

$$y' = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} + \sin x$$
$$= \sin x \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\right).$$

D'où le tableau de variation :



x	0		$\frac{\pi}{2}$
y'	0	$+$	
y	0	↗	$+\infty$

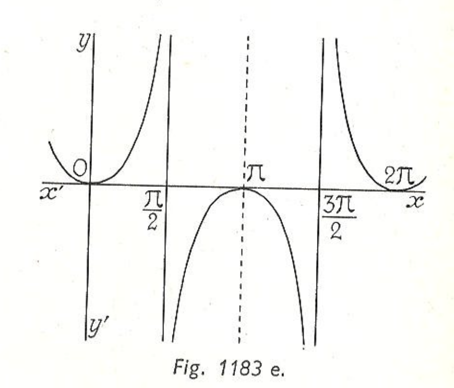


Fig. 1183 e.

La courbe représentative est celle de la figure (1183 c).

1184. Fonction $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

1° *Forme canonique de* $f(x) = a \cos x + b \sin x$.

La fonction $f : x \rightarrow f(x) = a \cos x + b \sin x$ est définie dans R; sa période est $T = 2\pi$.

On considère dans le plan métrique rapporté à une base orthonormée le point P $(a;\ b)$.

On pose :

$$\|\overrightarrow{OP}\| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overline{\text{angle}}\,(OX; \overrightarrow{OP}) = \varphi \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

D'où :

$$a = r \cos \varphi$$
$$b = r \sin \varphi.$$

Par suite :

$$a \cos x + b \sin x = r \cos \varphi \cos x + r \sin \varphi \sin x$$
$$= r[\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi]$$

et finalement

$$a \cos x + b \sin x = r \cdot \cos(x - \varphi) \qquad \mathbf{(1184; 1)}$$

2° *Fonction* $a \cos x + b \sin x + c$.

La mise sous forme canonique permet d'étudier les fonctions de la forme :

$$f(x) = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x + c$$

et

$$f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x + c$$

Les courbes représentatives se déduisent de la courbe d'équation $y = \cos x$ par des affinités d'axes Ox ou Oy et par une translation.

3° *Équation* $a \cos x + b \sin x = c$.

L'équation

$$a \cos x + b \sin x = c$$

s'écrit immédiatement

$$\cos(x - \varphi) = \frac{c}{r}.$$

Si $\left|\frac{c}{r}\right| \leqslant 1$, ou $c^2 \leqslant r^2$, ou $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, on a $\frac{c}{r} = \cos \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$ et :

$$x - \varphi = \alpha + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x - \varphi = -\alpha + k \cdot 2\pi$$

D'où la solution :

$$x = \varphi + \alpha, \text{ mod } 2\pi$$
$$x = \varphi - \alpha, \text{ mod } 2\pi$$

Si $\left|\frac{c}{r}\right| > 1$ ou $c^2 \geqslant a^2 + b^2$, l'équation n'a pas de solution.

4° Interprétation géométrique de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$.

On pose :

$$u = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x$$

L'équation $a \cos x + b \sin x = c$ équivaut alors au système à deux inconnues :

$$\begin{cases} a \cdot u + b \cdot v = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

qui s'interprète géométriquement.

Si dans le plan métrique $(Ou; Ov)$ orthonormé, on considère la droite Δ d'équation

$$a \cdot u + b \cdot v = c \qquad (\Delta)$$

et le cercle (U) d'équation

$$u^2 + v^2 = 1 \qquad (U)$$

u et v sont les coordonnées des points de $\Delta \cap U$ (fig. 1184 *a*).

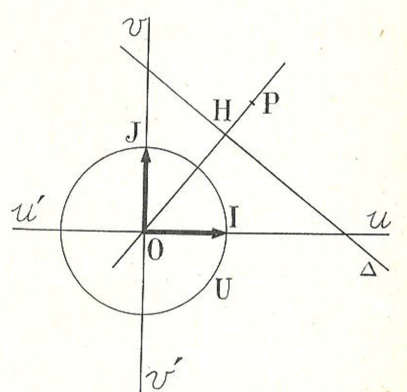


Fig. 1184 a.

La droite Δ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OP}$ $(a; b)$ en H; l'équation normale de Δ est

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot v = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou encore

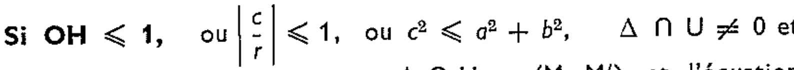
$$u \cdot \cos \varphi + v \sin \varphi = \frac{c}{r}$$

Donc :

$$\overline{OH} = \frac{c}{r}$$

D'où la discussion :

Si OH > 1, ou $\left|\frac{c}{r}\right| > 1$ ou $c^2 > a^2 + b^2$, $\Delta \cap U = \varnothing$ et l'équation n'a pas de solution (fig. 1184 *a*).


Si OH $\leqslant$ 1, ou $\left|\frac{c}{r}\right| \leqslant 1$, ou $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, $\Delta \cap U \neq 0$ et $\Delta \cap U = (M; M')$, et l'équation admet deux solutions, distinctes ou non (fig. 1184 *b*).

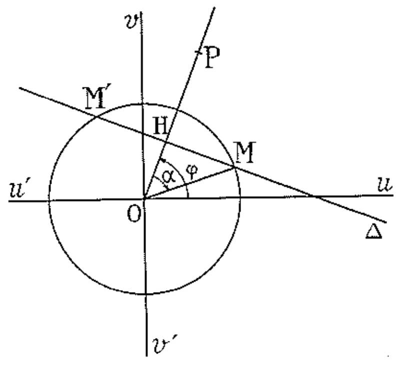


Fig. 1184 b.

On pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OP}\,;\overrightarrow{OM}) = \alpha$$

et on a :

$$\overline{OH} = OM \cdot \cos\alpha$$

ou

$$\frac{c}{r} = \cos\alpha$$

et alors :

$$x = \overline{\text{angle}}\,(Ou\,;\overrightarrow{OM})$$
$$= \overline{\text{angle}}\,(Ou\,;\overrightarrow{OP}) + \text{angle}\,(\overrightarrow{OP}\,;\overrightarrow{OM})$$

ou

$$x = \varphi + \alpha, \text{ mod } 2\pi$$

et

$$x = \overline{\text{angle}}\,(Ou\,;\overrightarrow{OM'})$$
$$= \text{angle}\,(Ou\,;\overrightarrow{OP}) + \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OP}\,;\overrightarrow{OM'})$$

ou

$$x = \varphi - \alpha, \text{ mod } 2\pi.$$

5° *Autre méthode de résolution de l'équation* $a\cos x + b\sin x = c$.

On pose :

$$t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$$

D'où :

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

L'équation, grâce à ce changement de variable, s'écrit :

$$a \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + b \cdot \frac{2t}{1 + t^2} = c$$

ou

$$(a + c)\,t^2 - 2bt + c - a = 0. \qquad (1184\,;\,2)$$

Le discriminant simplifié Δ' de cette équation est :

$$\Delta' = b^2 - (c + a)(c - a)$$
$$= a^2 + b^2 - c^2$$

Si $c^2 > a^2 + b^2$, Δ' est négatif et l'équation n'a pas de solution.

Si $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, Δ' est positif ou nul, et l'équation (1184; 2) admet deux solutions t' et t''. On est alors amené à résoudre les deux équations

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t' \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t''.$$

Remarque 1. Lorsque l'équation (1184; 2) a deux racines t' et t'', il est quelquefois intéressant de résoudre les équations

$$\sin x = \frac{2t'}{1 + t'^2}$$

et

$$\sin x = \frac{2 \cdot t''}{1 + t''^2}$$

Remarque 2. La méthode précédente (5°) est avantageuse lorsque les coefficients a et b sont paramétriques.

La méthode du 3° est avantageuse lorsque a et b sont numériques.

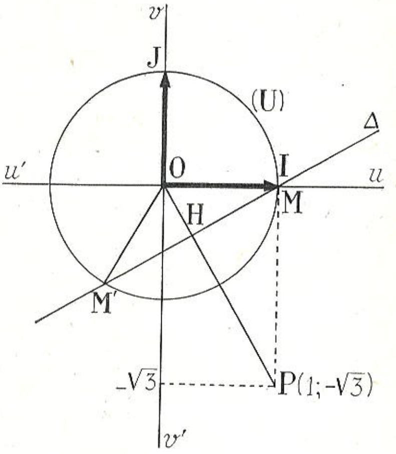


Fig. 1184 c.

◇ *Exemple. — Résoudre l'équation* $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$.

Le point P a pour coordonnées $(1; -\sqrt{3})$. Donc (fig. 1184 c)

$$r = OP = 2$$

et

$$\varphi = \overline{\text{angle}}\,(Ox; \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{3}$$

L'équation s'écrit :

$$2\left[\cos x \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin x \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1$$

ou

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

On obtient alors :

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$$

et la solution est :

$$x = 0, \text{ mod } 2\pi$$

ou

$$x = -\frac{2\pi}{3}, \text{ mod } 2\pi.$$

La figure (1184 c) donne l'interprétation géométrique.

1185. Inéquations trigonométriques à une inconnue.

1° On envisage ici les équations trigonométriques de la forme

$$f(\cos x; \sin x) > 0 \qquad (1185; 1)$$

Il est avantageux de poser :

$$u = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

L'équation est remplacée par le système

$$\begin{cases} f(u; v) > 0 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

$f(u; v) > 0$ est l'équation d'une surface Δ du plan; $u^2 + v^2 = 1$ est l'équation du cercle trigonométrique U.

Les abscisses curvilignes des points de $\Delta \cap U$ sont les solutions de l'inéquation.

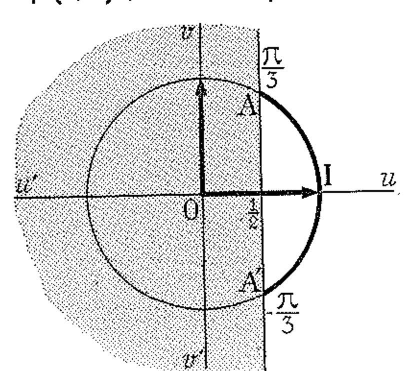


Fig. 1185 a.

◇ *Exemple 1. — Résoudre l'inéquation* $\cos x > \frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

L'équation équivaut au système :

$$\begin{cases} u > \frac{1}{2} & (\Delta) \\ u^2 + v^2 = 1 & (U) \end{cases}$$

L'intersection du demi-plan Δ et du cercle U est un arc de cercle A'IA (fig. 1185 *a*). Il est défini par $-\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{3}$.

La solution dans $[0;\, 2\pi]$ est donnée par le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
Inéquation		V		▨		V	

◇ *Exemple 2. — **Résoudre l'inéquation*** $\sin x < -\frac{1}{2}$.

L'équation équivaut au système :

$$\begin{cases} v < -\dfrac{1}{2} \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

La figure (1185 *b*) donne l'interprétation de ce système. Les points A′ et A ont pour abscisses curvilignes $\frac{7\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

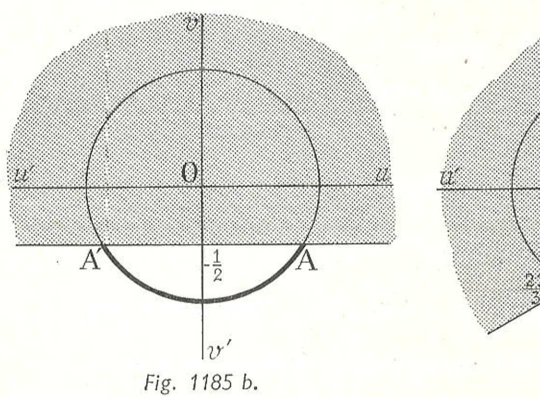


Fig. 1185 b.

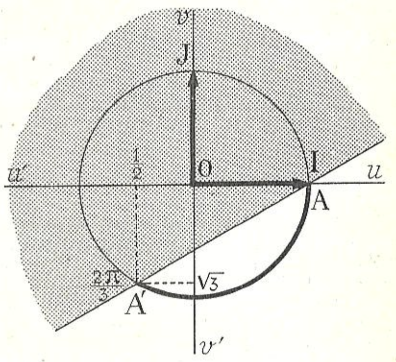


Fig. 1185 c.

D'où la solution, entre 0 et 2π,

x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
Inéquation		▨		V		▨	

◇ *Exemple 3. — Résoudre l'inéquation* $\cos x - \sqrt{3}\cdot \sin x > 1$.

L'inéquation équivaut au système

$$\begin{cases} u - v\sqrt{3} = 1 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

La figure (1185 c) donne l'interprétation de ce système.

La solution, dans $[0; 2\pi]$ est donnée par le tableau suivant :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	2π
Inéquation		V	

◇ *Exemple 4. — Résoudre l'inéquation*

$$2\sqrt{2}\cos^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos x - 1 > 0$$

L'inéquation équivaut au système :

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cdot u^2 + (2 - \sqrt{2})\, u - 1 > 0 \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Le trinôme $2\sqrt{2}\, u + (2 - \sqrt{2})\, u - 1$ a pour zéros $u = \frac{1}{2}$ et $u = -\frac{2}{\sqrt{2}}$, et se décompose :

$$2\sqrt{2}\, u^2 + (2 - \sqrt{2})\, u - 1 = (2u - 1)(u\sqrt{2} + 1).$$

La figure (1185 d) donne l'interprétation de ce système.

La solution est donnée par le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
Inéquation	V		V		V	

◇ *Exemple 5.* — *Résoudre l'inéquation* $\cos^2 x + \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$.

L'équation équivaut au système :

$$\begin{cases} u^2 + u > \frac{\sqrt{3}}{2} v & (\Delta) \\ u^2 + v^2 = 1 & (U) \end{cases}$$

La courbe d'équation $v \frac{\sqrt{3}}{2} = u^2 + u$ est une parabole qui coupe le cercle (U) aux points $(-1 ; 0)$ et $\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

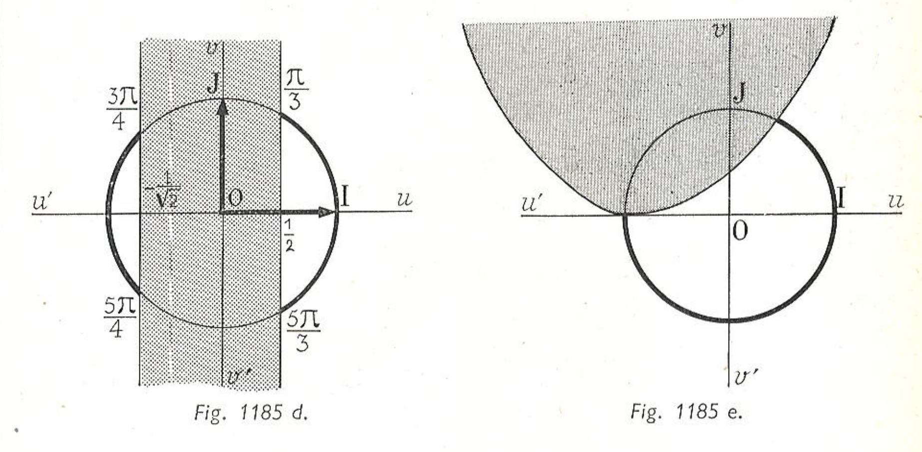


Fig. 1185 d. *Fig. 1185 e.*

D'où la figure (1185 e) qui donne l'interprétation du système.

La solution de l'inéquation est alors donnée par le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	2π
Inéquation	V	(hachuré)	V	

2° On peut envisager maintenant les inéquations de la forme

$$f(\text{tg } x) > 0$$

Il est avantageux de poser $t = \text{tg } x$; l'inéquation devient

$$f(t) > 0$$

Sur l'axe $t'It$, équipollent à $u'Ou$, on marque les solutions de cette inéquation; leurs projections centrales de centre O sur le cercle U donne les solutions de l'inéquation proposée.

◇ *Exemple 6.* — *Résoudre l'inéquation* tg $x > 1$.

Sur l'axe $t'It$ on marque le point T d'abscisse 1 : $\overline{IT} = 1$; sa projection centrale est le point A dont l'abscisse curviligne est $\frac{\pi}{4}$.

La figure (1185 *f*) donne l'interprétation graphique. Le tableau suivant donne alors la solution de l'inéquation proposée :

x'	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Inéquation		V		V		

◇ *Exemple 7.* — *Résoudre l'inéquation* $1 - \text{tg}^2 x < 0$.

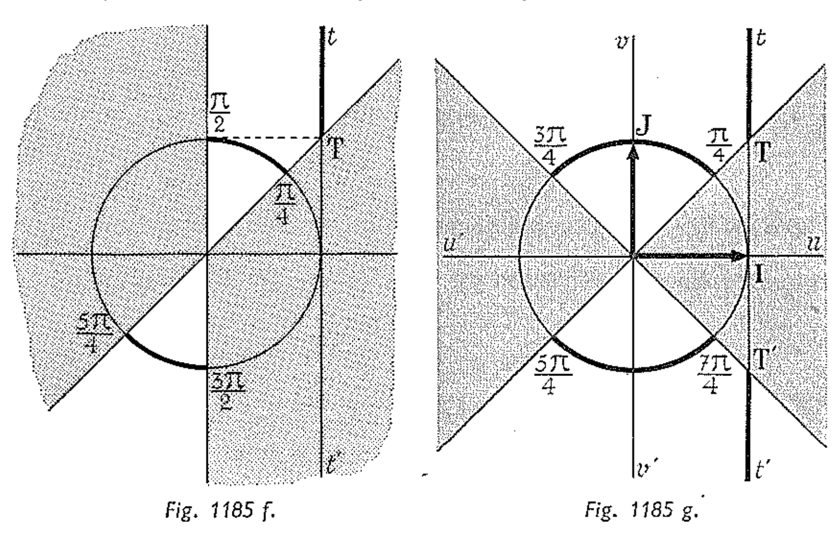


Fig. 1185 f. *Fig. 1185 g.*

En posant $t = \text{tg}\, x$, on a :

$$1 - t^2 < 0$$

On marque sur l'axe $t'It$, les points T et T' d'abscisses $+1$ et -1.

La figure (1185 g) donne l'interprétation graphique; et le tableau suivant donne alors la solution de l'inéquation proposée.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
Inéquation	//////	V	//////	V	//////	

1186. Fonction $a\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c.\sin^2 x$.

1° *Forme canonique.*

Soit la fonction

$$f(x) = a\cdot\cos^2 x + 2b\sin x\cos x + c\cdot\sin^2 x$$

On a :

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$$

$f(x)$ peut alors s'écrire :

$$f(x) = \frac{a}{2}(1 + \cos 2x) + b\sin 2x + \frac{c}{2}(1 - \cos 2x)$$

ou

$$f(x) = \frac{a-c}{2}\cdot\cos 2x + b\sin 2x + \frac{a+c}{2}$$

ou

$$f(x) = \mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x + \mathrm{C}$$

avec

$$\mathrm{A} = \frac{a-c}{2}, \qquad \mathrm{B} = b, \qquad \mathrm{C} = \frac{a+c}{2}.$$

D'après (1184; 1°) on a :

$$\mathrm{A}\cos 2x + \mathrm{B}\sin 2x = r\cdot\cos(2x - \varphi)$$

avec

$$r = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}$$

$$\mathrm{A} = r\cdot\cos\varphi$$

$$\mathrm{B} = r\cdot\sin\varphi.$$

D'où finalement

$$f(x) = r \cos(x - \varphi) + C.$$

2° *Équation* f(x) = d.

Une équation $f(x) = d$ s'écrit alors :

$$\cos(2x - \varphi) = \frac{d - C}{r}$$

dont la résolution et la discussion sont immédiates.

3° *Autre méthode de résolution.*

On peut utiliser aussi la méthode suivante :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}, \qquad \sin^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$$

$$= \frac{1}{1 + t^2} \qquad\qquad = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

et

$$2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$= \frac{2t}{1 + t^2}.$$

L'équation s'écrit :

$$(c - d)t^2 + 2bt + a - d = 0$$

dont la résolution est immédiate.

1187. Équations trigonométriques à deux inconnues.

◇ *Exemple 1. — Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x = 2 \sin y \end{cases}$$

La seconde équation donne :

$$\frac{\sin x}{2} = \frac{\sin y}{1} = \frac{\sin x - \sin y}{1} = \frac{\sin x + \sin y}{3}$$

ou

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{1}{3}$$

ou

$$\frac{2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}}{2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}} = \frac{1}{3}$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}.$$

Or $x - y = \frac{\pi}{3}$, donc :

$$\operatorname{tg}\frac{x-2}{2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cotg}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3}$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\sqrt{3}$$

et enfin

$$\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

ou

$$x+y=\frac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi$$

Le système proposé est alors équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{3} \\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}, \bmod 2\pi \end{cases}$$

Immédiatement :

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}, \bmod \pi \\ x=\dfrac{\pi}{6}, \bmod \pi \end{cases}$$

◇ *Exemple 2. — Résoudre le système :*

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{4} \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=1 \end{cases}$$

On a :

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$$

et en tenant compte de la première équation :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos y}$$

La seconde équation s'écrit alors :

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ou

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ou

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = \sqrt{2}$$

Or :

$$\cos(x+y) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x-y) = \sqrt{2}$$

ou

$$\cos(x-y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et enfin

$$x - y = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

ou

$$x - y = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi.$$

Le système proposé équivaut à la réunion des deux systèmes suivants :

$$\text{I} \begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{4}, \bmod 2\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} x - y = -\dfrac{\pi}{4}, \bmod 2\pi \\ x + y = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

qui fournissent les solutions :

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4}, \bmod \pi \\ y = 0, \bmod \pi \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0, \bmod \pi \\ y = \dfrac{\pi}{4}, \bmod \pi \end{cases}$$

CHAPITRE LXXXVII

CONIQUES

1188. Définition générale des coniques.

On appelle conique l'ensemble des points M (x; y) du plan R^2 dont les coordonnées (x; y) satisfont à une relation de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1188;1)$$

Il n'est pas question, en Mathématiques Elémentaires, de faire l'étude générale des courbes définies par une équation (1188; 1); mais il est possible d'étudier un nombre assez important et suffisant de cas particuliers.

1189. Coniques d'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$.

Les courbes d'équation $y^2 = ax^2 + bx + c$ sont évidemment des coniques. L'équation se dédouble :

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

et

$$y = -\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Si la courbe est tracée dans un plan R^2 rapporté à des axes x'Ox et y'Oy orthonormés, l'axe x'Ox est un axe de symétrie.

Voici quelques exemples numériques.

◇ *Exemple 1. — Étudier la courbe (C) d'équation* $y^2 = (x + 1)(2 - x)$.

Il suffit d'étudier la fonction :

$$y = \sqrt{(x + 1)(2 - x)}$$

Cette fonction est définie pour $(x + 1)(2 - x) \geqslant 0$, c'est-à-dire dans l'intervalle $[-1; 2]$.

La dérivée est

$$y' = \frac{-2x + 1}{2\sqrt{(x + 1)(2 - x)}}$$

Elle s'annule pour $x = \frac{1}{2}$ et on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$. Elle devient infinie pour $x = -1$ et $x = 2$.

D'où le tableau de variation :

x	-1		$\frac{1}{2}$		2
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

La courbe est représentée en axes orthonormés (fig. 1189 *a*). On obtient toute la courbe par symétrie (fig. 1189 *b*.) L'équation $y^2 = (x + 1)(2 - x) = -x^2 + x + 2$ s'écrit :

$$x^2 + y^2 - x - 2 = 0$$

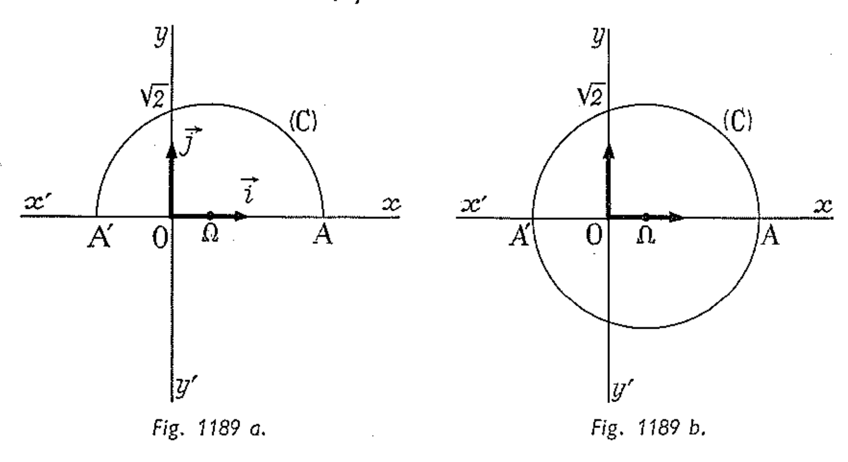


Fig. 1189 a. *Fig. 1189 b.*

c'est l'équation d'un cercle; donc en axes orthonormés la courbe (C) est un cercle.

Mais en axes quelconques la courbe est une ellipse (fig. **1189** c).

◇ *Exemple 2. — Étudier la courbe* (C) *d'équation*

$$y^2 = (x+1)(x-2).$$

Il suffit d'étudier la fonction

$$y = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

Cette fonction est définie pour $(x+1)(x-2) \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $]-\infty -1] \cup [2; +\infty[$.

La dérivée est

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{(x+1)(x-2)}}$$

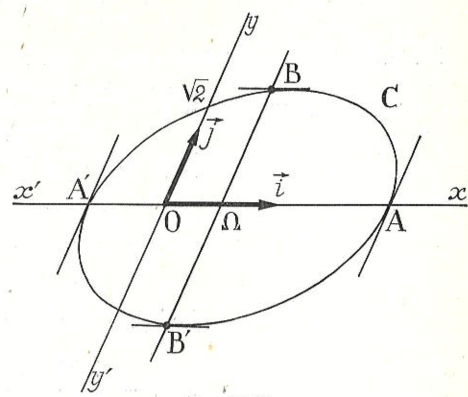


Fig. 1189 c.

Le numérateur change de signe pour $x = \frac{1}{2}$. Pour $x = -1$ et $x = 2$, la dérivée est infinie.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	$-\infty$	/////	$+\infty$	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	/////	0	↗	∞

La courbe représentative a des branches infinies; il y a donc lieu de rechercher les asymptotes obliques éventuelles.

On a :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{(x+1)(x-2)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x} =$$

$$\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|}{x}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

D'où :

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y}{x} = 1$$

et
$$\lim_{x=-\infty} \frac{y}{x} = -1.$$

De plus, pour x tendant vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
y - x &= \sqrt{(x+1)(x-2)} - x \\
&= |x| \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \\
&= x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \\
&= x \cdot \left[\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1\right] \\
&\simeq x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - 1\right] \\
&\qquad \left(\text{cf formule } \sqrt{1-u} \simeq 1 - \frac{u}{2}\right) \\
&\simeq x\left(1 - \frac{1}{2x} - 1 - \frac{1}{2x^2}\right) \\
&\simeq -\frac{1}{2} + \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et
$$\lim_{x=+\infty} (y - x) = -\frac{1}{2}.$$

Par suite on a $y = x - \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$, et la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote.

De même, pour x tendant vers $-\infty$, on a :

$$\begin{aligned}
y + x &= \sqrt{(x+1)(x-2)} + x \\
&= |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x \\
&= -x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x \\
&= x\left[-\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right) + 1\right] \\
&= x\left(+\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x=-\infty} (y + x) = \frac{1}{2}.$$

Par suite on a $y = -x + \frac{1}{2} + \varepsilon(x)$, et la droite d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est asymptote.

La courbe est représentée en axes orthonormés (fig. 1189 *d*). C'est une hyperbole.

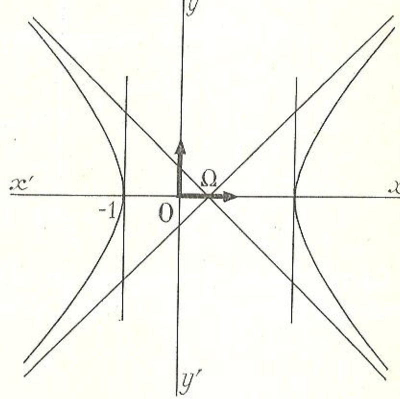


Fig. 1189 d.

◇ *Exemple 3. — Étudier la courbe d'équation* $y^2 = x + 4$.

Il suffit d'étudier la fonction

$$y = \sqrt{x + 4}$$

Cette fonction est définie pour $x + 4 \geqslant 0$ c'est-à-dire pour $[-4; +\infty[$.

La dérivée est

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 4}};$$

elle est positive dans $[-4; +\infty[$; pour $x = -4$, elle est égale à $+\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	-4		$+\infty$
y'	$+\infty$	$+$	
y	0	↗	$+\infty$

La courbe a une branche infinie. On a :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{x + 4}}{x}$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y}{x} = 0.$$

Donc il y a pas d'asymptote oblique; on dit que (C) a une branche parabolique dans la direction $x'Ox$.

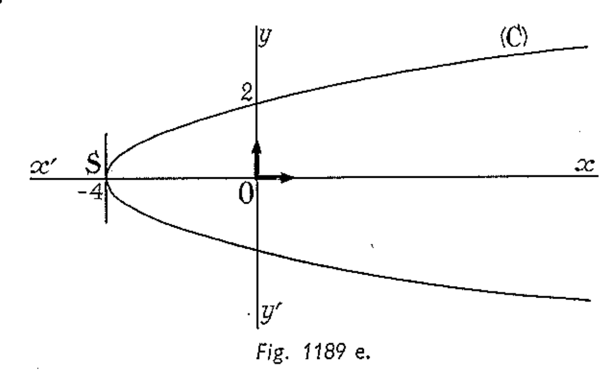


Fig. 1189 e.

La courbe est représentée en axes orthonormés (fig. 1189 e), et en axes quelconques (fig. 1189 *f*). C'est une parabole.

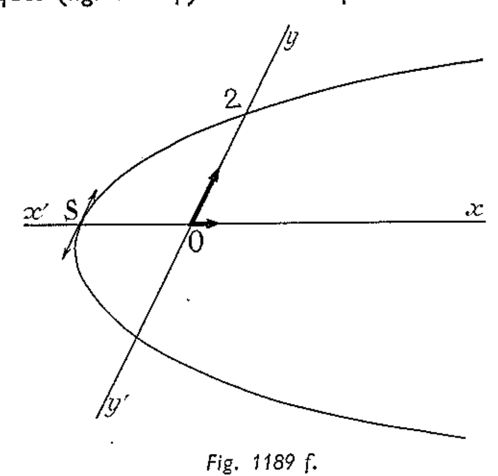


Fig. 1189 f.

◇ *Exemple 4. — Étudier la courbe d'équation* $f(x;\ y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$.

C'est une conique (C); son équation s'écrit :

$$y^2 = x^2 - 2x + 1$$

ou

$$y^2 = (x - 1)^2$$

D'où :

$$y = x - 1$$
$$y = -x + 1$$

La conique (C) est donc la réunion des deux droites (D) et (D') d'équations $y = x - 1$ et $y = -x + 1$ (fig. 1189 *g*).

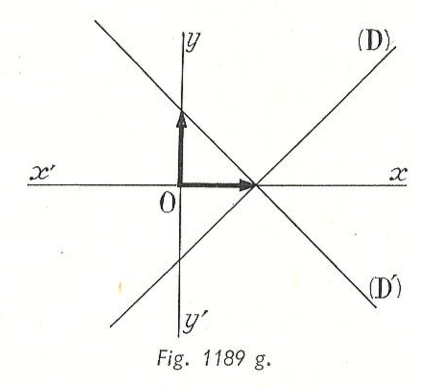


Fig. 1189 g.

On dit souvent que (C) est une conique décomposée en deux droites.

1190. Coniques d'équation $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\alpha x + \beta}$.

Les courbes d'équation $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{\alpha x + \beta}$ sont des coniques; en effet cette équation peut s'écrire :

$$f(x; y) = y(\alpha x + \beta) - (ax^2 + bx + c) = 0$$

Voici quelques exemples numériques.

◇ *Exemple 1. — Étude de la courbe d'équation* $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.

La fonction $x \longrightarrow \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ est définie, continue, dérivable dans $R - \{2\}$.

Elle s'écrit :

$$y = x - 2 - \frac{1}{x - 2}.$$

La dérivée est

$$y' = 1 + \frac{1}{(x - 2)^2};$$

elle est donc toujours positive.

De plus

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

L'équation $y = x - 2 - \frac{1}{x-2} = x - 2 + \varepsilon(x)$ montre que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote. La droite d'équation $x = 2$ est aussi asymptote.

La courbe est facile à construire (fig. 1190 *a*). C'est une hyperbole.

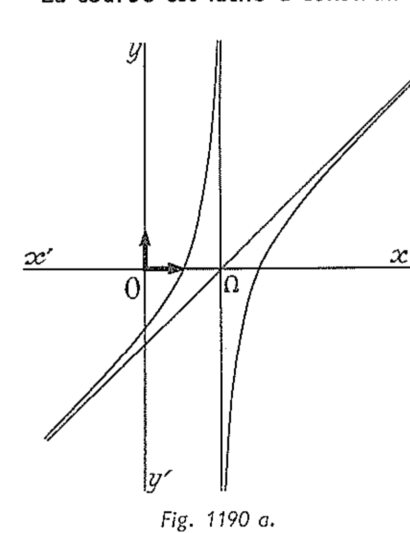


Fig. 1190 a.

◇ *Exemple 2. — Étude de la courbe d'équation* $y = \frac{2 - x^2}{x - 2}$.

La fonction $x \longrightarrow \frac{2 - x^2}{x - 2}$ est définie, continue, dérivable dans $R - \{2.\}$ Elle s'écrit :

$$y = -x - 2 - \frac{2}{x-2}.$$

La dérivée est

$$y' = -1 + \frac{2}{(x-2)^2}$$

ou

$$y' = \frac{2 - (x-2)^2}{(x-2)^2}.$$

Elle est positive dans $]2 - \sqrt{2}\,;\, 2 + \sqrt{2}[$

On a :

$$f(2 + \sqrt{2}) = -2(2 + \sqrt{2})$$

et

$$f(2 - \sqrt{2}) = -2(2 - \sqrt{2})$$

De plus :

$$\lim_{x=+\infty} y = -\infty$$

et

$$\lim_{x=-\infty} y = +\infty$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$-2(2-\sqrt{2})$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$-2(2+\sqrt{2})$	↗	$-\infty$

L'équation $y = -x - 2 - \dfrac{2}{x-2}$ montre que la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote. La droite d'équation $x = 2$ est aussi asymptote.

On trace alors facilement la courbe (fig. 1190 *b*). C'est une hyperbole.

◇ *Exemple 3. — Étudier la courbe d'équation* $y = \dfrac{x^2 + 9}{x\sqrt{3}}$

La fonction $x \longrightarrow \dfrac{x^2 + 9}{x\sqrt{3}}$ est définie, continue, dérivable dans $R - \{0\}$. Elle s'écrit :

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{x}.$$

La dérivée est

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 9}{x^2\sqrt{3}},$$

elle est nulle pour $x = 3$ et $x = -3$, et négative dans $]-3; +3[- \{0\}$.
On a : $f(3) = 2\sqrt{3}$ et $f(-3) = -2\sqrt{3}$.

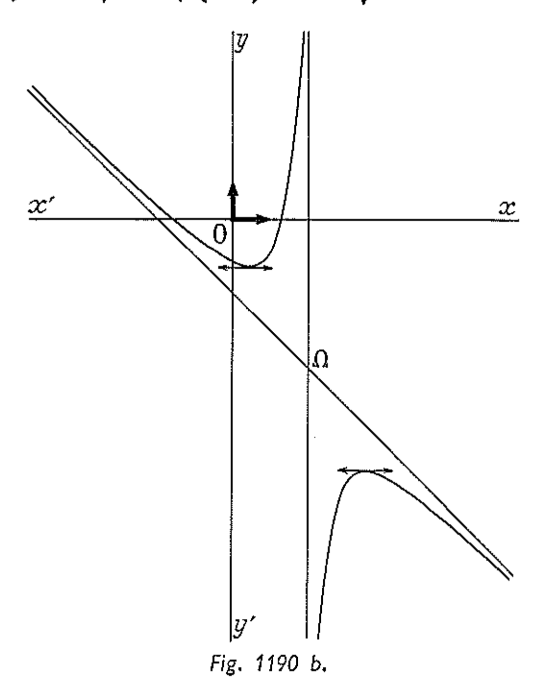


Fig. 1190 b.

De plus :

$$\lim_{x=+\infty} y = +\infty$$

et

$$\lim_{x=-\infty} y = -\infty.$$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

L'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{x}$, montre que la droite d'équation $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ est asymptote; la droite $y'Oy$ est aussi asymptote.

On trace alors facilement la courbe (fig. 1190 *c*). C'est une hyperbole.

◇ *Exemple 4. — Étude de la courbe d'équation* $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

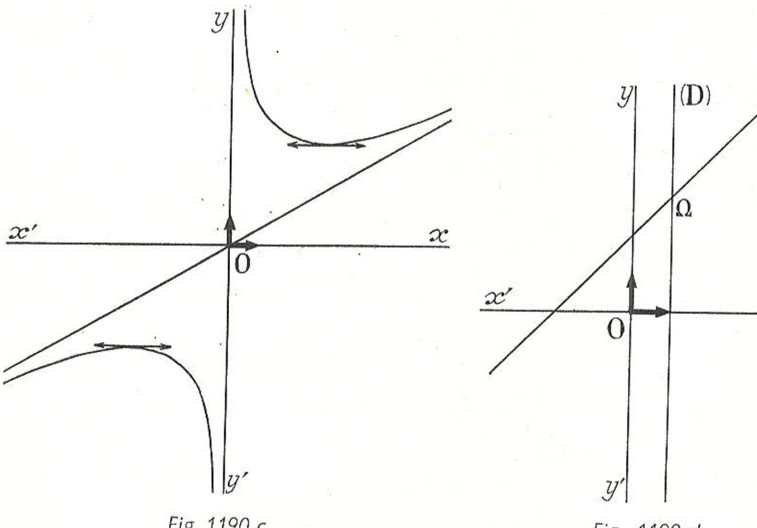


Fig 1190 c.

Fig. 1190 d.

Ici on a :

$$y = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1}.$$

L'habitude dans ce cas particulier (cf. n° 741) est d'écrire l'équation sous la forme

$$y(x-1) - (x-1)(x+2) = 0$$

ou

$$(x-1)(y-x-2) = 0$$

La conique est alors décomposée en deux droites d'équations (fig. 1190 *d*)

$$x = 1 \quad \text{et} \quad y = x + 2.$$

1191. Coniques données par l'équation générale.

Soit l'équation générale d'une conique

$$f(x;y) = Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$$

Elle s'écrit :

$$Cy^2 + 2\,(Bx + E)\,y + Ax^2 + 2\,Dx + F = 0$$

Si $\Delta' = (Bx + E)^2 - C\,(Ax^2 + 2\,Dx + F)$ est positif ou nul, la conique existe et son équation s'écrit :

$$y = \frac{-\,(Bx + E) \pm \sqrt{(Bx + E)^2 - C \cdot (Ax^2 + 2\,Dx + F)}}{C}$$

La conique se décompose alors en deux branches ayant des équations de la forme

$$y = \alpha x + \beta + \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

et

$$y = \alpha x + \beta - \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Les cas étudiés précédemment correspondent à $B = 0$ et $E = 0$ (cf. n° 1189) et au cas $C = 0$ (cf. n° 1190).

Voici quelques exemples numériques.

◇ *Exemple 1. — Étudier la conique ayant pour équation*

$$16\,y^2 - 32\,xy + 25\,x^2 - 81 = 0$$

L'équation s'écrit :

$$y = x + \frac{3}{4}\sqrt{9 - x^2}$$

$$y = x - \frac{3}{4}\sqrt{9 - x^2}$$

1° *Étude de la fonction* $\quad y = x + \frac{3}{4}\sqrt{9 - x^2}.$

Cette fonction est définie dans $[-\,3;\,+\,3]$, et on a $f(3) = 3$ et $f(-\,3) = -\,3$.

La dérivée est

$$y' = 1 - \frac{3\,x}{4\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{9 - x^2} - 3\,x}{4\sqrt{9 - x^2}}$$

Elle s'annule si $4\sqrt{9-x^2}=3x$ ou $16(9-x^2)=9x^2$ ou $25x^2=9\times 16$.
Finalement la seule solution acceptable est $x=\frac{12}{5}$. On a alors $f\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{15}{4}$.

D'où le tableau de variation :

x	-3		$\frac{12}{5}$		3
y'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	-3	↗	$\frac{15}{4}$	↘	$+3$

On trace alors facilement la courbe représentative C_1 (fig. 1191 *a*).

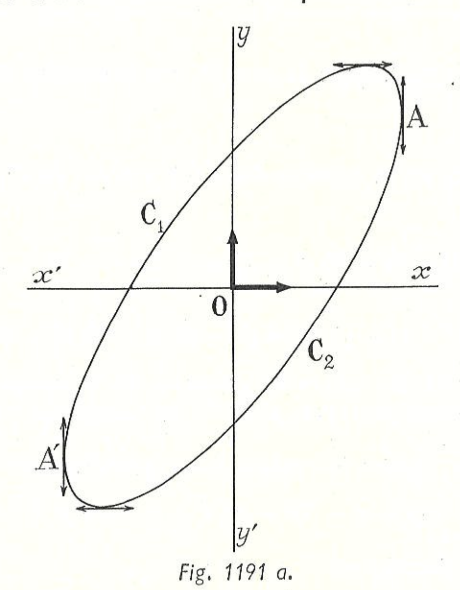


Fig. 1191 a.

2° *Étude de la fonction* $y = x - \frac{3}{4}\sqrt{9-x^2}$.

Cette fonction est définie dans $[-3; +3]$, et on a $f(3)=3$ et $f(-3)=-3$.

La dérivée est

$$y' = \frac{4\sqrt{9 - x^2} + 3x}{4\sqrt{9 - x^2}}.$$

qui s'annule pour $x = -\frac{12}{5}$. On a alors $f\left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{15}{4}$.

D'où le tableau de variation :

x	-3		$-\frac{12}{5}$		$+3$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
y	-3	↘	$-\frac{15}{4}$	↗	$+3$

On trace alors facilement la courbe représentative C_2. (fig. 1191 *a*).

3° *Remarque.*

La conique (C) est la réunion des deux arcs C_1 et C_2.

De plus on a :

$$f(x; y) = 16y^2 - 32xy + 25x^2 - 81 = 0$$

et

$$f(-x; -y) = 16y^2 - 32xy + 25x^2 - 81 = 0$$

Donc le point O est centre de symétrie de la conique (C). Les deux arcs C_1 et C_2 sont symétriques pour O. La courbe est une ellipse.

◇ *Exemple 2. — Étudier la conique ayant pour équation*

$$(y - x - 1)^2 - 4(x^2 + x - 6) = 0$$

L'équation se décompose :

$$\begin{cases} y = x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x - 6} \\ \text{et} \\ y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x - 6} \end{cases}$$

1° *Étude de la courbe* (C_1) *d'équation* $y = x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x - 6}$.

La fonction est définie pour $x^2 + x - 6 \geqslant 0$, c'est-à-dire dans les intervalles $]-\infty; -3]$ et $[2; +\infty[$. On a : $f(-3) = -2$ et $f(2) = 3$.

La dérivée est :

$$y' = 1 - 2 \cdot \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

ou

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6} - (2x + 1)}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

Elle s'annule pour $x^2 + x - 6 = (2x + 1)^2$ ou $x^2 + x - 6 = 4x^2 + 4x + 1$ ou $3x^2 + 3x + 7 = 0$. Cette équation n'a pas de solutions réelles; donc la dérivée garde un signe constant dans chaque intervalle.

L'équation s'écrit :

$$y = x + 1 + 2 \cdot |x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

Si x tend vers $+\infty$, on a $y = x + 1 + 2x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$ qui tend vers $+\infty$.

Si x tend vers $-\infty$, on a $y = x + 1 - 2x\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$ qui tend vers $+\infty$.

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$-$		(hachuré)		$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	(hachuré)	3	↗	$+\infty$

La courbe (C_1) a deux branches infinies; on a :

$$y = x + 1 + 2\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$$

$$= x + 1 + |2x + 1| \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{(2x + 1)^2}}$$

Pour x dans le voisinage de ∞, on a:

$$y \simeq x + 1 + |2x + 1| \cdot \left(1 - \frac{25}{2(2x + 1)^2}\right)$$

$$\simeq x + 1 + |2x + 1| - \frac{25}{2 \cdot |2x + 1|}$$

Si x tend vers $+\infty$, $|2x + 1| = 2x + 1$, et

$$y \simeq x + 1 + 2x + 1$$

et

$$y = 3x + 2 + \varepsilon(x)$$

La droite d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote.
Si x tend vers $-\infty$, $|2x + 1| = -2x - 1$, et

$$y \simeq x + 1 - 2x - 1$$

et

$$y = -x + \varepsilon(x)$$

La droite d'équation $y = -x$ est asymptote.

On peut alors tracer facilement la courbe (C_1) (fig. 1191 *b*).

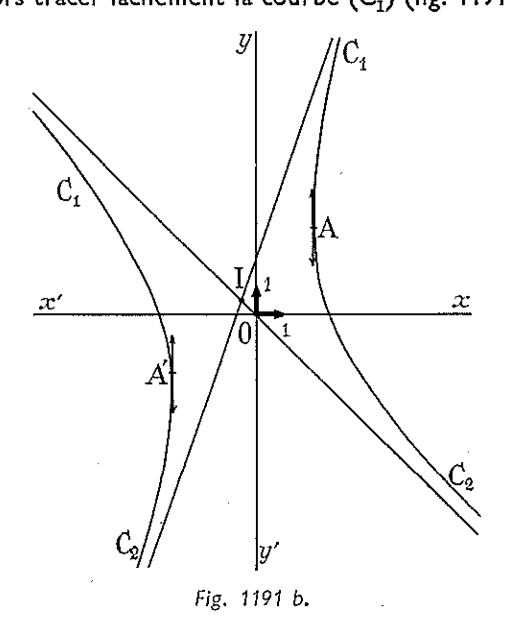


Fig. 1191 b.

2° *Étude de la courbe* (C_2) *d'équation* $y = x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x - 6}$.
La fonction est encore définie dans $]-\infty; -3]$ et $[2; +\infty[$.

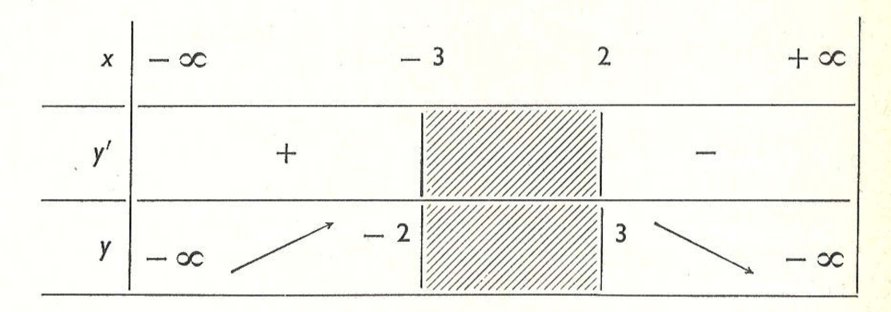
Sa dérivée est

$$y' = 1 + \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 + x - 6} + 2x + 1}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$$

qui garde un signe constant dans les deux intervalles de définition.

D'où le tableau de variation :



x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$		//////		$-$	
y	$-\infty$	↗	-2	//////	3	↘	$-\infty$

Si x tend vers $+\infty$, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote.
Si x tend vers $-\infty$, la droite d'équation $y = 3x + 2$ est asymptote.
On trace alors facilement la courbe (C_2) (fig. 1191 *b*).

3° *Remarques.*

La conique (C) est la réunion des arcs (C_1) et (C_2). C'est une hyperbole.

Les deux asymptotes se coupent en I $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. On fait une translation des axes de vecteur $\overrightarrow{OI}$. Les formules de translation des axes sont :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + X \\ y = \frac{1}{2} + Y \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation de la conique, on obtient :

$$\left(\frac{1}{2} + Y + \frac{1}{2} - X - 1\right)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - X + X^2 - \frac{1}{2} + X - 6\right) = 0$$

ou

$$(Y - X)^2 - 4\left(X^2 - \frac{25}{4}\right) = 0$$

ou

$$Y^2 - 2XY - 3X^2 + 25 = 0$$

ce qui montre que I est un centre de symétrie.

◇ *Exemple 3. — Étude de la conique d'équation* $(2y - x - 2)^2 - 4(x + 1) = 0$.

L'équation se décompose :

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{x + 1}$$

$$y = \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{x + 1}$$

1° *Étude de l'arc* (C_1) *d'équation* $y = \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{x + 1}$.

La fonction est définie dans $[-1; +\infty[$, et $f(-1) = \frac{1}{2}$.

La dérivée est

$$y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$$

qui est toujours positive.

Si x tend vers $+\infty$, y tend vers $+\infty$,

D'où le tableau de variation :

x	-1		$+\infty$
y	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

(C_1) a une branche infinie; or on a :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x + 1}}{x}$$

et

$$\lim_{x = +\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

De plus :

$$y - \frac{1}{2}x = 1 + \sqrt{x+1}$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \left(y - \frac{1}{2}x\right) = +\infty.$$

Il n'y a donc pas d'asymptote. On trace alors facilement l'arc (C_1) (fig. 1191 *c*).

2° *Étude de l'arc* (C_2) *d'équation* $y = \frac{x}{2} + 1 - \sqrt{x+1}$

La fonction est définie dans $[-1; +\infty[$.

La dérivée est

$$y' = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}$$

Elle s'annule pour $x = 0$.

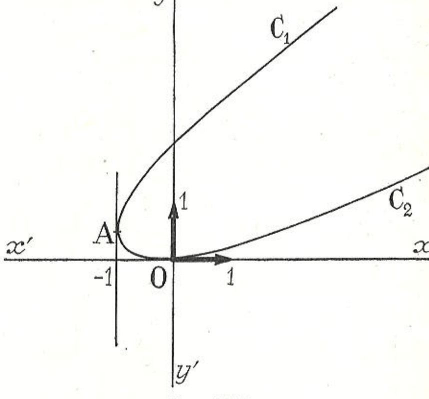


Fig. 1191 c.

D'où le tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Il n'y a pas d'asymptote oblique, et on trace alors facilement (C_2). La conique (C) est la réunion des arcs (C_1) et (C_2) (fig. 1191 *c*). C'est une parabole.

1192. Genre des coniques.

1° L'équation étant

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

une conique n'est réelle que si $ax^2 + bx + c$ est positif ou nul. En excluant

le cas des coniques décomposables en deux droites, il reste trois sortes de coniques.

Si $a = 0$, la conique a deux branches infinies sans asymptote; c'est une parabole.

Si $ax^2 + bx + c$ est positif dans $[\lambda; \mu]$, la conique n'a pas de point à l'infini; c'est une ellipse.

Si $ax^2 + bx + c$ est positif dans $]-\infty; \lambda] \cup [\mu; +\infty[$, la conique a des branches infinies avec deux asymptotes; c'est une hyperbole.

Les ellipses et les hyperboles ont un centre de symétrie; en effet grâce à une translation des axes, l'équation se met sous la forme

$$AX^2 + 2\,BXY + CY^2 + H = 0.$$

2° On montre que par un changement d'axes, l'équation d'une conique s'écrit sous la forme :

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

3° On montre aussi qu'une conique à centre (ellipse, hyperbole) a une équation qui peut se réduire à la forme :

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1.$$

CHAPITRE LXXXVIII

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

1193. Fonction logarithme népérien.

On appelle fonction logarithme népérien, la fonction définie par l'intégrale $\int_1^x \frac{du}{u}$, x variant de 0 à $+\infty$.

On note : $$y = \int_1^x \frac{du}{u} = \text{Log } x$$

et on lit « logarithme népérien de x ».

Comme la fonction $\frac{1}{u}$ est définie dans $]0; +\infty[$, la fonction Log est définie, continue et dérivable dans $]0; +\infty[$ (cf. n° 1154).

1194. Interprétation géométrique.

Soit (H) la courbe représentative en axes orthonormés de la fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{x}$ (fig. 1194 *a*).

L'intégrale $\int_1^x \frac{du}{u} = \text{Log } x$ représente l'aire de la surface comprise entre l'axe $x'Ox$, la courbe (H) et les deux parallèles à $y'Oy$ ayant pour abscisses 1 et x.

Si x est supérieure à 1, l'aire est positive.

Si x appartient à $]0; 1[$, l'aire est négative.

Si $x = 1$, l'aire est nulle; et

$$\textbf{Log } 1 = 0. \qquad (1194; 1)$$

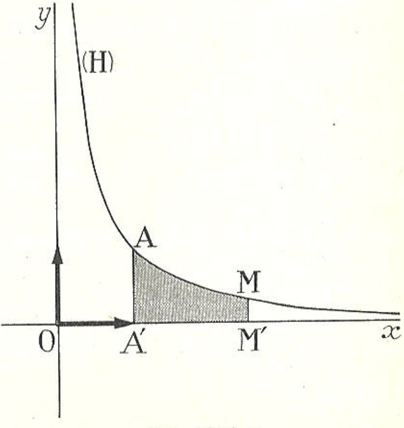


Fig. 1194 a.

1195. Dérivation de la fonction Log.

1° D'après le résultat du n° 1154,3° :

La dérivée de $y = \text{Log } x$ ***est*** $y' = \frac{1}{x}$.

2° Par suite, la dérivée étant positive dans $]0; +\infty[$:

La fonction Log est croissante dans $]0; +\infty[$:

3° Le théorème de dérivation d'une fonction composée donne :

La dérivée de $y = \text{Log } u$, ***u étant une fonction dérivable de u, est*** $y' = \frac{u'}{u}$.

◇ *Exemple 1. — Calculer la dérivée de* $y = \text{Log } (2x^2 + 3x + 1)$.

On pose :

$$u = 2x^2 + 3x + 1$$

D'où :

$$u' = 4x + 3$$

Et ainsi :

$$y' = \frac{4x + 3}{2x^2 + 3x + 1}.$$

◇ *Exemple 2. — Calculer la dérivée de* $y = \text{Log } \sin x$.

On pose :

$$u = \sin x$$

D'où :

$$u' = \cos x$$

et :

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{cotg } x$$

◇ *Exemple 3. — Calculer la dérivée de* $y = \text{Log } (\text{tg } \frac{x}{2})$.

On pose :

$$u = \text{tg } \frac{x}{2}$$

D'où :

$$u' = \frac{1}{2}\left(1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}\right)$$

et :

$$y' = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

ou

$$y' = \frac{1}{\sin x}.$$

1196. Primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit :

$$F(x) = \int \frac{dx}{x}$$

la primitive générale de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

Si $x \in]0; +\infty[$, on a évidemment $\int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log} x + C$.

Si $x \in]-\infty; 0[$, on pose $u = -x$, donc $du = -dx$, et

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-du}{-u} = \int \frac{du}{u} = \operatorname{Log} u = \operatorname{Log}(-x) = \operatorname{Log}|x|$$

Dans tous les cas, on a donc :

$$\int \frac{dx}{x} = \operatorname{Log}|x| + C. \qquad (1196; 1)$$

1197. Propriétés fondamentales de la fonction logarithme népérien.

1° Soit un nombre positif constant a.

La dérivée de $y = \operatorname{Log} ax$ est $y' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Donc les fonctions $\operatorname{Log} x$ et $\operatorname{Log} ax$ ont la même dérivée, et ne diffèrent que par une constante (cf. n° 1138).

$(\forall x)$: $\operatorname{Log} ax = \operatorname{Log} x + C$

En faisant $x = 1$, on obtient, puisque $\operatorname{Log} 1 = 0$, $C = \operatorname{Log} a$.

D'où la formule :

$$\operatorname{Log} ax = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} a \qquad (1197; 1)$$

2° Par suite *si* x *et* y *sont positifs*, on a :

$$\mathbf{Log}\, xy = \mathbf{Log}\, x + \mathbf{Log}\, y \qquad (1197;2)$$

Mais *si on sait seulement que le produit* xy *est positif*, on doit écrire :

$$\mathbf{Log}\, xy = \mathbf{Log}\, |x| + \mathbf{Log}\, |y| \qquad (1197;3)$$

Par récurrence, on obtient :

$$\mathbf{Log}\, (x_1\, x_2 \dots x_n) = \mathbf{Log}\, |x_1| + \mathbf{Log}\, |x_2| + \dots + \mathbf{Log}\, |x_n| \qquad (1197;4)$$

3° Soient *deux nombres positifs* x et y. On pose $u = \frac{x}{y}$, donc $x = u \cdot y$.

D'où :
$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} u + \operatorname{Log} y$$
ou
$$\operatorname{Log} u = \operatorname{Log} x - \operatorname{Log} y$$
ou
$$\mathbf{Log}\, \frac{x}{y} = \mathbf{Log}\, x - \mathbf{Log}\, y \qquad (1197;5)$$

Si on sait seulement que *le quotient* $\frac{x}{y}$ *est positif*, on doit écrire :

$$\mathbf{Log}\, \frac{x}{y} = \mathbf{Log}\, |x| - \mathbf{Log}\, |y| \qquad (1197;6)$$

4° Soit maintenant $u = x^n$, x *étant un nombre positif* et n *étant un entier naturel*. On a :

$$u = x \,.\, x \dots x$$
et
$$\operatorname{Log} u = n \,.\, \operatorname{Log} x$$
ou
$$\mathbf{Log}\ x^n = n .\, \mathbf{Log}\, x \qquad (1197;7)$$

Mais *si* x *est de signe quelconque avec* $x^n > 0$, on doit écrire :

$$\mathbf{Log}\ x^n = n \,.\, \mathbf{Log}\, |x| \qquad (1197;8)$$

En particulier :

$$\mathbf{Log}\, x^2 = 2 \,.\, \mathbf{Log}\, |x| \qquad (1197;9)$$

5° On a immédiatement :

$$\operatorname{Log} \frac{1}{x} = \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} x$$
ou
$$\mathbf{Log}\, \frac{1}{x} = -\, \mathbf{Log}\, x \qquad (1197;10)$$

1198. Isomorphisme.

L'application Log : $x \in]0; +\infty[\to \text{Log } x \in R$ étant monotone croissante sur $]0; +\infty[= R^+ - \{0\}$ est une bijection de $R^+ - \{0\}$ sur R.

De plus, puisque $\text{Log }(xy) = \text{Log } x + \text{Log } y$, c'est un homomorphisme.

Finalement la fonction Log est un isomorphisme de $R^+ - \{0\}$ muni de la multiplication, sur R muni de l'addition.

1199. Le nombre e.

On appelle nombre e la solution unique de l'équation Log x = 1.

Donc :

Log e = *1* (1199; 1)

On peut calculer e par des méthodes étrangères à ce programme. On a :

e = 2,718 281 828 5...

La figure (1199 *a*) donne une interprétation géométrique de e.

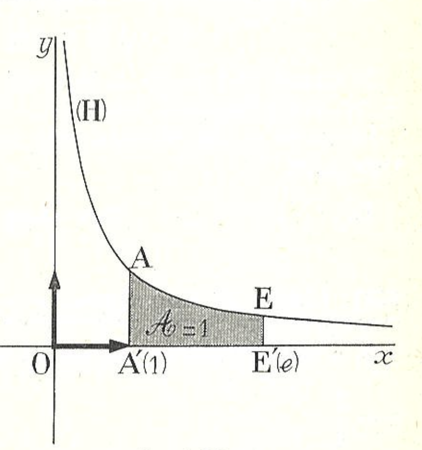


Fig. 1199 a.

1200. Tables de logarithmes népériens.

Il existe des tables donnant les valeurs de Log x pour les valeurs de x les plus souvent rencontrées.

Ainsi, on a, par exemple :

Log 1 = 0
Log 2 = 0,693 1
Log 3 = 1,098 6
Log 10 = 2,302 6
Log 20 = 2,995 7
Log 100 = 4,605 2

On a surtout à connaître :

$$\frac{1}{M} = \text{Log } 10 = 2{,}302\ 585\ 093 \qquad (1200;\ 1)$$

et

$$M = \frac{1}{\text{Log } 10} = 0{,}434\ 284\ 481\ 9 \qquad (1200;\ 2)$$

1201. Limite de Log x pour $x = +\infty$.

Le logarithme népérien de 10^n, égal à n Log 10, tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Or : $$(\forall x)\ (\exists n) : 10^n \leqslant x < 10^{n+1} \qquad (1201;1)$$

La fonction Log étant croissante, de cette inégalité on déduit :

$$n\,.\,\text{Log}\,10 \leqslant \text{Log}\,x < (n+1)\,\text{Log}\,10 \qquad (1201;2)$$

Si x tend vers $+\infty$, la formule (1201; 1) montre que 10^{n+1} tend vers $+\infty$, donc aussi $n+1$ et n.

Par suite n Log 10 tend vers $+\infty$, et finalement Log x tend aussi vers $+\infty$.

Et : $$\lim_{x=+\infty} (\text{Log}\,x) = +\infty \qquad (1201;3)$$

1202. Limite de Log x pour $x = 0$.

Si x tend vers 0 en restant dans $]0;+\infty[$, on peut poser $x = \frac{1}{u}$ ou $u = \frac{1}{x}$.

On a :

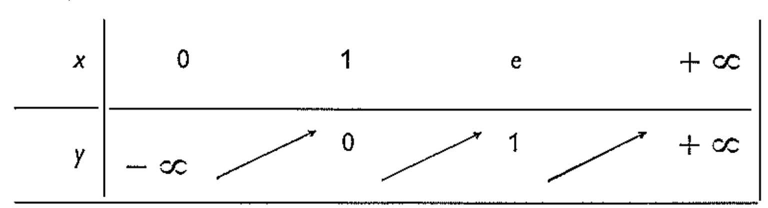
$$\text{Log}\,x = \text{Log}\,\frac{1}{u}$$
$$= -\,\text{Log}\,u$$

Lorsque x tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$, Log u tend vers $+\infty$, et finalement Log x tend vers $-\infty$.

Et : $$\lim_{x=0+} (\text{Log}\,x) = -\infty \qquad (1202;1)$$

1203 Variations de la fonction logarithme népérien.

Des résultats précédents, on déduit le tableau de variation de la fonction Log :



x	0		1		e		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

1204. Limite de $\frac{\text{Log } x}{x}$ pour $x = +\infty$.

Si u est supérieur à 1, on a :

$$u > \sqrt{u}$$

Donc :

$$\frac{1}{u} < \frac{1}{\sqrt{u}}$$

et

$$\int_1^x \frac{du}{u} < \int_1^x \frac{du}{\sqrt{u}}$$

Or :

$$\int_1^x \frac{du}{u} = \text{Log } x$$

et

$$\int_1^x \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \cdot \int_1^x \frac{du}{2\sqrt{u}} = 2 \cdot [\sqrt{u}]_1^x = 2(\sqrt{x} - 1)$$

On a donc :

$$0 < \text{Log } x < 2(\sqrt{x} - 1)$$

et évidemment :

$$0 < \text{Log } x < 2\sqrt{x}$$

ou :

$$0 < \frac{\text{Log } x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{2}{\sqrt{x}}$ tend vers 0, donc aussi $\frac{\text{Log } x}{x}$.

Et :

$$\lim_{x=+\infty} \left(\frac{\text{Log } x}{x}\right) = 0.$$

1205. Courbe représentative.

La courbe représentative est alors facile à construire en axes orthonormés (fig. 1205 *a*).

Soit A le point de la courbe ayant pour abscisse $x = 1$ et pour ordonnée $y = \text{Log } 1 = 0$. Le pente de la tangente en A est $f'(1) = 1$. L'équation de cette tangente est donc $y = x - 1$.

Soit E le point de la courbe, d'abscisse $x = e$ et d'ordonnée $y = \text{Log } e = 1$. La pente de la tangente en A est $f'(e) = \frac{1}{e}$.

L'équation de cette tangente est donc $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$ ou $y = \frac{x}{e}$; cette tangente passe donc par l'origine O des axes.

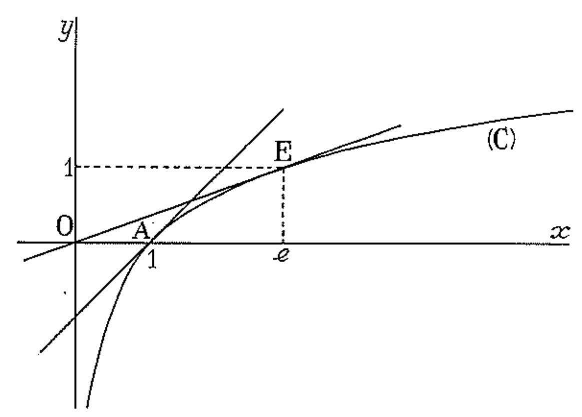


Fig. 1205 a.

Lorsque x tend vers $+\infty$, le rapport $\frac{y}{x} = \frac{\text{Log } x}{x}$ tend vers 0; il n'y a donc pas d'asymptote oblique.

Évidemment l'axe $y'Oy$ est asymptote à la courbe.

La dérivée seconde est $y'' = -\frac{1}{x^2}$; elle est constamment négative, et la concavité de la courbe est donc tournée vers les y négatifs.

1206. Étude de $y = \text{Log}(1 + x)$ au voisinage de $x = 0$.

On a :

$$y = f(x) = \text{Log}(1 + x) \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

D'où :

$$y' = f'(x) = \frac{1}{1 + x} \qquad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

et

$$y'' = f''(x) = -\frac{1}{(1 + x)^2}$$

La formule de Marc-Laurin

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(\theta \cdot x) \qquad 0 < \theta < 1$$

donne ici :

$$\text{Log}\,(1 + x) = x + \frac{x^2}{2(1 + \theta \cdot x)^2}$$

Par suite : $$\frac{\text{Log}\,(1 + x)}{x} = 1 + \frac{x}{2 \cdot (1 + \theta \cdot x)^2}$$

et

$$\lim_{x=0} \frac{\textbf{Log (1 + x)}}{\textbf{x}} = 1 \qquad (1206\,;\,1)$$

1207. Logarithmes de base quelconque.

Soit un nombre positif a.

On appelle fonction logarithme de base a la fonction f_a définie par f_a :

$$f_a : \qquad x \in R^+ - \{a\} \longrightarrow f_a(x) = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

On écrit :

$$f_a(x) = \text{Log}_a\, x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a} \qquad (1207\,;\,1)$$

La dérivée de $y = \text{Log}_a\, x$ est

$$y' = \frac{1}{x \cdot \text{Log } a} \qquad (1207\,;\,2)$$

Et :

La dérivée de $y = \log_a u$ est $y' = \dfrac{u'}{u \cdot \text{Log } a}$.

1208. Variation de la fonction $\log_a$.

Les variations de $y = \log_a x = \dfrac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$ se déduisent de celles de Log x.

Si $a > 1$, Log a est positif; d'où le tableau de variation :

x	0		1		a		$+\infty$
y	$+\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

La courbe représentative se déduit de celle de $y = \text{Log}\, x$ par une affinité d'axe $x'Ox$ et de rapport $\text{Log}\, a$ (fig. 1208 *a*).

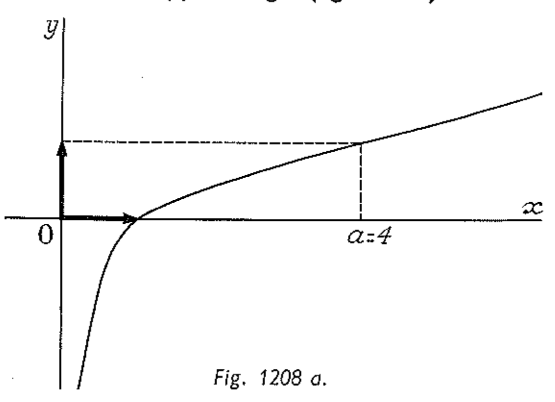


Fig. 1208 a.

Si $a < 1$, $\text{Log}\, a$ est négatif; d'où le tableau de variation :

x	0		a		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

La courbe représentative se déduit de celle de $y = \text{Log}\, x$ par une affinité d'axe $x'Ox$ et de rapport $\text{Log}\, a$ (fig. 1208 *b*).

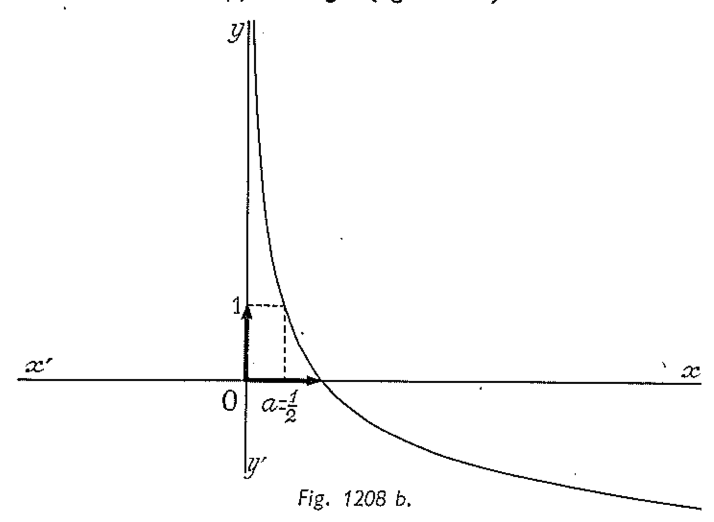


Fig. 1208 b.

1209. Relations entre logarithmes de bases différentes.

1° On a :

$$\log_e = \frac{\text{Log } x}{\text{Log e}} = \text{Log } x$$

ou

$$\mathbf{Log}\ x = \mathbf{log}_e\ x \qquad (1209\,;\,1)$$

Et :

Les logarithmes népériens ont pour base le nombre e.

2° On a encore :

$$\log_b x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } b} = \frac{\dfrac{\text{Log } x}{\text{Log } a}}{\dfrac{\text{Log } b}{\text{Log } a}} = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

D'où la formule :

$$\mathbf{log}_b\ x = \frac{\mathbf{log}_a\ x}{\mathbf{log}_a\ b} \qquad (1209\,;\,2)$$

1210. Logarithmes décimaux.

Pour $a = 10$, on obtient les logarithmes décimaux. On note alors :

$$\log x = \log_{10} x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10}$$

ou

$$\mathbf{log}\ x = M\ .\ \mathbf{Log}\ x \qquad (1210\,;\,1)$$

Cette relation lie les logarithmes décimaux et les logarithmes népériens.

Les logarithmes décimaux sont utilisés très souvent dans les calculs numériques. Il existe des tables donnant les logarithmes décimaux des nombres de 1 à 10 000.

CHAPITRE LXXXIX

FONCTIONS EXPONENTIELLES

1211. Exposants réels.

Soit un nombre positif a.
On sait que si n est un nombre entier naturel, on a :

$$\text{Log } a^n = n . \text{Log } a.$$

On est amené, par analogie, à donner la définition suivante :

Quel que soit le nombre x réel, le nombre a^x est le nombre dont le logarithme est x . Log a.

Ainsi le nombre $A = 2^\pi$ est défini par $\text{Log } A = \pi . \text{Log } 2$.
De même le nombre $B = e^\pi$ est défini par $\text{Log } B = \pi$.

1212. Calcul des exposants réels.

Les puissances a^x vérifient pour x réel les mêmes propriétés que pour x entier naturel.

1° On a :

$$\begin{aligned} \text{Log } (a^{x+y}) &= (x + y) \text{ Log } a \\ &= x. \text{ Log } a + y. \text{ Log } a \\ &= \text{Log } a^x + \text{Log } a^y \\ &= \text{Log } (a^x . a^y) \end{aligned}$$

D'où :

$$\mathbf{a^{x+y} = a^x . a^y} \qquad (1212 ; 1)$$

2° On a :

$$\begin{aligned} \text{Log } [(a^x)^y] &= y . \text{ Log } (a^x) \\ &= y . x . \text{ Log } a \\ &= \text{Log } (a^{xy}) \end{aligned}$$

D'où :

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

3° On a :

$$\begin{aligned}\text{Log}\,(ab)^x &= x\,.\,\text{Log}\,(ab)\\ &= x\,(\text{Log}\,a + \text{Log}\,b)\\ &= x\,\text{Log}\,a + x\,\text{Log}\,b\\ &= \text{Log}\,a^x + \text{Log}\,b^x\\ &= \text{Log}\,(a^x\,.\,b^x)\end{aligned}$$

D'où :

$$(ab)^x = a^x\,.\,b^x \qquad (1212\,;\,3)$$

1213. Fonction exponentielle.

La fonction Log étant une bijection de $R^+ - \{0\}$ sur R, la correspondance réciproque est une fonction.

D'où la définition :

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.

Elle est donc définie implicitement par

$$x = \text{Log}\,y \qquad (1213\,;\,1)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\text{Log}\,y &= x\,.\,\text{Log}\,e\\ &= \text{Log}\,e^x\end{aligned}$$

D'où :

$$y = e^x \qquad (1213\,;\,2)$$

c'est l'expression explicite de la fonction exponentielle.

On a aussi évidemment :

$$x = \text{Log}\,e^x \qquad (1213\,;\,3)$$

et

$$x = e^{\text{Log}\,x} \qquad (1213\,;\,4)$$

1214. Dérivée et primitive de la fonction exponentielle.

1° En dérivant $x = \text{Log}\,y$ par rapport à x, on obtient :

$$1 = \frac{y'}{y}$$

ou

$$y' = y$$

Donc :

La dérivée de $\mathbf{y = e^x}$ ***est*** $\mathbf{y' = e^x}$.

Par suite

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x \qquad (1214 ; 1)$$

Et :

La dérivée de $\mathbf{y = e^u}$ ***est*** $\mathbf{y' = e^u . u'}$

2° Puisque $y' = y = e^x$, on a:

$$F(x) = \int e^x \cdot dx = e^x + C \qquad (1214 ; 2)$$

◇ *Exemple. — Calculer la dérivée de* $y = e^{-x^2}$

On pose $u = -x^2$;

d'où $u' = -2x$ et :

$$y' = e^{-x^2}.(-2x)$$
$$= -2x\,e^{-x^2}$$

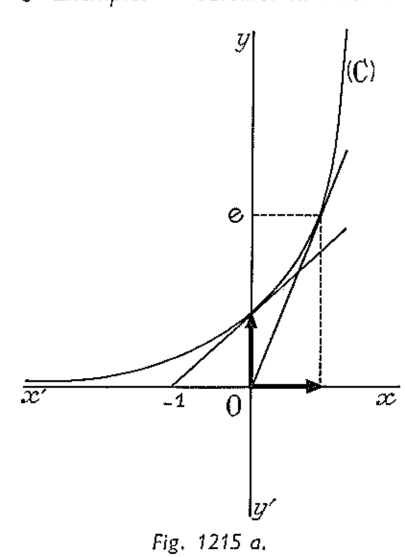


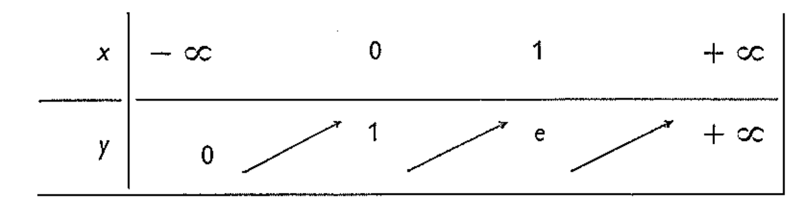
Fig. 1215 a.

1215. Variations et représentation graphique de $y = e^x$

La fonction $y = e^x$, comme la fonction $y = \text{Log}\, x$, est monotone croissante.

La courbe représentative en axes orthonormés se déduit de celle de la fonction $y = \text{Log}\, x$ par une symétrie pour la première bissectrice (fig. 1215 *a*).

Le tableau de variation est le suivant :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

On voit que :

$$\lim_{x=-\infty} \mathbf{e}^x = 0 \qquad (1215\ ;\ 1)$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \mathbf{e}^x = +\infty \qquad (1215\ ;\ 2)$$

De plus :

$$(\forall x)\ \mathbf{e}^x > 0. \qquad (1215\ ;\ 3)$$

1216. Fonctions exponentielles de base quelconque.

De manière plus générale, on peut envisager la fonction réciproque de la fonction $y = \log_a x$.

On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction réciproque de la fonction logarithme de base a.

Elle est définie implicitement par

$$x = \log_a y$$

On a donc :

$$x = \frac{\operatorname{Log} y}{\operatorname{Log} a} \qquad (1216\ ;\ 1)$$

ou

$$\operatorname{Log} y = x \cdot \operatorname{Log} a$$
$$= \operatorname{Log} a^x$$

et finalement

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}^x \qquad (1216;\ 2)$$

qui est la forme explicite de la fonction exponentielle de base a.

1217. Dérivées et primitives.

1° En dérivant $x = \log_a y$ par rapport à x, on obtient :

$$1 = \frac{y'}{y \cdot \operatorname{Log} a}.$$

D'où :

$$y' = y \cdot \operatorname{Log} a$$

ou

$$y' = a^x \operatorname{Log} a \qquad (1217;\ 1)$$

Et :

La dérivée de $y = a^x$ est $y' = a^x . \operatorname{Log} a$.

2° Par suite :

$$F(x) = \int a^x . dx = \frac{a^x}{\text{Log } a} + C \qquad (1217 ; 2)$$

1218. Variations et représentation graphique de $y = a^x$.

Les courbes représentatives en axes orthonormés se déduisent de celles des fonctions $y = \log_a x$ par une symétrie pour la première bissectrice.

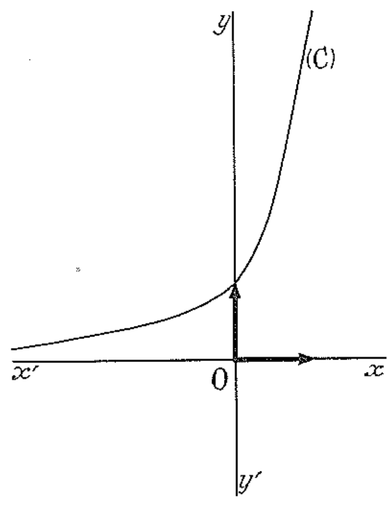
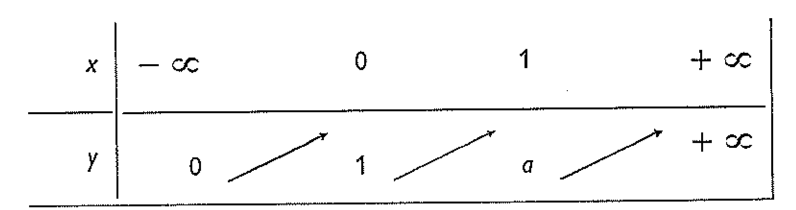


Fig. 1218 a.

$a > 1$. La fonction est croissante; la courbe représentative est celle de la figure (1218 *a*). Le tableau de variation est :



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y	0 ↗	1 ↗	a ↗	$+\infty$

On voit que :

$$a > 1 \begin{cases} \lim\limits_{x=-\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x=+\infty} a^x = +\infty \end{cases}$$

$a < 1$. La fonction est décroissante ; la courbe représentative est celle de la figure (1218 *b*).

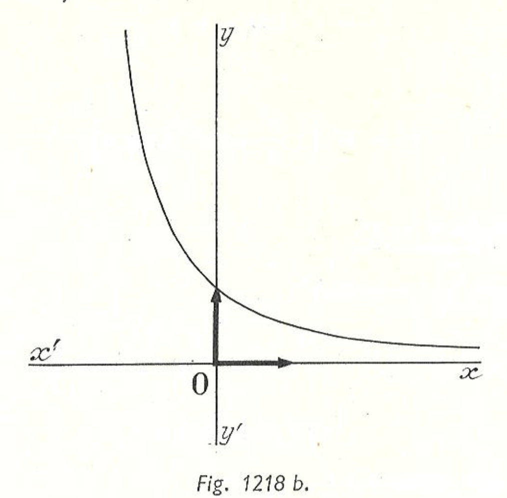
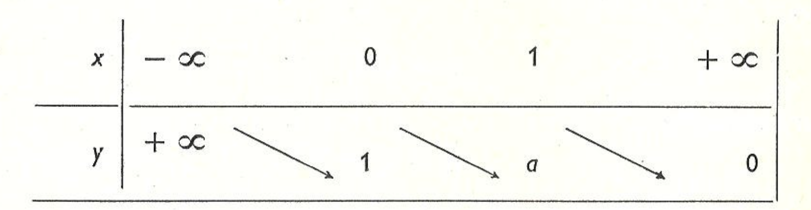


Fig. 1218 b.

Le tableau de variation est :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

On voit que :

$$a < 1 \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x=-\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x=+\infty} a^x = 0 \end{array} \right.$$

1219. Fonctions $y = u^v$.

Soit une fonction $y = u^v$, dans laquelle u et v sont des fonctions dérivables de la variable x.

Elle est définie si u est positif.

On a immédiatement :

$$\text{Log}\, y = v . \text{Log}\, u$$

En dérivant par rapport à x, on obtient :

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \text{Log}\, u + v \cdot \frac{u'}{u}.$$

D'où :

$$\mathbf{y' = u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \cdot \text{Log}\, u\right)}. \qquad (1219\,;\,1)$$

1220. Dérivée de $y = x^\alpha$.

En particulier, on considère :

$$y = x^\alpha \qquad \alpha \in \mathrm{R}$$

On a :

$$\text{Log}\, y = \alpha \,.\, \text{Log}\, x$$

En dérivant par rapport à x :

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

ou

$$y' = \alpha \cdot \frac{y}{x}$$

et finalement:

$$y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1} \qquad (1220\,;\,1)$$

La dérivée de $y = x^\alpha$ est $y' = \alpha x^{\alpha-1}$.

1221. Formes indéterminées 0^0, ∞^0, 1^∞.

On considère une fonction $y = u^v$.

Si lorsque x tend vers a, u et v tendent vers 0, on a une forme indéterminée 0^0.

Si lorsque x tend vers a, u tend vers $+\infty$ et v tend vers 0, on a une forme indéterminée ∞^0.

Si lorsque x tend vers a, u tend vers 1 et v tend vers $+\infty$, on a une forme indéterminée 1^∞.

Ces formes indéterminées s'étudient à l'aide du logarithme de $y = u^v$:

$$\text{Log}\, y = v \,.\, \text{Log}\, u$$

On est alors ramené à la forme indéterminée $0 \,.\, \infty$.

1222. Limites diverses.

1° On se propose de chercher la limite de $\frac{x^\alpha}{e^x}$ pour x tendant vers $+\infty$, α étant un nombre réel positif.

On a :

$$\text{Log}\,\frac{x^\alpha}{e^x} = \alpha \cdot \text{Log}\,x - x\,\text{Log}\,e$$

$$= x\left[\alpha \cdot \frac{\text{Log}\,x}{x} - 1\right]$$

et

$$\lim_{x=+\infty} \text{Log}\,\frac{x^\alpha}{e^x} = -\infty$$

Donc :

$$\mathbf{Lim}_{x=+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = \mathbf{0}. \qquad (1222\,;\,1)$$

2° Comme $a = e^{\text{Log}a}$ et $a^x = e^{x\,\text{Log}a}$, on a aussi, pour $a < 1$

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\mathbf{a}^x} = \mathbf{0}. \qquad (1222\,;\,2)$$

3° On considère le rapport $\frac{\text{Log}\,x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, et on cherche sa limite pour $x = +\infty$. On pose $x = e^u$. D'où :

$$\frac{\text{Log}\,x}{x^\alpha} = \frac{\text{Log}\,e^u}{e^{\alpha u}} = \frac{u}{a^u}$$

avec $a = e^\alpha$, et d'après (1222; 2) ce rapport $\frac{u}{a^u}$ tend vers 0.

Donc :

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\mathbf{Log\,x}}{\mathbf{x}^\alpha} = \mathbf{0}. \qquad (1222\,;\,3)$$

4° Soit maintenant l'expression x^α Log x avec $\alpha > 0$; on cherche sa limite pour $x = 0^+$.

On pose : $x = \frac{1}{u}\cdot$ D'où :

$$x^\alpha \cdot \text{Log}\,x = -\frac{\text{Log}\,u}{u^\alpha}.$$

D'après (1222; 3) ce rapport tend vers 0.

Donc :

$$\lim_{x=0+} \mathbf{x}^\alpha\,\mathbf{Log\,x} = \mathbf{0}. \qquad (1222\,;\,4)$$

1223. Progressions géométriques illimitées.

Au nº 349, on a étudié les progressions géométriques limitées de n termes :

$$u_1 = a \quad u_2 = aq \quad u_3 = aq^2 \quad \ldots \quad u_n = aq^{n-1}$$

Après avoir posé :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Si $q \neq 1$, on a obtenu (cf. formule 350; 2) :

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

Si $q = 1$, on a obtenu (cf. formule 350; 4) :

$$S_n = na$$

On suppose maintenant que la progression est illimitée :

$$u_1 = a \quad u_2 = aq \quad \ldots \quad u^n = aq^{n-1} \ldots$$

Si $|q| < 1$, on a $\lim\limits_{n=+\infty} |q|^n = 0$, donc aussi $\lim\limits_{n=+\infty} q^n = 0$.

D'où :

$$S = \lim_{n=+\infty} S_n$$

$$= \lim_{n=+\infty} \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

ou

$$\boldsymbol{S = \frac{a}{1 - q}}. \qquad (1223\,;\,1)$$

$S = \dfrac{a}{1 - q}$ est la somme de la progression géométrique illimitée, dont le premier terme est a et dont la raison est q.

Si $|q| > 1$, on a $\lim\limits_{n=+\infty} |q|^n = +\infty$, donc aussi $\lim\limits_{n=+\infty} q^n = \infty$.

D'où :

$$S = \lim_{n=+\infty} S_n$$

$$= \infty$$

On dit alors que la progression géométrique illimitée est divergente.

Si $q = 1$, $S_n = na$ tend évidemment vers ∞, et la progression est encore divergente.

Si $q = -1$, on a $S_{2p} = 0$ et $S_{2p+1} = a$, la progression est encore divergente.

CHAPITRE XC

COURBES PARAMÉTRÉES

1224. Étude des courbes paramétrées.

Soit une courbe C définie dans l'espace R^3 par les équations :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

f, g, h étant des fonctions dérivables dans $[\alpha; \beta]$.

Pour étudier la courbe, après avoir examiné l'existence d'éléments de symétrie on étudie les variations des fonctions f, g, h.

Des complications peuvent apparaître qui, étant hors du programme de ce livre, sont exclues des exemples suivants.

1225. Exemples de courbes planes paramétrées.

◇ *Exemple 1. — Étudier la courbe définie par les équations*

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont définies, continues et dérivables pour toutes les valeurs de t.

On a :

$$x(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 0$$

$$\lim_{t=+\infty} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t=+\infty} y = +\infty.$$

De plus :

$$x(-t) = \frac{-t}{1+t^2} = -x(t)$$

$$y(-t) = \frac{-t^3}{1+t^3} = -y(t).$$

Donc le point O est centre de symétrie de la courbe. Par suite il suffit de faire varier t dans $[0; +\infty]$.

Les dérivées des fonctions sont :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Dans $[0\,; +\infty[$, $\frac{dx}{dt}$ s'annule pour $t = 1$, $\frac{dy}{dt}$ est toujours positive.

D'où le tableau suivant :

t	0		1		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$	1	+	0	−	
x	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+	1	+	
y	0	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

En se basant sur les variations de x et de y, on peut construire la courbe C (fig. 1225 *a*).

Le vecteur $\vec{T}\left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}\right)$ est tangent à la courbe et peut servir à déterminer les tangentes.

◇ *Exemple 2. — Étude de la courbe C définie par les équations :*

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad t \in [0\,; 2\pi]$$

On a :

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0$$
$$x(2\pi) = 2\pi \qquad y(2\pi) = 0$$
$$x(\pi) = \pi \qquad y(\pi) = 2$$

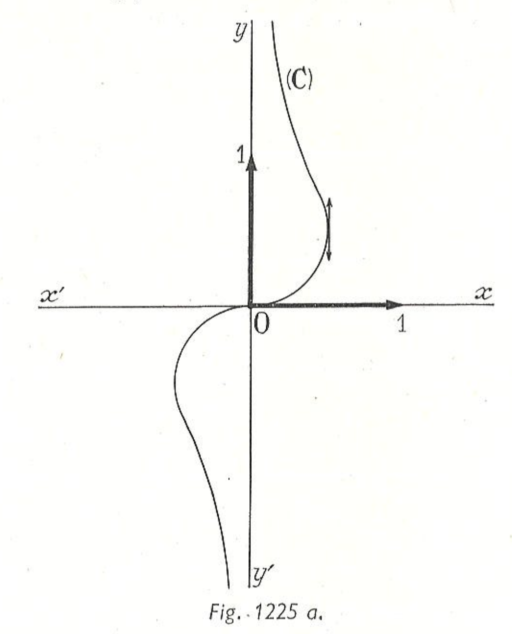


Fig. 1225 a.

De plus :

$$x(2\pi - t) = 2\pi - t - \sin(2\pi - t)$$
$$= 2\pi - (t - \sin t)$$
$$= 2\pi - x(t)$$
$$y(2\pi - t) = 1 - \cos(2\pi - t)$$
$$= 1 - \cos t$$
$$= x(t)$$

Ces résultats montrent (fig. 1225 *b*) que la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie.

Il suffit donc d'étudier les fonctions dans $[0; \pi]$.

Les dérivées sont :

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin t.$$

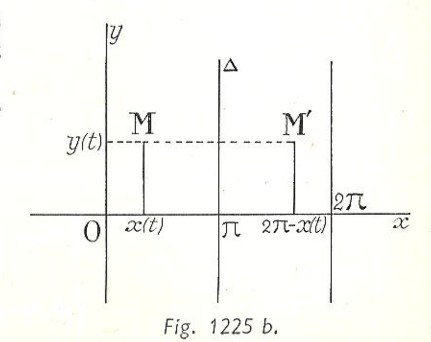


Fig. 1225 b.

Elles s'annulent pour $x = 0$, et $\frac{dy}{dt}$ s'annule de plus pour $x = \pi$.

On construit alors facilement le tableau suivant :

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	1	$+$	2
x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi - 2}{2}$	$\nearrow$	π
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	1	$+$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

La courbe représentative (fig. 1225 c) est un arc de cycloïde.

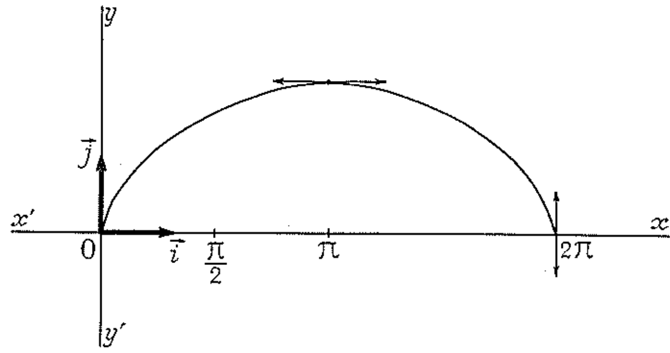


Fig. 1225 c.

◇ *Exemple 3. — Étude de la courbe définie par les équations*

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{t}{1 + t^3} \end{cases}$$

Les fonctions x et y sont définies pour toutes les valeurs de t sauf $t = -1$.

Les dérivées sont :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3t^2}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

On construit alors facilement le tableau suivant :

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	‖	$-$	0	$-$		$-$	
x	0	↘	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	‖	$+$	1	$+$	0	$-$	
y	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$	↘	0

Lorsque t tend vers -1, les fonctions x et y tendent vers ∞; la courbe a donc une branche infinie. Il faut rechercher si cette branche possède une asymptote (cf. n° 1164).

On a :

$$\frac{y}{x} = t$$

et donc :

$$\lim_{t=-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -1.$$

De plus :

$$y + x = \frac{t+1}{t^3+1}$$

$$= \frac{1}{t^2 - t + 1}$$

et donc :

$$\lim_{t=-1} (y + x) = \frac{1}{3}$$

La droite d'équation $y = - x + \frac{1}{3}$ est asymptote.

On a encore (cf nº 1164) :

$$\overline{PM} = \varphi(t) = y + x - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{t^2 - t + 1} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2 + t - t^2}{3(t^2 - t + 1)}.$$

Le dénominateur est positif quel que soit t; le numérateur donne le signe de l'expression $\varphi(t)$.

Pour $t = -1$, on a évidemment $\varphi(-1) = 0$.

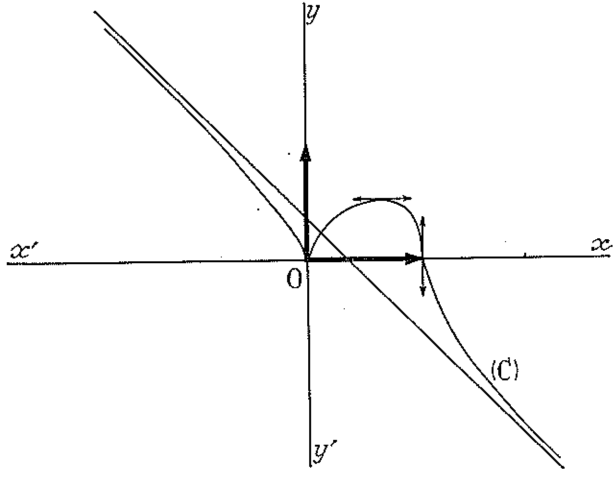


Fig. 1225 d.

On pose $t = -1 + \varepsilon$, et on a φ

$$2 + t - t^2 = 3\,\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Lorsque ε est très petit, $\varphi(t)$ a le signe de ε; cela permet de placer la courbe par rapport à l'asymptote (fig. 1225 *d*).

1226. Hélice circulaire.

Soit la courbe C, de l'espace R^3 rapporté à des axes orthonormés, ayant pour équations :

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \sin u \\ z = b \cdot u \end{cases}$$

Cette courbe est appelée une hélice circulaire; on se propose d'étudier ses principales propriétés (fig. 1226 *a*).

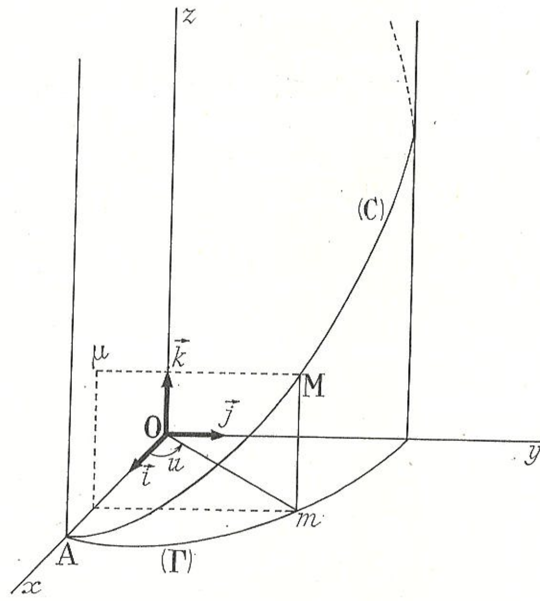


Fig. 1226 a.

1° Projection sur le plan xOy.

Le point M de la courbe C se projette orthogonalement sur le plan xOy en un point m dont les coordonnées sont :

$$x = a \cos u$$
$$y = a \sin u$$

Le lieu de m est donc le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et u est l'angle polaire du point m :

$$u = \overline{\text{angle}}\left(Ox\,;\,\overrightarrow{Om}\right)$$

Ainsi la courbe C est tracée sur le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon a.

On a :

$$\overline{\text{arc}}\ \text{A}m = au$$

donc :

$$\overline{m\text{M}} = b \cdot u$$
$$= \frac{b}{a} \cdot \overline{\text{arc}}\ \text{AM}.$$

Et :

La côte d'un point M de l'hélice est proportionnelle à l'abscisse curviligne de sa projection sur le plan xOy.

2° Projection sur le plan yOz.

Le point M de la courbe C se projette orthogonalement sur le plan yOz en un point μ dont les coordonnées sont :

$$y = a \sin u$$
$$z = bu$$

D'où :

$$y = a \sin \frac{z}{b}.$$

Le lieu du point μ est donc une courbe sinusoïdale.

3° Vecteur tangent.

Le vecteur tangent a pour coordonnées :

$$\frac{\overrightarrow{d\text{M}}}{du} \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = -a \sin u \\ \dfrac{dy}{du} = a \cos u \\ \dfrac{dz}{du} = b \end{cases}$$

et par suite :

$$\left\| \frac{\overrightarrow{d\text{M}}}{du} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

L'angle V de l'axe Oz de vecteur unitaire $\vec{k}$, et de ce vecteur tangent, s'obtient facilement. On a :

$$\vec{k} \cdot \frac{\overrightarrow{d\text{M}}}{du} = b$$
$$= \| k \| \cdot \left\| \frac{\overrightarrow{d\text{M}}}{du} \right\| \cdot \cos \text{V}$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \text{V}$$

D'où :

$$\cos V = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (1226 ; 1)$$

Et :

L'angle de l'axe $z'Oz$ et de la tangente à l'hélice circulaire est constant.
De (1226; 1) on déduit :

$$\sin V = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{tg } V = \frac{a}{b}$$

4° Abscisse curviligne.

L'élément d'arc de l'hélice, $ds = \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{du} \right\| du$, est donné par

$$(ds)^2 = \left[\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2\right] \cdot (du)^2$$
$$= (a^2 + b^2) \cdot (du)^2$$

et

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2}\, du \qquad (1226 ; 2)$$

l'hélice étant orientée dans le sens des u croissants.

Si M est le point de paramètre u, l'arc IM a pour mesure algébrique (abscisse curviligne de M) :

$$\overline{\text{arc}}\ \text{IM} = s = \int_0^u \sqrt{a^2 + b^2} \cdot dt$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u$$

Donc

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot u \qquad (1226 ; 3)$$

D'où :

$$z = b \cdot u$$
$$= b \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot s$$

ou

$$z = s \cdot \cos V \qquad (1226 ; 4)$$

L'arc Am a pour mesure algébrique $\overline{\text{arc}}\ \text{A}m = \sigma = au$. D'où les relations :

$$\sigma = au$$

$$= a \cdot \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot s$$

ou

$$\sigma = s \cdot \sin V \qquad (1226\,;\,5)$$

Par suite :

$$z = \sigma \cdot \text{cotg } V \qquad (1226\,;\,6)$$

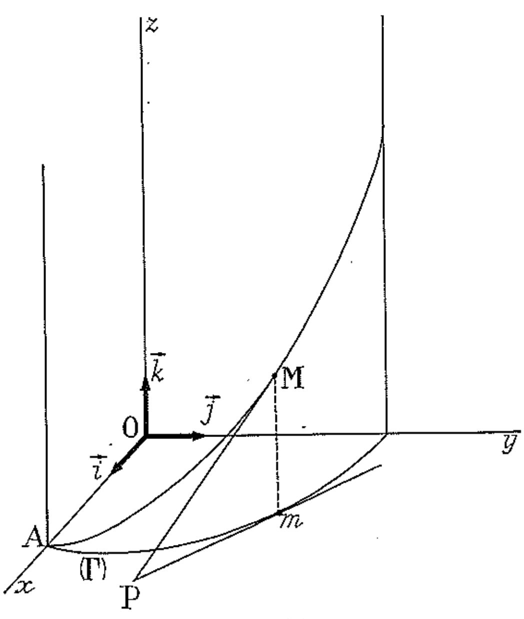


Fig. 1226 b.

5° Tangente en M.

La tangente en M coupe le plan xOy en P (fig. 1226 b). Dans le triangle PmM on a :

$$\overline{m\text{M}} = \overline{\text{PM}} \cdot \cos V$$

ou

$$z = \overline{\text{PM}} \cos V$$

Donc en comparant avec (1226; 4), on a :

$$\overline{PM} = s \qquad (1226\,;\,7)$$

De plus :

$$\overline{mM} = \overline{Pm} \cdot \text{cotg V}$$

ou

$$z = \overline{Pm} \text{ cotg V}$$

Donc en comparant avec (1226; 6), on a :

$$\overline{Pm} = \sigma. \qquad (1226\,;\,8)$$

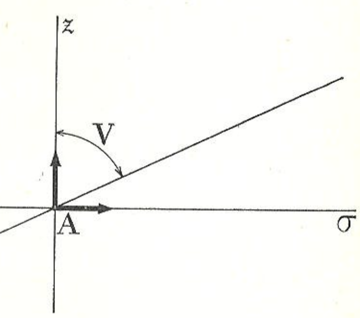


Fig. 1226 c.

Ces résultats montrent que si on développe le cylindre de révolution sur lequel est tracée l'hélice, l'hélice se développe suivant la droite d'équation $z = \sigma \cdot \text{cotg V}$ (fig. 1226 *c*).

CHAPITRE XCI

APPLICATIONS DES PRIMITIVES

1227. Aire d'une surface.

L'aire de la surface limitée par un arc AB d'une courbe (C) d'équation $y = f(x)$, l'axe $x'Ox$ et les droites d'équation $x = \alpha$, $x = \beta$ passant respectivement par A et B est donnée par la formule (cf. nº 1153) :

$$\mathcal{A} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, dx$$

ou

$$\mathcal{A} = F(\beta) - F(\alpha)$$

◇ *Exemple 1. — Soit la courbe C d'équation $y = x^2$. Calculer l'aire de la surface limitée par la courbe, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 1$.*

La courbe est une parabole facile à tracer (fig. 1227 *a*).

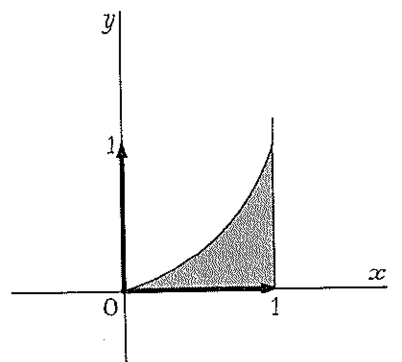
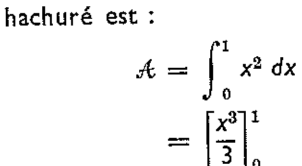


Fig. 1227 *a*.

L'aire du triangle mixtiligne hachuré est :



$$\mathcal{A} = \int_0^1 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

ou

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}$$

◇ *Exemple 2. — Calculer l'aire de la surface limitée par l'axe $x'Ox$ et l'arche d'une sinusoïde.*

L'aire est donnée par (fig. 1227 *b*).

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi \sin x \, dx$$
$$= [-\cos x]_0^\pi$$
$$= -\cos \pi + \cos 0$$

ou

$$\mathcal{A} = 2.$$

◇ *Exemple 3. — Étudier la courbe C d'équation $y = x + \sin x$, $x \in [0; \pi]$. Calcul de la surface limitée par la courbe et la première bissectrice.*

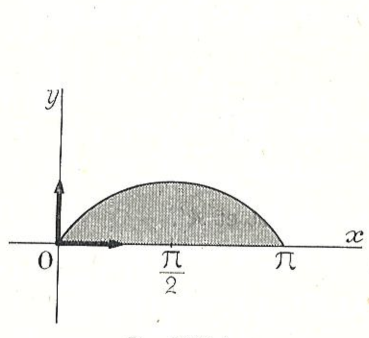


Fig. 1227 b.

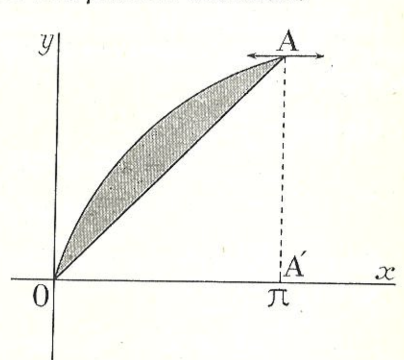


Fig. 1227 c.

La fonction y est définie, continue, dérivable dans $[0; \pi]$. La dérivée est $y' = 1 + \cos x$ qui s'annule pour $x = \pi$.

D'où le tableau:

x	0		π
y'	2	$+$	0
y	0	↗	π

La dérivée seconde est $y'' = -\sin x$; entre 0 et π, y'' est négative, donc la concavité est tournée vers les y négatifs.

La courbe représentative est celle de la figure (1227 *c*.)

L'aire est donnée par

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi [(x + \sin x) - x]\, dx$$
$$= \int_0^\pi \sin x\, dx$$

ou

$$\mathcal{A} = 2.$$

1228. Aire et transformations.

On envisage dans le plan orthonormé une transformation affine régulière f. Un parallélogramme ABCD a pour image un parallélogramme A'B'C'D'.

On pose :

$$\mathcal{A} = \overline{\text{aire}}\ \text{ABCD} = \text{Det}\,(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\ \overrightarrow{\text{AD}})$$
$$\mathcal{A}' = \overline{\text{aire}}\ \text{A'B'C'D'} = \text{Det}\,(\overrightarrow{\text{A'B'}}\,;\ \overrightarrow{\text{A'D'}})$$

On se propose de chercher une relation entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

Si

$$\overrightarrow{\text{AB}} = \text{X}\vec{i} + \text{Y}\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{AD}} = \text{X}'\vec{i} + \text{Y}'\vec{j}, \text{ on a :}$$
$$\overrightarrow{\text{A'B'}} = \text{X}\, f(\vec{i}) + \text{Y}\, f(\vec{j}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{A'D'}} = \text{X}'\cdot f(\vec{i}) + \text{Y}'\cdot f(\vec{j})$$

Et :

$$\mathcal{A}' = \text{Det}\,(\overrightarrow{\text{AB}}\,;\ \overrightarrow{\text{AD}})\cdot \text{Det}\,[f(\vec{i})\,;\ f(\vec{j})]$$
$$= \mathcal{A}\cdot \text{Det}\,(f(\vec{i})\,;\ f(\vec{j}))$$

Le problème revient donc à déterminer $\text{Det}\,[f(\vec{i});\, f(\vec{j})]$.

1° *Si f est une isométrie*, on a $\text{Det}\,[f(\vec{i});\, f(\vec{j})] = \pm 1$. Donc :

$$\mathcal{A}' = \pm\, \mathcal{A}, \qquad (1228;\ 1)$$

et les aires sont conservées par isométrie.

2° *Si f est une affinité d'axe* x'Ox *et de rapport* k, on a :

$$f(\vec{i}) = i$$
$$f(\vec{j}) = k\cdot\vec{j}$$

D'où :

$$\text{Det}\,[(f(\vec{i})\,;\ f(\vec{j})] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k$$

et

$$\mathcal{A}' = \mathbf{k}\mathcal{A} \qquad (1228\,;\,2)$$

Donc :

Si S′ est la surface affine de la surface S, l'aire $\mathcal{A}'$ de S′ est $\mathcal{A}' = k\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ étant l'aire de S.

3° *Si f est une homothétie* hom (0; k), on a :

$$f(\vec{i}) = k \cdot \vec{i}$$

$$f(\vec{j}) = k \cdot \vec{j}$$

et

$$\text{Det}\left[f(\vec{i})\,;\,f(\vec{j})\right] = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2$$

et

$$\mathcal{A}' = \mathbf{k}^2\mathcal{A} \qquad (1228\,;\,3)$$

Si S′ est la surface homothétique de la surface S dans une homothétie de rapport k, l'aire $\mathcal{A}'$ de S est $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ étant l'aire de S.

4° Si f est une similitude de rapport k, on a encore :

$$\mathcal{A}' = k^2 \cdot \mathcal{A}.$$

5° Ces résultats s'étendent facilement à l'espace.

1229. Volume et transformations.

Les méthodes du n° 1228 précédent s'étendent aux volumes des solides de l'espace.

En particulier, **si f est une similitude de rapport k, on a $V' = k^3 \cdot V$.**

1230. Volume d'un solide.

1° Soit un solide Σ rapporté aux axes orthonormés $Oxyz$ (fig. 1230 a).

Un plan P parallèle au plan Oxy coupe Σ suivant une surface plane S dont l'aire $\mathcal{A}$ est une fonction de la côte z du plan.

L'élément de volume dV est le volume du solide compris entre les plans de côtes z et $z + dz$. Ce solide peut être assimilé à un cylindre ou à un prisme et on a :

$$dV = \mathcal{A}(z) \cdot dz$$

Par suite le volume du solide compris entre les plans de côtes α et β est donné par :

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \mathcal{A}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{dz}. \qquad (1230\,;\,1)$$

La méthode est intéressante si on sait calculer $\mathcal{A}(z)$.

◇ *Exemple. — Volume d'une pyramide ou d'un cône.*

Soit un cône ou une pyramide de sommet O et dont la base est située dans le plan d'équation $z = h$ (fig. 1230 *b*).

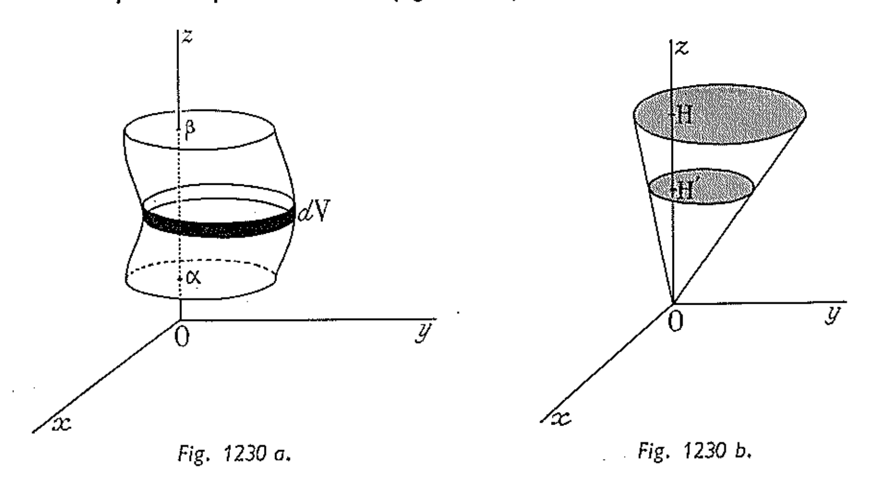


Fig. 1230 a. *Fig. 1230 b.*

Si B est l'aire de la base, le plan de côte z coupe le solide suivant une section homothétique de la base dans hom $\left(0; \frac{z}{k}\right)$. D'où :

$$\mathcal{A}(z) = \frac{z^2}{h^2} B$$

Par suite :

$$V = \int_0^h \frac{Bz^2}{h^2} dz$$
$$= \frac{B}{h^2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h$$
$$= \frac{B}{h^2} \times \frac{h^3}{3}$$

et enfin :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} Bh} \qquad (1230 ; 2)$$

Si la base est un disque de rayon R (cône à base circulaire) on a :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.} \qquad (1230 ; 3)$$

2° Si le solide Σ est de révolution d'axe Oz, on a :

$$\mathcal{A}(z) = \pi [R(z)]^2$$

et par suite :

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [R(z)]^2 \cdot dz \qquad (1230\,;\,4)$$

◇ *Exemple. — Volume d'un segment sphérique.*

Soit la sphère Σ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Un segment sphérique est le solide limité par la sphère et deux plans parallèles d'équations $z = \alpha$ et $z = \beta$ (fig. 1230 *c*).

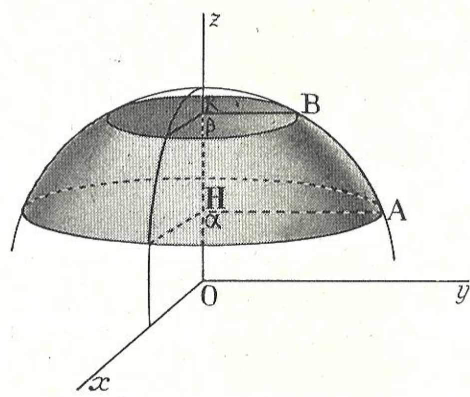


Fig. 1230 c.

C'est donc un solide de révolution d'axe Oz.

On a ici :

$$[R(z)]^2 = R^2 - z^2$$

D'où le volume du segment sphérique :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (R^2 - z^2)\, dz \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \pi \left[R^2(\beta - \alpha) - \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) \right] \\ &= \pi(\beta - \alpha) \cdot \left[R^2 - \frac{1}{3}(\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2) \right]. \end{aligned}$$

En particulier le volume de la sphère est, en prenant $\alpha = -R$ et $\beta = +R$, $\beta - \alpha = 2R$:

$$V = \pi \left[2R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right]$$

ou

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad (1230\,;\,5)$$

3° Très souvent :

$$\mathcal{A}(z) = az^2 + bz + c$$

D'où :

$$\begin{aligned}
V &= \int_\alpha^\beta (az^2 + bz + c)\,dz \\
&= \left[a\frac{z^3}{3} + b\frac{z^2}{2} + c\cdot z\right]_\alpha^\beta \\
&= \left(\frac{a\beta^3}{3} + \frac{b\beta^2}{2} + c\beta\right) - \left(\frac{a\alpha^3}{3} + \frac{b\alpha^2}{2} + c\alpha\right) \\
&= \frac{a}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{b}{2}(\beta^2 - \alpha^2) + c(\alpha - \beta) \\
&= \frac{\beta - \alpha}{6}\cdot[2a(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 3b(\beta + \alpha) + 6c] \\
&= \frac{\beta - \alpha}{6}\Big\{(a\beta^2 + b\beta + c) + (a\alpha^2 + b\alpha + c) \\
&\qquad + 4\left[a\cdot\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} + b\cdot\frac{\alpha + \beta}{2} + c\right]\Big\}.
\end{aligned}$$

Or :

$\beta - \alpha = h$, hauteur du solide.

$$\mathcal{A}(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c = \mathcal{A}_0$$
$$\mathcal{A}(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c = \mathcal{A}_1.$$

et

$$\mathcal{A}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = a\,\frac{(\alpha + \beta)^2}{4} + b\cdot\frac{\alpha + \beta}{2} + c = \mathcal{A}_m.$$

D'où la formule :

$$V = \frac{h}{6}[\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + 4\mathcal{A}_m]. \qquad (1230\,;\,6)$$

$\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_m$ sont respectivement les aires des bases et l'aire de la section équidistante des bases.

La formule (1230; 6) est connue sous le nom de formule des trois niveaux.

◇ *Exemple.* — Volume d'un tronc de pyramide ou d'un tronc de cône à bases parallèles.

On a (fig. 1230 *d*) :

$$\frac{\mathcal{A}_0}{\alpha^2} = \frac{\mathcal{A}_1}{\beta^2} = \frac{A_m}{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}$$

ou

$$\frac{\sqrt{\mathcal{A}_0}}{\alpha} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_1}}{\beta} = \frac{2\cdot\sqrt{\mathcal{A}_m}}{\alpha+\beta}$$

$$= \frac{\sqrt{\mathcal{A}_0}+\sqrt{\mathcal{A}_1}}{\alpha+\beta}$$

Donc :

$$\sqrt{\mathcal{A}_m} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}_0}+\sqrt{\mathcal{A}_1}}{2}$$

et

$$\mathcal{A}_m = \frac{\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + 2\sqrt{\mathcal{A}_0\,\mathcal{A}_1}}{4}$$

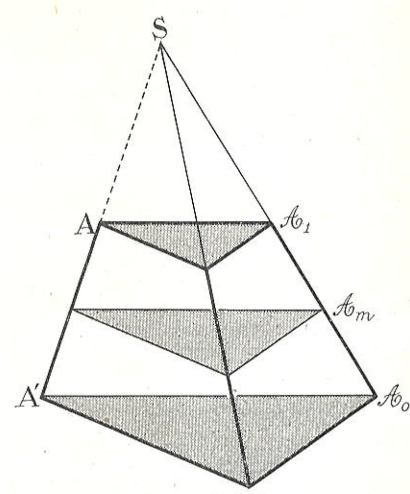


Fig. 1230 d.

La formule (1230 ; 6) devient alors :

$$V = \frac{h}{6}\left[\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + 2\sqrt{\mathcal{A}_0\,\mathcal{A}_1}\right]$$

ou

$$\boldsymbol{V = \frac{h}{3}\left[\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \sqrt{\mathcal{A}_0\,\mathcal{A}_1}\right]} \qquad (1230\,;\,7)$$

S'il s'agit d'un tronc de cône à bases circulaires, on a :

$$\mathcal{A}_0 = \pi R_0^2, \quad \mathcal{A}_1 = \pi R_1^2 \quad \sqrt{\mathcal{A}_0\,\mathcal{A}_1} = \pi R_0 R_1$$

et finalement :

$$\boldsymbol{V = \frac{\pi h}{3}\left[R_0^2 + R_1^2 + R_0 R_1\right]} \qquad (1230\,;\,8)$$

CHAPITRE XCII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1231. Opérateurs différentiels.

1° On considère l'ensemble E des fonctions dérivables sur $I = [\alpha; \beta]$ et l'ensemble F des fonctions définies sur I.

On appelle opérateur différentiel $\frac{\mathbf{d}\,.}{\mathbf{dx}}$ ***l'application qui à la fonction f ∈ E fait correspondre la fonction dérivée*** $\mathbf{f}' = \frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}} \in F$.

$$\frac{d.}{dx}: \qquad f \in E \longrightarrow \frac{df}{dx} \in F.$$

Si $y = f(x)$ on note souvent $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'$.

2° On peut généraliser et définir un opérateur différentiel

$$L. = a\frac{d.}{dx} + b.$$

$$L: \qquad y \in E \longrightarrow L(y) = a\frac{dy}{dx} + b \cdot y \in F.$$

3° On considère l'ensemble E des fonctions deux fois dérivables sur $I = [\alpha; \beta]$ et l'ensemble F des fonctions définies sur I.

On appelle opérateur différentiel $\frac{\mathbf{d}^2\,.}{\mathbf{d}^2\mathbf{x}}$ ***l'application qui à la fonction f ∈ E fait correspondre la fonction dérivée seconde*** $\mathbf{f}'' = \frac{\mathbf{d}^2\mathbf{f}}{\mathbf{dx}^2} \in F$:

$$\frac{d^2}{dx^2}: \qquad y \in E \longrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} \in F.$$

4° On peut encore généraliser et définir un opérateur différentiel :

$$L = a\,\frac{d^2.}{dx^2} + b\cdot\frac{d.}{dx} + c.$$

$$L: \qquad y \in E \longrightarrow L(y) = a\,\frac{d^2 y}{dx^2} + b\cdot\frac{dy}{dx} + cy \in F.$$

5° ***Les opérateurs différentiels précédents sont linéaires.***

En effet, par exemple :

$$L(y+z) = a\,\frac{d^2(y+z)}{dx^2} + b\cdot\frac{d(y+z)}{dx} + c(y+z)$$

$$= a\left[\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dx^2}\right] + b\cdot\left[\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\right] + c(y+z)$$

$$= \left(a\,\frac{d^2 y}{dx^2} + b\,\frac{dy}{dx} + cy\right) + \left(a\,\frac{d^2 z}{dx^2} + b\cdot\frac{dz}{dx} + cz\right)$$

ou

$$L(y+z) = L(y) + L(z).$$

De même :

$$L(\alpha y) = a\,\frac{d^2(\alpha y)}{dx^2} + b\cdot\frac{d(\alpha y)}{dx} + c\cdot(\alpha y)$$

$$= \alpha\cdot a\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha\cdot b\,\frac{dy}{dx} + \alpha\cdot cy$$

$$= \alpha\cdot\left(a\,\frac{d^2 y}{dx^2}\right) + b\,\frac{dy}{dx} + cy\Big)$$

ou

$$L(\alpha y) = \alpha\cdot L(y).$$

Ces deux résultats montrent que L est linéaire.

1232. Équations différentielles linéaires.

Soient une application différentielle linéaire L de E dans F, et une fonction f de F, alors

$$\mathbf{L(y) = f(x)}$$

est une équation différentielle linéaire.

La solution générale de cette équation est l'ensemble des fonctions de E qui ont pour image par L la fonction f.

1233. Équation $y' = f(x)$.

Soit l'équation :

$$y' = f(x).$$

La solution générale est l'ensemble des fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$, c'est donc la primitive générale de $f(x)$:

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

◇ *Exemple 1. — Résoudre l'équation* $y' = 2x^2 - x + 1$.

On a immédiatement :

$$y = \int (2x^2 - x + 1)\,dx$$

ou

$$y = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

◇ *Exemple 2. — Résoudre* $y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

L'équation s'écrit :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

et

$$y = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

ou

$$y = x + \frac{1}{x} + C.$$

1234. Équation $y'' = f(x)$.

On utilise la même méthode ; on a :

$$y'' = \int f(x)\,dx$$

ou

$$y' = F(x) + A$$

Et ensuite :

$$y = \int [F(x) + A]\,dx$$

et

$$y = \Phi(x) + Ax + B.$$

◇ *Exemple.* — *Résoudre l'équation* : $y'' = 3x^2$.

On a :

$$y' = \int 3x^2\,dx$$
$$= x^3 + A$$

et

$$y = \int (x^3 + A)\,dx$$

ou

$$y = \frac{x^4}{4} + Ax + B.$$

1235. Équation $y' = ay$.

Soit l'équation différentielle :

$$y' = a \cdot y$$

a étant une constante.

Elle s'écrit :

$$\frac{y'}{y} = a$$

Or $\frac{y'}{y}$ est la dérivée de Log y. En intégrant on a donc :

$$\text{Log}\, y = ax + b$$

et

$$y = e^{ax+b}$$

ce qui s'écrit encore :

$$y = e^{ax} \cdot e^{b}$$

ou, en posant $C = e^b$:

$$y = C \cdot e^{ax}$$

1236. Équation $y'' + \omega^2 y = 0$.

Soit l'équation :

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

ω étant une constante positive.

On va ici se contenter de vérifier que $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ est solution de cette équation.

En effet :

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega x + B \sin \omega x \\ y' &= - A\omega \sin \omega x + B\omega \cos \omega x \\ y'' &= A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \sin \omega x \\ &= - \omega^2 (A \cos \omega x + B \sin \omega x) \\ &= - \omega^2 y. \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

On admet ici que $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ est la solution générale de l'équation.

◇ *Exemple 1. — Résoudre l'équation $y'' + 4y = 0$.*

Elle admet la solution générale :

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

◇ *Exemple 2. — Résoudre l'équation $y'' + 3y = 0$.*

Elle admet la solution générale :

$$y = A \cos x\sqrt{3} + B \sin x\sqrt{3}.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE IX.

Étude de courbes algébriques.

Étudier les courbes ayant pour équations :

1683. $y = (x + 3)(x - 2)(x - 5)$.

1684. $y = x^3 - 4x^2 - 11x = 30$.

1685. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 2$.

1686. $y = x^3 + 3x + 14$.

1687. $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2$.

1688. $y = x^3 - 12x$.

1689. $y = x^3 + x - 2$.

1690. $y = x^4 - 8x^2 + 12$.

1691. $y = (x - 1)(x - 5)(2x - 7)$.

1692. $y = x^4 - 4x^3 - 2ox^2 - 49$.

1693. $y = x^3 - x^2 + 2x$.

1694. $y = 2x^3 - 2x^2 - x + 2$.

1695. $y = (x + 1)^3 - 9$.

1696. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

1697. $y = x^3 - 6x^2 + 12x$.

1698. $y = 4x^3 - 6x^2 + 2$.

1699. $y = 2(x + 1)^2(1 - 2x)$.

1700. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

Étude des courbes ayant pour équations :

1701. $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 6x + 8}$.

1702. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$.

1703. $y = \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 15x + 50}$.

1704. $y = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}$

1705. $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 1}$.

1706. $y = \frac{-5x^2 + 7x + 6}{3x^2 + x + 2}$.

1707. $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 2)^2}$.

1708. $y = \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 2x + 1}$.

1709. $y = \frac{x^2 + 2x + 25}{(x + 1)^2}$.

1710. $y = \frac{5}{(x + 2)^2}$.

1711. $y = \frac{1 - x^2}{x^2 - x + 2}$.

1712. $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

1713. $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2}$.

1714. $x = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$.

1715. $y = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 1}$.

1716. $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$.

1717. $y = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$.

1718. $y = \frac{-2x}{x^2 - 2x + 3}$.

1719. $y = \frac{2x^2 - 4x - 5}{x^2 + 1}$.

1720. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

1721. $y = \frac{1 - 2x}{x^2 + x + 1}$.

1722. $y = \frac{3 - 2x}{x^2 + x + 1}$.

1723. $y = -\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 3}$.

1724. $y = -\frac{x^2 + 3}{x^2 + x + 3}$.

1725. $y = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$.

1726. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 4}$.

1727. $y = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3}$.

1728. $y = \frac{(x + 2)(x - 3)}{(x + 1)(x - 6)}$.

1729. $y = \frac{(x - 3)(x - 1)}{5x^2 + 4}$.

1730. $y = \frac{(3x - 1)(2x + 1)}{(6x - 1)(x + 1)}$.

1731. $y = \frac{4 - 3x^2}{(x + 1)(x - 2)^2}$.

1732. $y = \frac{2x^3 - x^2}{2x^2 - 1}$.

1733. $y = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$.

Fonctions circulaires.

Résoudre les équations suivantes :

1734. $\sin \frac{x}{4} + \sin \frac{3x}{4} = 0$.

1735. $\operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 2x = 1$.

1736. $\sin (x^2 + 1)\pi = \sin \pi x.$ $\qquad -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}.$

1737. $\sin 2x + 2\sin 3x + \sin 4x = 0.$

1738. $\sin 3x + 2\sin 4x + \sin 5x = 0.$

1739. $\sin 3x + \cos 3x + \sin 5x + \cos 5x + \sin 7x + \cos 7x = 0.$

1740. $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$

1741. $\sin\left(x + \frac{2\pi}{15}\right) + \sin\left(x + \frac{12\pi}{15}\right) = \cos\frac{\pi}{9}.$

1742. $(2\sin x + 1)^2 = 4 - 3\cos^2 x.$

1743. $16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5 = 0.$

1744. $\cos x + \sqrt{3}\cdot\sin x = \sqrt{2}.$

1745. $\sqrt{3}\cdot\cos x - \sin x = \sqrt{2}.$

1746. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1.$

1747. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{1}{\cos x}.$

1748. $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

1749. $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = 8\sin^2 x.$

1750. $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x.$

1751. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x.$

1752. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{8} - x\right).$

1753. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}.$

Résoudre les inéquations suivantes, dans $[0; 2\pi]$.

1754. $1 - \sqrt{2}\cos x > 0.$

1755. $1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x > 0.$

1756. $2\sin x + \sqrt{3} < 1.$

1757. $\sin x + \sqrt{3}\cdot\cos x < 1.$

1758. $3\operatorname{tg}^2 x < 1.$

1759. $\cos x + \sqrt{2}\cdot\cos^2 x < 1.$

1760. $\sin x - 2\sin^2 x > 0.$

1761. $\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}^2 x + (1 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x + 1 < 0.$

1762. $\cos x - \sqrt{3}\sin x < 1.$

Étudier le signe des fonctions suivantes, dans $[0; 2\pi]$.

1763. $f(x) = \cos x + \sin 2x$.

1764. $f(x) = \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \sin x$.

1765. $f(x) = \sin x + \sin 4x + \sin 7x$.

1766. $f(x) = \cos 3x - \cos 2x$.

1767. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sin x + 1}{4 \cos^2 x - 3}$.

1768. $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 3x \cdot \operatorname{tg} 4x$.

Résoudre les inéquations suivantes, dans $[0; 2\pi]$.

1769. $\dfrac{4 \cos^2 x - 3}{2 \sin x - 1} < 0$.

1770. $\dfrac{2 \operatorname{tg} + 1}{2 \operatorname{tg} x} < 1$.

1771. $\dfrac{2 \operatorname{tg}^2 x - 3}{\operatorname{tg}^2 x - 1} < \dfrac{3}{2}$.

Étudier les fonctions suivantes et tracer les courbes représentatives.

1772. $y = 2 \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

1773. $y = 2 \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

1774. $y = \dfrac{1}{2} \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$.

1775. $y = \dfrac{2}{3} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1776. $y = 4 \sin 2x + \sin x$.

1777. $y = - \sin 2x + \cos x$.

1778. $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$.

1779. $y = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

1780. $y = \cos - \dfrac{1}{2} \cos 2x$.

1781. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}$.

1782. $y = \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x}$.

1783. $y = \cos x + \dfrac{1}{\sin x}$.

1784. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 - 2 \sin x}$.

1785. $y = \dfrac{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^5 x}$.

1786. $y = \dfrac{1 + \sin x}{2 \sin x - 1}$.

1787. $y = \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$.

1787 *a*. $y = \sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x + \dfrac{1}{4} \sin 4x$.

Résoudre les systèmes suivants :

1788. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \dfrac{3}{2} \\ x + y = \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$

1789. $\begin{cases} \cos x - \cos y = \dfrac{1}{4} \\ x + y = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$

1790. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{5}{3} \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$

1791. $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{1}{2} \\ x - y = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

1792. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \cos x \cdot \sin y = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

1793. $\begin{cases} \cos^2 x = \sin^2 y \\ \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

1794. $\begin{cases} \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(y + \dfrac{\pi}{6}\right) \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} 2y. \end{cases}$

Coniques.

Étudier les courbes ayant pour équations :

1795. $y = x + \dfrac{1}{x}.$

1796. $y = 2x - \dfrac{1}{x}.$

1797. $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$

1798. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x}.$

1799. $y = \dfrac{x^2 - x}{x - 2}.$

1800. $y = x + \sqrt{1 - x^2}.$

1801. $y = x + \sqrt{x^2 - 1}.$

1802. $y = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}.$

1803. $y = 1 - x - \sqrt{(x-1)(x+2)}.$

1804. $y = 2x + 1 - \sqrt{x^2 - 1}.$

1805. $y = 2x + 1 + \sqrt{1 - 4x}.$

1806. $y = 2x + 1 \pm \sqrt{3x^2 + 2x - 5}.$

1807. $y = 2x + 1 \pm \sqrt{3x^2 - 6x + 3}.$

1808. $2xy + 2x - 2y - 3 = 0.$

1809. $\dfrac{1}{3}x^2 + 2xy + \dfrac{1}{3}y^2 + 2x - 2y - 3 = 0.$

1810. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0.$

1811. $2(x^2 + xy + y^2) + 2x - 2y - 3 = 0.$

1812. $x^2 + 4xy + 2y^2 + 4x + 2y + 3 = 0.$

1813. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0.$

1814. $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y - 2 = 0.$

1815. $y = x - 2 + \dfrac{1}{x}.$

1816. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}.$

1817. $y = \sqrt{15 + 2x - x^2}.$ Quelle est la nature de la courbe si les axes sont orthonormés ?

1818. $y + x + \sqrt{3 + 2x - x^2}.$

1819. $y = x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}.$

1820. $y = x - 1 + \sqrt{|x^2 - 4|}.$

Fonctions logarithmiques. Fonctions exponentielles.

Développer les expressions suivantes :

1821. $\text{Log}\,(3 \times 5)$ $\qquad \text{Log}\,\frac{3}{5}.$

1822. $\log a^2b^3$ $\qquad \log (ab)^3.$ $\qquad (a > 0\,;\, b > 0)$

1823. $\log (x^2y^4)$ $\qquad \log (x^2 - 1).$

1824. $\log \frac{x-1}{x+1}$ $\qquad \log \frac{(x-1)^2}{x+1}.$

1825. $\log \frac{1}{1-x}$ $\qquad \log \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}.$

1826. $\log \sqrt{1-x^2}$ $\qquad \log \left(x\sqrt{1-x^2}\right)$

Rassembler en un seul logarithme :

1827. $\log a + \log b - \log c$ $\qquad \text{Log}\, x - \text{Log}\, y - \text{Log}\, z.$

1828. $3 \log x - \frac{1}{2}\log (1 + x)$ $\qquad \frac{1}{2}\log (x + y) - \frac{1}{4}\log (x - y).$

1829. $\frac{1}{4}\log (x^2 + y^2) - \frac{2}{3}\log x$ $\qquad \frac{1}{2}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{2}{3}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$

Calculer le nombre x donné par les formules suivantes :

1830. $\log x = 2 \log 3 + \frac{1}{2}\log 6.$

1831. $2 \log x = 4 \log 5 - 2 \log 6.$

1832. $2 \log x + 3 \log (x + 3) = 0.$

Résoudre les équations suivantes :

1833. $\log (35 - x^2) = 3 \cdot \log (5 - x).$

1834. $\log (x - 2) + \log (x + 3) = \log (x^2 + 2x).$

1835. $\text{Log}\,(x^2 - 3x) + \text{Log}\, x - \text{Log}\, 2 = 0.$

1836. $\log (7x - 9)^2 + \log (3x - 4)^2 = 2.$

1837. $\log \sqrt{5x + 8} + \frac{1}{2}\log (2x + 3) = \log 15.$

1838. Résoudre le système

$$\begin{aligned} \text{Log}\, x + \text{Log}\, y &= 1 \\ x + y &= 7\,e. \end{aligned}$$

1839. Résoudre le système.

$$\begin{cases} \log (x - 1) + \log (y + 1) = 1 \\ xy + x + y = 1. \end{cases}$$

Étudier les fonctions suivantes et leurs courbes représentatives :

1840. $y = \text{Log}\, x^2$.

1841. $y = \text{Log}\, (x + 1)$.

1842. $y = \text{Log}\, (x - 1)$.

1843. $y = \text{Log}\, (2 - x)$.

1844. $y = \text{Log}\, (x^2 - x)$.

Étudier les limites suivantes :

1845. $\lim\limits_{x=1} \frac{\text{Log}\, x}{x - 1}$.

1846. $\lim\limits_{x=0} \frac{x - \text{Log}\, (1 + x)}{x^2}$.

1847. $\lim\limits_{x=1} \left[\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\text{Log}\, x}\right]$.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1848. $y = x \cdot \text{Log}\, x$.

1849. $y = \text{Log}\, \text{cotg}\, x$.

1850. $y\, \text{Log}\, x - \text{Log}\, \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

1851. $y = \text{Log}\, \text{tg}\, \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

1852. $y = \frac{x\, \text{Log}\, x}{x^2 - 1}$.

1853. $y = \frac{1}{1 - x^2} \text{Log}\, \frac{1 + x}{1 - x}$.

1854. $y = x^2 \cdot \sqrt{|\text{Log}\, x|}$.

1855. $y = \frac{\text{Log}\, \sin x}{\text{Log}\, \cos x}$.

1856. $y = \text{tg}\, (\text{Log.}\, x)$.

1857. $y = x + \frac{\text{Log}\, |x|}{|x|}$.

Calculer le nombre x donné par les formules suivantes :

1858. $2^x = 16$ $\quad 3^{x-1} = 81$.

1859. $5^x = 1$ $\quad 5^{x-2} = 1$.

1860. $2^x = 8$ $\quad 16^{x-1} = \frac{1}{8}$.

1861. $10^x = 3$ $\quad 3^x = 2^{x+1}$.

1872. $10^x = 4 \cdot 5^{x-2}$ $\quad 11^{x+1} = 7 \cdot 6^{2x-4}$.

Résoudre les équations suivantes :

1863. $9^x - 12 \cdot 3^x + 32 = 0$.

1864. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

1865. $3^{2x+5} - 3 \cdot 3^{x+2} + 18 = 0$.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

1866. $y = (x - 1)\, e^x$.

1867. $y = \frac{e^x}{x}$.

1868. $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^x$.

1869. $y = e^{-x^2+x}$.

1870. $y = e^{x \text{Log}\, x}$.

1871. $y = x^x$.

1872. $y = x^{\frac{1}{x}}$ 1873. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

1874. $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{Log} x}$.

Étudier les fonctions ayant pour équations

1875. $y = x + e^x$.

1876. $y = e^{-x^2+1}$.

1877. $y = e^{(x-1)(x+2)}$.

1878. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (On note $y = \operatorname{ch} x$).

1879. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (On note $y = \operatorname{sh} x$).

1880. $y = x\, e^{\frac{1}{2}|\operatorname{Log} x^2|}$.

Progressions géométriques illimitées.

1831. Soient un triangle équilatéral ABC et AH la hauteur relative au côté BC. On pose $BC = a$.
On mène HB′ perpendiculaire à AB, B′C′ parallèle à BC; on forme ainsi un second triangle équilatéral AB′C′.
De la même manière on déduit de AB′C′ un troisième triangle équilatéral AB″C″, et ainsi de suite.
Soient S_n et Σ_n la somme des périmètres et la somme des aires des n premiers triangles. Trouver les limites S et Σ de S_n et Σ_n lorsque n augmente indéfiniment.

1882. On considère une suite de triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$; ...$A_n\,B_nC_n$, chacun ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle précédent. On appelle S_1; S_2; ... ; S_i ..., S_n ... les aires respectives de ces triangles.

1° Calculer S_1, S_2, ... S_n, en fonction de S supposée connue.

2° Évaluer la somme $S_1 + S_2 + ... + S_n$, et déterminer la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.

3° Quand n augmente indéfiniment, le triangle $A_nB_nC_n$ se réduit à un point. Quel est ce point ?

1883. Dans un cube donné d'arête a on inscrit une sphère, puis on inscrit un cube dans cette sphère et une sphère dans ce second cube, et ainsi de suite.

On demande :

1° La limite de la somme des volumes des cubes.

2° La limite de la somme des volumes des sphères.

1884. Soit P une pyramide, b l'aire de sa base et h la mesure de la hauteur. On coupe P par le plan parallèle à la base qui passe par le milieu de la hauteur SH. On obtient ainsi une deuxième pyramide P′. De P′ on déduit une troisième pyramide P″ comme P′ a été déduite de P, et ainsi de suite.
Trouver l'aire de la base et le volume de la $n^{\text{ième}}$ pyramide, ainsi que la somme des aires des bases et la somme des volumes des n premières pyramides.
Que deviennent ces sommes lorsque n augmente indéfiniment.

1885. Soit un triangle ABC rectangle en A, avec AB = 3 et AC = 4.

Soient A_1 la projection orthogonale de A sur BC;
D_1 la projection orthogonale de A_1 sur AC;
A_2 la projection orthogonale de D_1 sur BC;
D_2 la projection orthogonale de A_2 sur AC,
et ainsi de suite.

Calculer la somme :

$$S_n = AA_1 + A_1D_1 + D_1A_2 + A_2D_2 \pm \dots + A_nD_n$$

Quelle est la limite S de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.

Courbes paramétrées.

Étudier les courbes planes suivantes :

1886. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3. \end{cases}$

1887. $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

1888. $\begin{cases} x = t^2 - 9 \\ y = 4(t + 3) \end{cases}$

1889. $\begin{cases} x = t^2 - 4t \\ y = t^2 + 1. \end{cases}$

1890. $\begin{cases} x = t^2 + t^3 \\ y = t^2 - t. \end{cases}$

1891. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 + t. \end{cases}$

1892. $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t - \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

1893. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

1894. $\begin{cases} x = 2\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = 2\cos\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

1895. $\begin{cases} x = t(t - 1) \\ y = t^2\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

1896. $\begin{cases} x = e^t \\ y = \text{Log}(t - 1). \end{cases}$

1897. $\begin{cases} x = \text{Log}\, t \\ y = t^2 - t^3. \end{cases}$

Applications des primitives.

Construire les courbes suivantes, et calculer l'aire de la surface limitée par la courbe l'axe $x'Ox$ et les droites (α) et (β) d'équations $x = a$, $x = b$.

1898. $y = x^2 + 1$ $\qquad a = 0 \quad b = 2$

1899. $y = x^2 - 3x + 2$ $\qquad a = 1 \quad b = 2$

1900. $y = x^3 - 3x$ $\qquad a = 0 \quad b = 1$

1901. $y = x - \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad a = 1 \quad b = 2.$

1902. $y = x^2 - \dfrac{1}{x^2} + 1$ $\qquad a = 1 \quad b = 2.$

1903. $y = x - \text{Log}\, x$ $\qquad a = 1 \quad b = e.$

1904. $y = x\,e^x$ $\qquad a = 0 \quad b = 1.$

1905. $y = x + \frac{1}{x}$ $a = 1$ $b = 2.$

1906. $y = \cos x$ $a = 0$ $b = \frac{\pi}{2}.$

1907. $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3$ $a = 0$ $b = \frac{\pi}{2}.$

1908. $y = x^4 - 2x^2 + \frac{3}{4}$ $a = -\sqrt{2}$, $b = +\sqrt{2}$.

1909. $y = 2 \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 1$ $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}.$

1910. Soit la courbe (P) d'équation $y = x^2$. On considère la surface limitée par l'axe $x'Ox$, la courbe P et droite (D) d'équation $x = 1$. Calculer le volume du solide engendré par cette surface en tournant autour de Ox.

1911. Soit l'arche de la sinusoïde d'équation $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de Ox.

Équations différentielles.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1912. $y' = 2x^2 - 1.$

1913. $y' = -x^3 + 2x - 1.$

1914. $y' = \cos x.$

1915. $y' = 1 + \text{tg}^2 x.$

1916. $y' = e^x.$

1917. $xy' = 1.$

1918. $x^2 y' + 1 = 0.$

1919. $y'' = x^2.$

1950. $y'' = x^3 - 1.$

1921. $y'' = e^x.$

1922. $y'' = e^{\frac{x}{2}}$

1923. $y'' = \cos x.$

1924. $y' = 2y.$

1925. $y' = -\frac{y}{2}.$

1926. $y'' + 4y = 0.$

1927. $4y'' + y = 0.$

1928. $y'' + a^2 y = 0$

1929. $y'' - y = 0$ Vérifier que $y = e^x$ et $y = e^{-x}$ sont solutions.

1930. $y'' + y = x.$

1931. $y'' + y = \cos 2x.$

Exercices et problèmes divers.

1932. On considère la fonction :

$$f_m : \quad x \in \mathbb{R} \longrightarrow y = f_m(x) = \frac{m^2 x}{2x^2 - 5mx + 2m^2}.$$

où m est un paramètre positif.

1° Déterminer m pour que cette fonction ait un maximum pour $x = 2$. Dans la suite du problème on envisagera la fonction où m a la valeur trouvée précédemment. Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction ainsi obtenue.

2° Soit A le point représentatif du maximum de la fonction. Par A, on mène la parallèle à la tangente à la courbe au point d'abscisse zéro. Calculer les coordonnées des points d'intersection de cette droite avec la courbe.

3° On mène une parallèle à $x'Ox$ d'équation $y = \lambda$ qui coupe la courbe en deux points P et Q; soit le milieu du segment PQ. Construire le lieu du point M lorsque λ prend toutes les valeurs possibles.

4° Les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ étant maintenant orthonormés, soient P′ et Q′ les projections de P et Q sur $x'Ox$; Montrer que lorsque λ varie, les cercles de diamètre P′Q′ restent orthogonaux à un cercle fixe.

1933. Soit (C) la courbe représentative, en axes orthonormés, de la fonction $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$.

1° Construire la courbe (C).

2° m étant un paramètre, la droite d'équation $y = mx$ coupe la courbe (C) en O et en deux autres points au plus. Soient M′ et M″ ces points. Trouver le lieu du milieu du segment M′M″. Déterminer les coordonnées du point de contact de la tangente à (C) issue de O.

3° Soient P′ et P″ les points d'intersection quand ils existent, de la courbe (C) et de la parallèle à l'axe $x'Ox$ d'équation $y = h$. Lieu du milieu du segment P′P″. Montrer qu'il existe une relation indépendante de h entre les abscisses de P′ et P″. Interpréter géométriquement cette relation.

1934. 1° Étudier les variations de la fonction

$$x \longrightarrow y = \frac{x^2 - 5x - 2}{2(x + 1)}.$$

et les représenter graphiquement par une courbe (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

2° Sur le même graphique on trace la droite (D) d'équation $y = ax + b$. Comment faut-il choisir a pour que (D) coupe la courbe (C) en deux points A et B situés sur deux branches distinctes de cette courbe ? Calculer alors les coordonnées du milieu M du segment AB en fonction de a et b. En déduire le lieu géométrique du point M lorsque b varie, a restant fixe.

3° Ce lieu est une droite (Δ). Déterminer a de façon que (D) et (Δ) soient perpendiculaires. Que peut-on dire alors des droites D et Δ ?

1935. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{2x}$. Construire la courbe représentative.

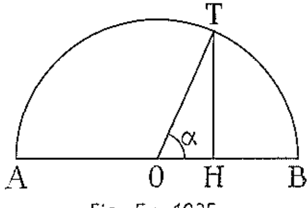


Fig. Ex. 1935

2° Soit un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2R (fig. ex. 1935). Soit un point T du demi-cercle; soit H la projection de T sur AB. On désigne par α, l'angle (OB; OT).

Déterminer α pour que

$$OT + TH + HB = m.TH$$

m étant un nombre donné. On posera $x = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Discuter.

Retrouver les résultats de la discussion en utilisant la courbe tracée dans la première question.

3° Donner une solution géométrique de la question précédente.

1936. Soit SABC une pyramide triangulaire telle qu'on ait BC = CA = AB avec SA = SB = SC. Appelant A′ le milieu de BC, B′ le milieu de CA, C′ le milieu de AB, on forme une deuxième pyramide triangulaire SA′B′C′. Soit O le centre du cercle passant par A, B, C. On pose :

$$x = \frac{OS^2}{OA^2}.$$

On considère les aires latérales de SABC et SA′B′C′.

1° Calculer en fonction de x le rapport de l'aire latérale de SABC à l'aire latérale de SA′B′C′. Soit y le carré de ce rapport.

2° Choisir x de manière que y ait une valeur donnée m^2. Discuter et interpréter les cas limites.

3° Déterminer à 0,01 près le rapport $\frac{OS}{OA'}$ de manière que le rapport $\sqrt{y}$ soit un entier.

4° Étudier les variations de la fonction y quand x croît de 0 à $+\infty$, ainsi que les variations de $\sqrt{y}$. Retrouver ainsi les résultats du 2°.

1937. 1° Représenter graphiquement les variations de la fonction $y = \frac{2x}{1 - x^2}$.

2° Soit C la courbe ainsi définie. Une parallèle à l'axe $x'Ox$ rencontre cette courbe en deux points M′ et M″. Connaissant l'ordonnée m du point P où cette droite rencontre l'axe $y'Oy$:

a) Calculer l'abscisse du milieu A du segment M′M″ et l'abscisse du point B conjugué harmonique de P par rapport à M′M″ en fonction de m;

b) Trouver l'équation du lieu de A lorsque P décrit l'axe $y'Oy$.

c) même question pour le lieu de B.

3° On pose $m = \operatorname{tg} \varphi$.

a) Calculer les abscisses x' et x'' de M′ et M″ en fonction de φ;

b) Calculer l'abscisse de A en fonction de φ;

c) Même question pour l'abscisse de B.

1938. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \frac{x^2 + x + 1}{5x + 8}$. Construire la courbe représentative (H).

2° On coupe la courbe (H) par une droite (D) passant par l'origine O et ayant pour coefficient directeur m.

Former l'équation qui admet pour racines les abscisses des points d'intersection M′ et M″ de (H) et (D). Discuter la réalité des racines. En déduire les coefficients directeurs des tangentes menées par le point O à la courbe (H). Calculer les coordonnées des points de contact de ces tangentes.

3° Soit P le point conjugué harmonique de O par rapport à M′M″. Calculer l'abscisse X de ce point en fonction de m. Former l'équation du lieu de P quand m varie. Vérifier que ce lieu passe par les points de contact trouvés au 2°.

1939. On considère un secteur de cercle OAB dont l'angle au centre (OA; OB) mesure $\frac{\pi}{4}$; la longueur des côtés OA et OB est représentée par R. On inscrit dans ce secteur un rectangle MNPQ; PQ est situé sur OA, M est situé sur OB, N est situé sur l'arc de cercle AB.

1° Déterminer l'angle (OA; ON) = x de façon que le rectangle soit un carré. On calculera l'angle x en degrés ou en grades.

2° Calculer l'aire du rectangle en fonction de x; en donner une expression de la forme

$$A \cos 2x + B \sin 2x + c;$$

Étudier les variations de cette aire.

3° Donner une solution géométrique du 1°.

1940. 1° Vérifier l'identité suivante :

$$(\forall x) : 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2 (2x+1)$$

2° Résoudre l'inéquation :

$$x\sqrt{3-2x} + 1 > 0. \qquad (1)$$

3° Résoudre l'inéquation :

$$x\sqrt{3-2x} - 1 < 0. \qquad (2)$$

4° Étudier les variations de la fonction $x \to z = x^2(3-2x)$, et en déduire sans nouveaux calculs, les variations de la fonction $x \to y = x\sqrt{3} - 2x$.

Tracer approximativement la courbe (C) représentative de la fonction $y = y(x)$ par rapport à deux axes orthonormés Ox, Oy. Retrouver, à l'aide de la courbe (C) les résultats des n°s 2 et 3.

5° Déterminer les coefficients a, b, c pour que l'expression

$$(ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$$

soit une primitive de la fonction $y = y(x)$, et en déduire l'aire de la partie du plan comprise entre le demi-axe Ox et la partie de la courbe (C) dont les points on des abscisses positives.

1941. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \dfrac{3x-4}{x(x-1)}$ et construire la courbe représentative C, par rapport à deux axes orthonormés.

2° Déduire de cette étude le nombre et le signe des racines de l'équation

$$hx^2 - (h+3)x + 4 = 0$$

suivant la valeur donnée à h.

3° Une droite D, d'équation $y = h$, coupe en général la courbe C en deux points M′ et M″. Soit P le point où cette droite D coupe Oy et soit Q le second point de rencontre de Oy avec le cercle circonscrit au triangle OMM′. On pose :

$$\overline{PQ} = z.$$

Établir la relation

$$zh^2 + 4 = 0$$

Étudier la variation de z en fonction de h quand la droite D varie, et construire la courbe représentative.

4° Calculer les abscisses des points M′ et M″ lorsque z et h sont tous deux des entiers rationnels.

1942. Soit la fonction $y = (3x-8)^2(x-1)^3 + 2$.

1° Étudier les variations de y et construire la courbe représentative dans le plan orthonormé.

2° Soient A et C les points de la courbe qui ont pour ordonnée 2 (C étant celui des deux points qui a la plus grande abscisse), et soit B le point de la portion de courbe comprise entre A et C dont l'ordonnée est maximum. Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et les droites passant par A et B et parallèles à y'Oy.

3° On transforme la courbe par l'inversion $f = \text{inv}(O; OA^2)$. Calculer les coordonnées des points B′ et C′ inverses de B et C, la longueur de B′C′ et la pente de la tangente à la courbe image.

1943. Résoudre et discuter l'équation

$$m \cos x - \sin x = m - 1$$

avec la condition :

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}.$$

Cas particulier : $m = 2$.

1944. Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 (x + 2)}{(x - 1)^2}.$$

Représentation graphique.

1945. On considère un demi-cercle dont le diamètre OA est sur l'axe $x'Ox$ (fig. ex. 1945). On considère la corde AM, et on projette M en Q sur $y'Oy$ (OA $= a$).

1° Calculer en fonction de l'abscisse x du point M le volume V du solide engendré par la révolution du trapèze OAMQ autour de Ox.

2° Étudier la variation du volume V quand M décrit le demi-cercle et tracer la courbe représentative.

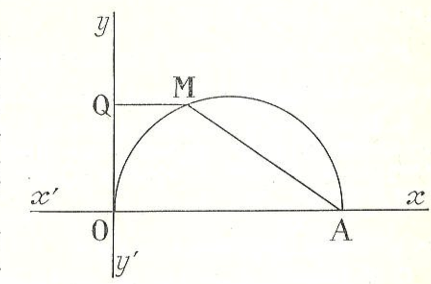


Fig. Ex. 1945

1946. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$ et le point A $(0; a)$. Soit Oz la demi-droite bissectrice de l'angle $(Ox; Oy)$. Une sécante variable issue de A rencontre Ox en M et Oz en P. On pose $\overline{OM} = x$.

1° Évaluer, en fonction de a et de x, l'expression $y = \dfrac{AP \cdot AM}{a}$. Étudier la variation de y lorsque x croît de 0 à ∞. Construire la courbe représentative.

2° Déduire de ce qui précède le nombre des valeurs de x qui correspondent à une valeur donnée k^2 du produit AP. AM. Trouver la mesure des angles aigus A et M du triangle AOM qui correspond au minimum de k^2. On calculera à cet effet la valeur de tg 2 A.

3° Les longueurs a et k étant données, construire les points P et M correspondants à l'aide d'une inversion. Discuter et retrouver tous les résultats du n° 2.

1947. 1° Variation et représentation graphique (C) de la fonction $y = \dfrac{x^2 - 1}{x(5x + 4)}$

2° Équation des droites tangentes à la courbe (C) en ses deux points d'intersection avec l'axe $x'Ox$. Ces deux droites se coupent sur une droite remarquable de la figure; laquelle ?

3° Sur Ox, soient un point A d'abscisse a supérieure à 1 et un point B d'abscisse b comprise entre 0 et 1. Quelle relation doit exister entre a et b pour que la tangente à la courbe au point d'abscisse a passe par le point B.

1948. 1° Déterminer un polynôme du 4e degré sachant que le coefficient du terme de degré 4 est 1, que le polynôme s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$, que le reste de sa division par $x - 2$ est 18, et que le reste de sa division par $x + 2$ est 6.

2° Calculer la dérivée du polynôme $f(x)$ ainsi trouvé, ainsi que les diverses valeurs de la dérivée quand x prend les diverses valeurs qui annulent le polynôme $f(x)$.

3° Représenter graphiquement les variations du polynôme $f(x)$. Préciser les intersections avec les axes de coordonnées et les tangentes en ces points, le maximum et le minimum.

4° Calculer les aires des surfaces comprises entre la courbe et l'axe $x'Ox$.

1949. On considère l'équation :

$$\cos 5x + a \cos 3x + b \cos x = 0$$

a et b étant des nombres donnés.

A. 1° Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $x = \frac{\pi}{6}$ soit solution de l'équation (1) ?

2° Quelle relation doivent vérifier a et b pour que $x = \frac{\pi}{3}$ soit solution de l'équation (1) ?

3° Trouver les valeurs de a et de b pour lesquelles, à la fois, $x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{3}$ sont solutions de l'équation proposée. Résoudre complètement, dans ce cas, l'équation (1).

B. Dans le cas où les coefficients a et b ont des valeurs quelconques, on demande de former l'équation polynomiale qui admet pour racines les valeurs de $u = \cos x$, lorsque x est solution de l'équation (1). Soit (2) l'équation ainsi obtenue; on la mettra sous la forme

$$u.\varphi(u) = 0$$

ou $\varphi(u)$ est un polynôme du 4e degré.

C. 1° Montrer qu'un nouveau changement d'inconnue, défini par $u^2 = v$, transforme l'équation $\varphi(u) = 0$, en une équation du second degré, soit $f(v) = 0$.

2° A quelles conditions doivent satisfaire a et b pour que l'équation $f(v) = 0$ possède deux racines réelles, distinctes ou non qui soient, toutes les deux, positives ou nulles et inférieures à 1 ? Combien trouve-t-on alors, sur le cercle trigonométrique (U), d'extrémités d'arc dont la mesure x vérifie l'équation (1).

D. Dans cette dernière question, on suppose que les conditions trouvées dans la question C, 2° sont réalisées. Pour les interpréter, on suppose que a et b sont les coordonnées d'un point M dans un plan auxiliaire rapporté à deux axes orthonormés Oa et Ob.

1° Montrer que le point M ne peut pas être à l'intérieur de la parabole (P) qui admet la droite d'équation $b = 0$ comme directrice et le point de coordonnées $a = -1$, $b = 2$, comme foyer.

2° Montrer que la région où doit se trouver le point M est limitée par la parabole (P) et deux de ses tangentes que l'on précisera.

3° Calculer l'aire de cette région.

1950. On considère la fonction $y = \frac{ax - 5}{x^2 - 1}$, où x est la variable et a un paramètre différent de $+5$ et -5. Soit (C) sa courbe représentative.

1° Étudier suivant la valeur de a les divers aspects que peut présenter le tableau de variations de y.

2° Montrer que toutes les courbes (C) passent par un point fixe A. Deux courbes (C) peuvent-elles avoir un autre point commun que A ? Peuvent-elles être tangentes en A, orthogonales en A ?

3° Quand la fonction y présente un maximum et un minimum, préciser quelle est la plus grande de ces deux valeurs de y ?

4° Déterminer a pour que la fonction y admette un maximum ou un minimum pour $x = 2$. Tracer avec soin la courbe correspondante ?

5° On considère maintenant la fraction $\frac{4n-5}{n^2-1}$, où n est un entier supérieur ou égal à 2. Pour quelles valeurs de n cette fraction est-elle irréductible, réductible, égale à un entier ?

1951. On donne deux axes orthonormés Ox, Oy, et le cercle (C) de centre I (O; a) et de rayon a.

D'un point P variable sur la demi-droite Ox on mène la tangente au cercle, autre que PO, qui coupe Oy en Q, et l'on construit le quatrième sommet, M, du rectangle OPMQ.

1° Exprimer, en fonction de a et de l'angle (OI; OP) $= u$ les coordonnées x et y du point M.

Former la relation indépendante de u vérifiée par x et y.

2° Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{2ax^2}{x^2 - a^2}. \qquad (2)$$

Comparer la courbe représentative de cette fonction au lieu géométrique du point M de la question 1°.

3° Évaluer, en fonction de OP $= x$, l'aire S du rectangle OPMQ.

Construire la courbe représentative des variations de S en fonction de x. Admet-elle une asymptote non parallèle à Oy ?

Placer les points P pour lesquels S est égale au double de l'aire de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle (C).

1952. 1° Soit la fonction

$$y = 2 + \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x-2}. \qquad (1)$$

Étudier ses variations et construire sa courbe représentative par rapport à deux axes orthonormés x'Ox et y'Oy.

2° On donne l'équation du second degré

$$(m-2)\,x^2 - (m+1)\,x + 13 - 2\,m = 0$$

où m désigne un paramètre. Pour quelles valeurs de m a-t-elle des racines ?

Montrer que l'étude de la courbe (1) permet de répondre à la question précédente.

1953. 1° Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x + 3 - 2 \cdot |x|}{2\,(3 + 2x - x^2)}.$$

et tracer la courbe (C) représentative de cette fonction.

2° m étant un paramètre réel quelconque, résoudre et discuter l'équation

$$\frac{x+3}{2} = |x| + m\,(3 + 2x - x^2) \qquad (1)$$

Montrer comment on peut à l'aide de la courbe (C), vérifier les résultats de la discussion de l'équation (1).

3° Résoudre et discuter l'équation

$$\frac{3 + \cos t}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\, t}} + m\,(\sin^2 t + 2\cos t + 2) \qquad (2)$$

Calculer t pour $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$

1964. 1° Étudier les variations de la fonction

$$y = (x^2 - x3 + 1)^2$$

Tracer la courbe représentative (C), ainsi que la droite d'équation $y = 1$.

2° Les quatre points communs à la droite et à la courbe limitent sur celle-ci trois arcs. Evaluer les aires des surfaces comprises entre chacun de ses arcs et sa corde.

3° On considère l'équation $(x^2 + px + 1)^2 = q^2, q > 0$.

Comment faut-il choisir les constantes p et q pour que cette équation ait quatre racines ?

4° Écrire l'équation d'une droite passant par le point $x = 2$, $y = 1$ et tangente en ce point à la courbe (C). Cette droite recoupe la courbe en deux autres points, dont on demande les abscisses.

1955. On considère le triangle isocèle ABC dans lequel $AB = AC = a$ et $BAC = 2x$ (fig ex. 1955).

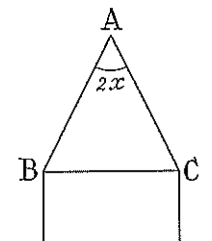


Fig. Ex. 1954

On construit sur la base BC le carré BCDE et l'on désigne par S (x) l'aire, fonction de x, du pentagone convexe ACDEB.

1° Évaluer cette aire en fonction de x et a.

2° Déterminer x pour que cette aire soit égale à un nombre k^2. Discuter.

3° Retrouver la discussion précédente par une méthode graphique, après avoir tracé la courbe représentative de la fonction

$$y = S(x) \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

4° Étude géométrique des variations de l'aire S (x). En déduire une solution de la question 2. (On pourra construire un triangle de base $AC = a$ et équivalent au pentagone.

1956. Étudier les variations de la fonction

$$y = \sqrt{3 + x} - \sqrt{2 - x}.$$

Courbe représentative.

1957. 1° Étudier les variations de la fonction $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x(x + 4\lambda)}$ et construire la courbe représentative C.

2° Une droite C parallèle à Ox et dont l'ordonnée $y = \lambda$ est donnée coupe en général la courbe C en deux points M et N. Soit P le point de rencontre de D avec Oy et soit Q le conjugué harmonique de P par rapport aux points M et N. Trouver le lieu du point Q.

3° Montrer que les projections M′ et N′ des points M et N sur $x'Ox$ sont conjugués harmoniques par rapport à deux points fixes que l'on déterminera.

4° On considère la fonction $g(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x(\alpha x + \beta)}$, α et β étant des constantes. Déterminer ces constantes de manière que la courbe représentative de la fonction $g(x)$ passe par le point de coordonnées $x = y = 1$ et ait en ce point une tangente parallèle à $x'Ox$.

5° α et β étant de nouveau des constantes quelconques, dont aucune n'est nulle, montrer que $g(x)$ peut s'écrire

$$g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{\alpha x + \beta}.$$

Trouver les constantes a, b, c et en déduire une expression de la dérivée de $g(x)$. Quelle est la relation, indépendante de α et de β, qui lie les racines de cette dérivée ?

1958. On considère la fonction $y = \dfrac{3x^2 + ax + 3}{3x^2 + 2x + \beta}$.

1° Déterminer les constantes α et β de sorte que y présente pour $x = -1$ un minimum égal à -1.

2° Étudier la variation de y et tracer la courbe (C) représentative pour $\alpha = 10$, $\beta = 3$.

3° (C) coupe l'axe $x'Ox$ en R et S. Montrer que les tangentes à (C) en R et S se coupent orthogonalement en un point T. Calculer l'aire du triangle RST.

1959. 1° Trouver un polynôme en x du 5e degré, sachant qu'il est divisible par $(x-2)^3$; qu'il est nul, ainsi que sa dérivée pour $x = -1$; et enfin qu'il prend pour $x = 3$, la valeur 16.

Etudier sa variation et construire la courbe représentative (C).

2° Calculer l'aire de la surface limitée par l'axe $x'Ox$, la courbe (C) et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 2$.

3° Une droite (Δ), de coefficient directeur m, passe par le point A (2; 0). Former l'équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection de (Δ) et de (C). Pour quelles valeurs de m, la droite Δ rencontre-t-elle la courbe en quatre points autre que A?

4° Pour quelles valeurs de m, la droite Δ est-elle tangente à la courbe en un point B non situé sur l'axe $x'Ox$? Coordonnées de B. Dans ce cas, quelles sont les abscisses des deux autres points de rencontre C et D? Quel est le milieu du segment CD?

LIVRE IX

APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE

CHAPITRE XCIII

TRANSFORMATIONS ET CONTACT

1237. Courbes tangentes.

Soient deux courbes C et C′ ayant le point A en commun (fig. 1237 *a* et *b*). Si les deux courbes ont la même tangente AT en A, *elles sont dites tangentes en A.*

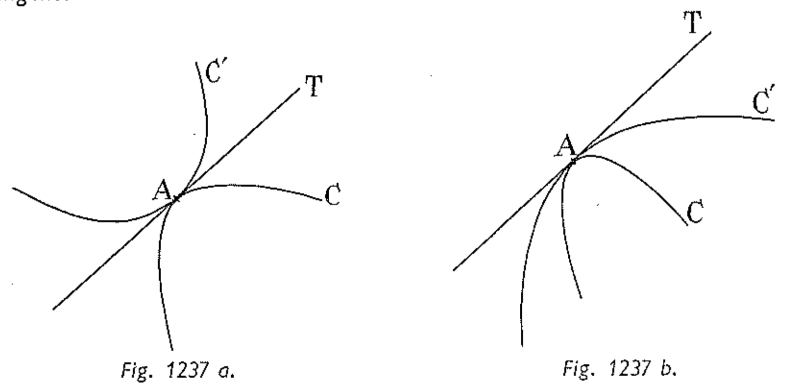


Fig. 1237 a. *Fig. 1237 b.*

A est le point de contact.

Si les deux courbes sont de part et d'autre de la tangente, *le contact est externe* (fig. 1237 *a*).

Si les deux courbes sont du même côté de la tangente *le contact est interne* (fig. 1237 *b*).

1238. Angle de deux courbes.

Soient deux courbes C et C′ ayant le point A en commun. (fig 1238 *a*). AT est la tangente en A à C; AT′ est la tangente en A à C′.

L'angle des deux droites AT et AT′ est l'angle de deux courbes.

Si l'angle est droit, les deux courbes sont dites orthogonales (fig. 1238 *b*).

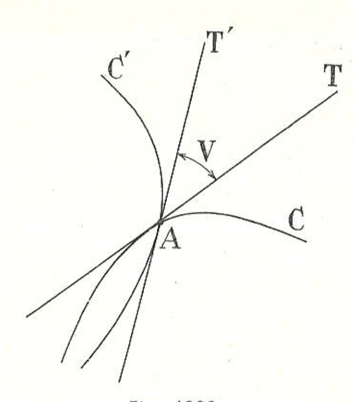


Fig. 1238 *a*

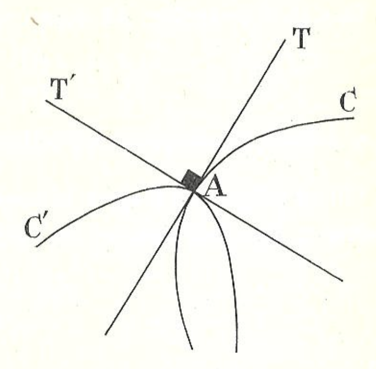


Fig. 1238 *b*.

1239. Tangente en un point d'un cercle.

Soit le cercle C de centre O et de rayon R (fig. 1239 *a*). Son équation est

$$\overrightarrow{OM}^2 = R^2$$

M étant fonction du paramètre $\theta = \overline{\text{angle}}\,(Ox;\,\overrightarrow{OM})$.

En dérivant, on a :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} = 0.$$

Donc en tout point M du cercle le vecteur-directeur $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$ de la tangente en M est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

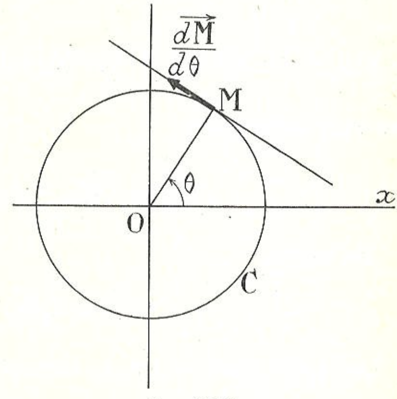


Fig. 1239 *a*.

Et :

La tangente en un point M d'un cercle est la perpendiculaire en M au rayon OM.

On retrouve ainsi la définition donnée au n° 883. Ainsi la définition algébrique de ce n° 883 et la définition topologique du n° 1125 sont identiques dans le cas du cercle.

1240. Etude locale d'un arc régulier.

Soit un arc régulier AB d'une courbe plane, donné par les équations

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t \in [a\,;\,b]$$

x et y étant des fonctions dérivables du paramètre t.

On se propose d'étudier la courbe au voisinage du point M_0 de paramètre t_0. Les coordonnées de $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{M'_0}$ sont :

$$\overrightarrow{OM_0} \left| \begin{array}{l} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0) \end{array} \right.$$

et

$$\overrightarrow{M'_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right)_{t=t_0} \left| \begin{array}{l} x'_0 = x'(t_0) \\ y'_0 = y'(t_0) \end{array} \right.$$

En appliquant la formule de Taylor, on obtient :

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + h[x'(t_0)] + \frac{h^2}{2!}[x''(t_0 + \theta_1 \cdot h)] \quad 0 < \theta_1 < 1$$

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h[y'(t_0)] + \frac{h^2}{2!}[y''(t_0 + \theta_2 \cdot h)] \quad 0 < \theta_2 < 1$$

ou vectoriellement :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + h \cdot \overrightarrow{M'_0} + \frac{h^2}{2!}\left[\overrightarrow{M''_0} + \vec{\varepsilon}\right] \qquad (1240\,;\,1)$$

On a aussi :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + h\left[\overrightarrow{M'_0} + \vec{\varepsilon}\right] \qquad (1240\,;\,2)$$

Lorsque h tend vers 0, le vecteur $\vec{\varepsilon}$ tend vers le vecteur nul.

L'équation de la tangente en M_0 est

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_0} + \rho \cdot \overrightarrow{M'_0} \qquad (1240\,;\,3)$$

Remarque.

Pour une étude plus détaillée, réservée à une classe ultérieure, il faut utiliser les dérivées d'ordres supérieurs.

1241. Image d'un arc régulier par une translation.

Soient l'arc régulier AB, la translation $t = t_{\vec{a}}$ et l'image A'B' de l'arc AB par cette translation (fig. 1241 *a*).

Si M_0 est un point de l'arc AB, on a dans le voisinage de M_0 :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + h\left[\overrightarrow{M'_0} + \vec{\varepsilon}\right] \qquad (1241 ; 1)$$

La translation t transforme M en P et M_0 en P_0, avec

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \vec{a}$$

$$\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OM_0} + \vec{a}$$

De (1241; 1) on tire en ajoutant $\vec{a}$ aux deux membres :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + h\left[\overrightarrow{M'_0} + \vec{\varepsilon}\right]$$

D'où :

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{h} = \overrightarrow{M'_0} + \vec{\varepsilon}$$

et

$$\lim_{h=0} \frac{\overrightarrow{P_0P}}{h} = \overrightarrow{M'_0} = \left(\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}\right)_{t=t_0}$$

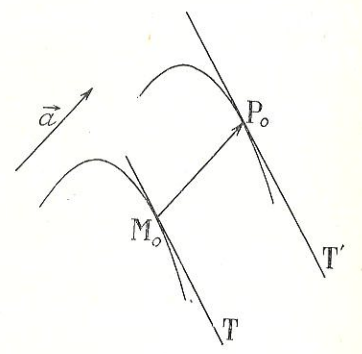


Fig. 1241 a.

Donc :

L'image par translation d'un arc régulier est un arc régulier; la tangente en P_0 image de M_0 est parallèle à la tangente en M_0.

Et :

Le contact est conservé pat translation.

1242. Image d'un arc régulier par une tranformation linéaire.

Soient l'arc régulier AB, la transformation linéaire f et l'image A'B' de l'arc AB par cette transformation f.

Si M_0 est un point de l'arc AB, on a dans le voisinage de M_0.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + h\left[\overrightarrow{M'_0} + \vec{\varepsilon}\right]$$

La transformation linéaire f transforme M en P et M_0 en P_0 avec

$$\overrightarrow{OP} = f(\overrightarrow{OM}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP_0} = f(\overrightarrow{OM_0})$$

D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= f(\overrightarrow{OM}) \\ &= f\left[\overrightarrow{OM_0} + h\left(\overrightarrow{M'_0} + \vec{\varepsilon}\right)\right] \\ &= f(\overrightarrow{OM_0}) + h\left[f(\overrightarrow{M'_0}) + f(\vec{\varepsilon})\right] \\ &= \overrightarrow{OP_0} + h \cdot \left[f(\overrightarrow{M'_0}) + f(\vec{\varepsilon})\right]\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\overrightarrow{P_0P}}{h} = f(\overrightarrow{M'_0}) + f(\vec{\varepsilon})$$

f étant linéaire, donc continue, lorsque h tend vers 0, $\vec{\varepsilon}$ tend vers 0, donc $f(\vec{\varepsilon})$ tend vers 0.

Par suite :

$$\lim_{h=0} \frac{\overrightarrow{P_0P}}{h} = \left(\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}\right)_{t=t_0} = f(\overrightarrow{M'_0})$$

En supposant que $f(\overrightarrow{M'_0})$ *n'est nul en aucun point de l'arc* AB, on obtient :

L'image par une transformation linéaire d'un arc régulier est un arc régulier.

Le vecteur directeur de la tangente en M'_0 est $\overrightarrow{M'_0}$; celui de la tangente en P_0 est $\overrightarrow{P'_0} = f(\overrightarrow{M'_0})$. L'équation de la tangente en M_0 est

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \rho \cdot \overrightarrow{M'_0}$$

Son image par f est

$$f(\overrightarrow{OM}) = f(\overrightarrow{OM_0}) + \rho \cdot f(\overrightarrow{M'_0})$$

ou

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \rho \cdot f(\overrightarrow{M'_0})$$

ce n'est autre que la tangente en P_0 à la courbe image A'B'.

Donc :

Les transformations linéaires conservent le contact.

1243. Remarque importante.

Dans la démonstration précédente on a supposé que le vecteur $f(\overrightarrow{M_0'})$ n'est pas nul. C'est en particulier le cas si la transformation f est régulière.

Il peut arriver si f n'est pas régulière que $f(\overrightarrow{M_0'})$ soit nul.

Par exemple, on projette orthogonalement un arc régulier AB sur un plan Π; on suppose qu'en un point M_0 de l'arc la tangente est orthogonale à Π. La projection $f(\overrightarrow{M_0'})$ du vecteur M_0' est alors nulle, et le point P_0 est un point singulier de l'arc A'B' projection de l'arc AB (fig. 1243 *a*).

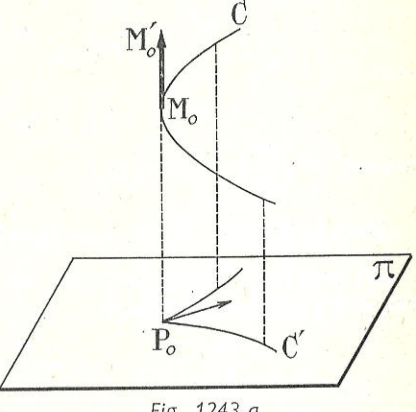


Fig. 1243 a.

1244. Image d'un arc régulier par une transformation affine.

Une transformation affine étant la composée d'une transformation linéaire et d'une translation, les propriétés précédentes s'étendent aux transformations affines, sous réserve de la remarque du nº 1243.

1245. Image d'un arc régulier par une inversion plane.

Soit un arc régulier AB donné par son équation polaire

$$r = f(\theta)$$

f étant une fonction dérivable (fig. 1129 *a*).

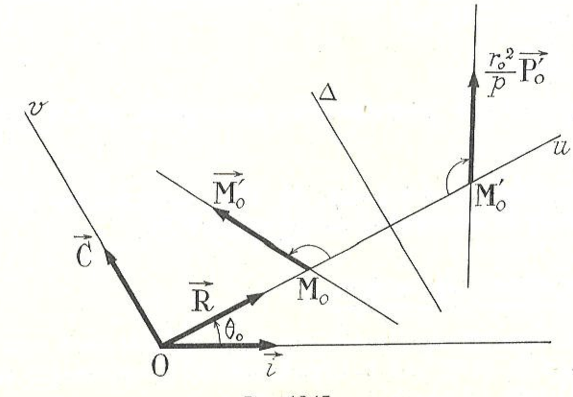


Fig. 1245 a.

On a : $$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{R}$$

Au point M_0 d'angle polaire θ_0, on a :

$$\overrightarrow{M'_0} = \left(\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \left(\frac{\overrightarrow{dr}}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} \cdot \overrightarrow{R} + r_0 \cdot \overrightarrow{C}$$

ou

$$\overrightarrow{M'_0} = r'_0 \cdot \overrightarrow{R} + r_0 \cdot \overrightarrow{C} \qquad (1245\,;\,1)$$

avec $r'_0 = \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{\theta=\theta_0} = r'_0(\theta_0)$.

Dans la base $(\overrightarrow{R}\,;\,\overrightarrow{C})$ les coordonnées de $\overrightarrow{M'_0}$ sont r'_0 et r_0.

On considère l'inversion $f = \text{inv}\,(0;\, p)$; l'image de l'arc AB est un arc A'B', d'équation polaire

$$\rho = \frac{p}{r} = \frac{p}{f(\theta)}$$

ou

$$\overrightarrow{OP} = \frac{p}{r}\overrightarrow{R}$$

L'image de M_0 est P_0 de coordonnées polaires θ_0 et $\frac{p}{r_0}$.

La tangente en P_0 est déterminée par le vecteur

$$\left(\frac{dP}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = -\frac{p}{r_0^2}\, r'_0\, \overrightarrow{R} + \frac{p}{r_0}\overrightarrow{C}$$

ou par

$$\frac{r_0^2}{p} \cdot \overrightarrow{P'_0} = -\, r'_0\, \overrightarrow{R} + r_0 \cdot \overrightarrow{C} \qquad (1245\,;\,2)$$

Dans la base $(\overrightarrow{R};\, \overrightarrow{C})$ les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente en P_0 sont $(-\, r'_0;\, r_0)$.

Donc (fig. 1245 *a*) :

L'image par une inversion d'un arc régulier est un arc régulier,

et :

Les tangentes en des points M_0 et P_0 inverses par f sont symétriques pour la médiatrice du segment M_0P_0.

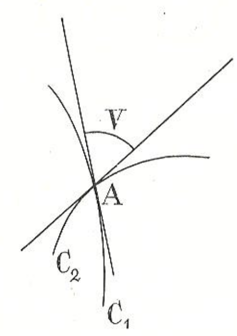
1246. Conservation des angles.

Soient deux courbes régulières C_1 et C_2 se coupant en A sous l'angle V, et leurs images C'_1 et C'_2 par la transformation f; ces images se coupent en $A' = f(A)$ sous un angle V'.

1° f est une transformation affine conservant les angles de droites.

La transformation affine conservant les angles de droites, on a

$$V' = V \qquad \text{(fig. 1246 } a\text{)}.$$



Et :

Toute transformation affine qui conserve les angles de droites, conserve aussi les angles de courbes.

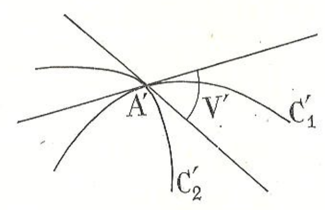


Fig. 1246 a

2° *f* est une inversion.

Les tangentes sont deux à deux symétriques pour la médiatrice de AA′ (fig. 1246 *b*); donc on a dans le plan orienté :



$$V' = -V$$

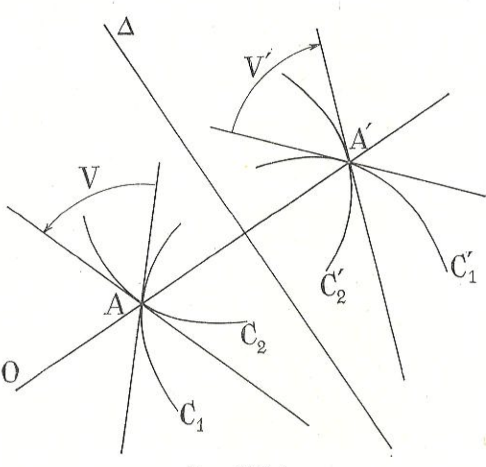


Fig. 1246 b.

Et :

L'inversion conserve les angles de courbes.

3° Conséquence.

Toute transformation qui conserve les angles conserve le contact.

CHAPITRE XCIV

FAISCEAUX DE CERCLES

1247. Faisceaux linéaires de courbes planes.

1° Soient deux courbes C et C′ d'équations respectives :

$$C : \quad f(x;y) = 0$$
$$C' : \quad g(x;y) = 0.$$

On appelle faisceau linéaire de base (C; C′) l'ensemble des courbes d'équation

$$\alpha \cdot \mathbf{f(x;y)} + \beta \cdot \mathbf{g(x;y)} = 0 \qquad (1247;1)$$

α et β étant des nombres réels quelconques.

Pour $\alpha = 0$, on obtient la courbe C′ ; pour $\beta = 0$, on obtient la courbe C. Donc les courbes de la base font partie du faisceau.

2° Souvent l'équation du faisceau s'écrit :

$$f(x;y) + \lambda \cdot g(x;y) = 0. \qquad (1247;2)$$

λ étant un paramètre réel. On convient que pour $\lambda = +\infty$, on obtient la courbe C.

3° Si A est un point de $C \cap C'$, on a :

$$f(x_A;y_A) = 0 \quad \text{et} \quad g(x_A;y_A) = 0$$

donc aussi

$$\alpha \cdot f(x_A;y_A) + \beta \cdot g(x_A;y_A) = 0.$$

Autrement dit :

Les courbes d'un faisceau linéaire passent par les points de l'intersection des deux courbes de la base.

◇ *Exemple 1.* — Soient deux droites :

$$D : \quad ux + vy + r = 0$$
$$D' : \quad u'x + v'y + r' = 0.$$

L'équation du faisceau linéaire de base (D ; D') est

$$(ux + vy + r) + \lambda\,(u'x + v'y + r') = 0$$

ou

$$(u + \lambda\,u')\,x + (v + \lambda\,v')\,y + (r + \lambda\,r') = 0$$

◇ *Exemple 2.* — Soient deux cercles :

$$C : \quad x^2 + y^2 + 2\,x + 4\,y - 4 = 0$$
$$C' : \quad x^2 + y^2 - y - 2 = 0.$$

L'équation du faisceau linéaire engendré par la base (C, C') est

$$(x^2 + y^2 + 2\,x + 4\,y - 4) + \lambda\,(x^2 + y^2 - y - 2) = 0$$

ou

$$(1 + \lambda)\,(x^2 + y^2) + 2\,x + (4 - \lambda)\,y - (4 + 2\,\lambda) = 0$$

Les courbes du faisceau sont des cercles; toutefois pour $\lambda = -1$, on a :

$$2\,x + 5\,y - 2 = 0$$

c'est l'équation d'une droite Δ; elle fait partie du faisceau et n'est autre que l'axe radical des deux cercles C et C'.

1248. Faisceaux linéaires de cercles.

Soient deux cercles C et C', de centres respectifs Ω et Ω', et leur axe radical Δ. On rapporte le plan à deux axes $x'Ox$, $y'Oy$ orthonormés, l'un porté par $\Omega\Omega'$ et l'autre porté par Δ (fig. 1248 *a*).

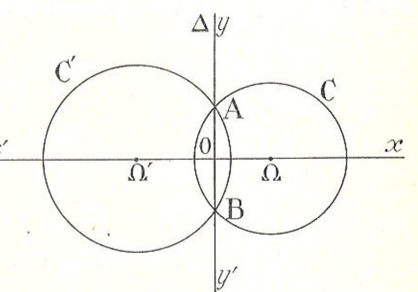


Fig. 1248 a

Le point O appartenant à l'axe radical Δ a la même puissance pour les deux cercles :

$$c = \overline{O_C} = \overline{O_{C'}}$$

Les équations des cercles sont donc :

$$C : (f\,x, y) = x^2 + y^2 - 2\,ax + c = 0$$
$$C' : g\,(x, y) = x^2 + y^2 - 2\,a'x + c = 0$$

L'équation du faisceau ayant (C, C') pour base est

$$(x^2 + y^2 - 2\,ax + c) + m\,(x^2 + y^2 - 2\,a'x + c) = 0$$

ou

$$(1 + m)\,(x^2 + y^2) - 2\,(a + ma')\,x + (1 + m).c = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{a + ma'}{1 + m} + c = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle (1) de centre $\omega \left(\frac{a + ma'}{1 + m} ; 0\right)$.
Ce point ω est donc le barycentre du point Ω affecté de la masse 1, et du point Ω' affecté de la masse m.

L'équation s'écrit alors :

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0 \qquad (1248; 1)$$

1249. Classification des faisceaux de cercles.

Suivant le signe de c, on peut distinguer trois sortes de faisceaux.

1° Faisceaux de cercles de Poncelet. $c = -\alpha^2$.

L'équation est :

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 2\lambda x - \alpha^2 = 0$$

On peut prendre comme courbes de base les courbes

$$C : \quad x^2 + y^2 - \alpha^2 = 0$$
$$\Delta : \quad x = 0$$

c'est-à-dire le cercle de centre O et de rayon α, et l'axe $y'Oy$ (fig. 1249 *a*).

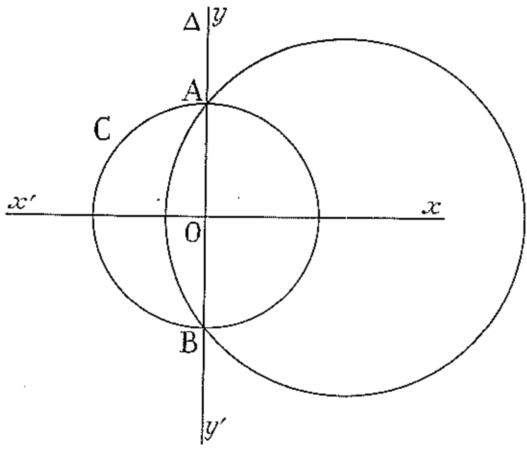


Fig. 1249 a.

(1) Pour $m = -1$, on obtient $x = o$, c'est-à-dire l'axe radical Δ.

C et Δ se coupent en A $(0; \alpha)$ et B $(0; -\alpha)$. Le faisceau est donc l'ensemble des cercles passant par les points A et B; A et B sont les *points de base du faisceau* (fig. 1249 *b*).

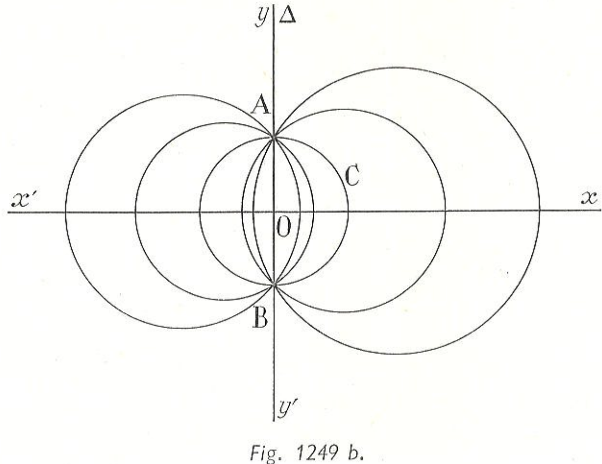


Fig. 1249 b.

Le faisceau est donc un faisceau de cercle de Poncelet (cf. n° 884).

2° Faisceaux de cercles d'Apollonius. $c = \alpha^2$.

L'équation du faisceau est :

$$C_\lambda : x^2 + y^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$$

Un cercle quelconque C_λ du faisceau coupe l'axe $y'Oy$, en des points d'ordonnées fournies par l'équation

$$y^2 + \alpha^2 = 0$$

Cette équation n'a pas de solutions réelles, mais elle admet deux solutions complexes $i\alpha$ et $-i\alpha$. On peut convenir que les cercles C_λ du faisceau passent par les points complexes de l'axe $y'Oy$: A $(0; i\alpha)$ et B $(0; -i\alpha)$.

Le rayon du cercle C_λ est $R_\lambda = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$; donc pour $\lambda = \alpha$ et $\lambda = -\alpha$ le cercle C_λ est un cercle point. Ces cercles-points sont les points I $(\alpha; o)$ et J $(-\alpha; 0)$. Ce sont les cercles-points du faisceau ou *les points limites du faisceau* (fig. 1249 *c*).

Le cercle C_λ du faisceau coupe l'axe $x'Ox$ en deux points M' et M'' d'abscisses données par l'équation

$$x^2 - 2\lambda x + \alpha^2 = 0$$

Si x' et x'' sont les abscisses de ces points, on a :

$$x'x'' = \alpha^2$$

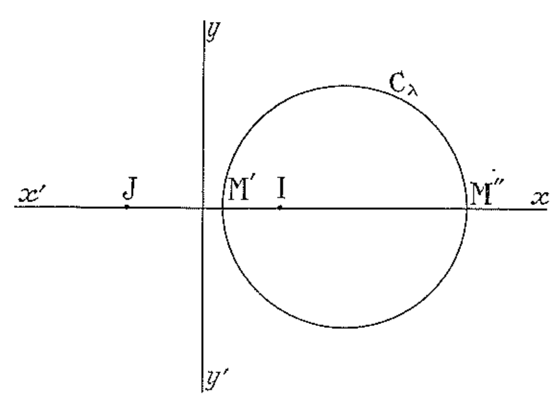


Fig. 1249 c.

Donc (fig. 1249 *d*) : (IJ; M'M'') est un quaterne harmonique, et les cercles du faisceau sont des cercles d'Apollonius (cf. n° 885).

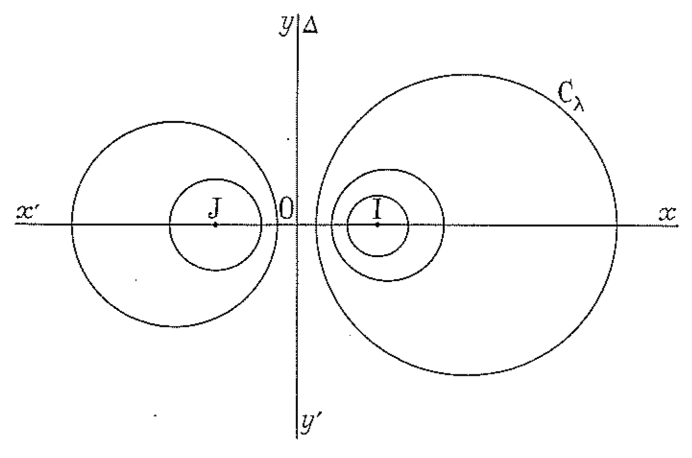


Fig. 1249 d.

3° Faisceaux de cercles tangents. $c = 0$.

On suppose maintenant que $c = 0$. L'équation du faisceau est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0.$$

Il est constitué par l'ensemble des cercles tangents en O à $y'Oy$ (fig. 1249 e).

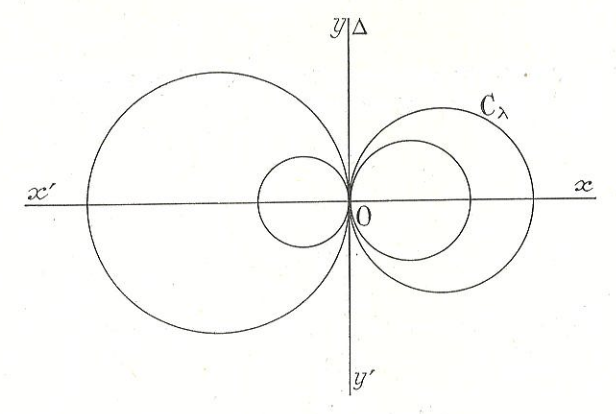


Fig. 1249 e.

1250. Propriétés des faisceaux de cercles.

Soit le faisceau Φ d'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$$

1° La puissance de 0 pour le cercle C_λ du faisceau $\overline{O} = c$; le point a la même puissance pour tous les cercles du faisceau.

Donc :

La droite Δ ou $y'Oy$ est axe radical de deux cercles quelconques du faisceau.

C'est *l'axe radical du faisceau.*

2° Un faisceau peut être défini par un cercle Γ et une droite Δ :

$$\Delta : x = 0$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 + c = 0.$$

D'où l'équation du faisceau :

$$x^2 + y^2 + c + \lambda x = 0.$$

3° L'équation du faisceau Φ étant

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + c = 0$$

soit un point A $(x_0; y_0)$. Si A appartient à un cercle du faisceau on a :

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\lambda x_0 + c = 0.$$

D'où si $x_0 \neq 0$:

$$\lambda = \frac{x_0^2 + y_0^2 + c}{2x_0}.$$

Et :

Par un point non situé sur l'axe radical du faisceau Φ, il passe un cercle du faisceau et un seul.

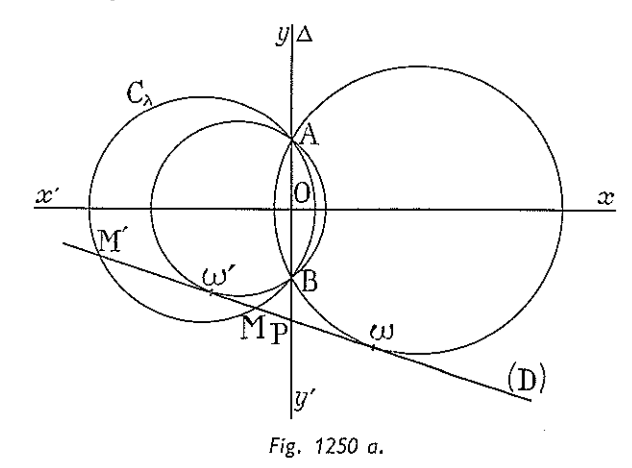


Fig. 1250 a.

4° Soit une droite D quelconque; elle coupe l'axe radical Δ en P, et le cercle C_λ en M et M' (fig. 1250 *a*, *b*, *c*). La puissance de P étant la même pour tous les cercles du faisceau, on a :

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = \overline{P}_{C_\lambda} = k.$$

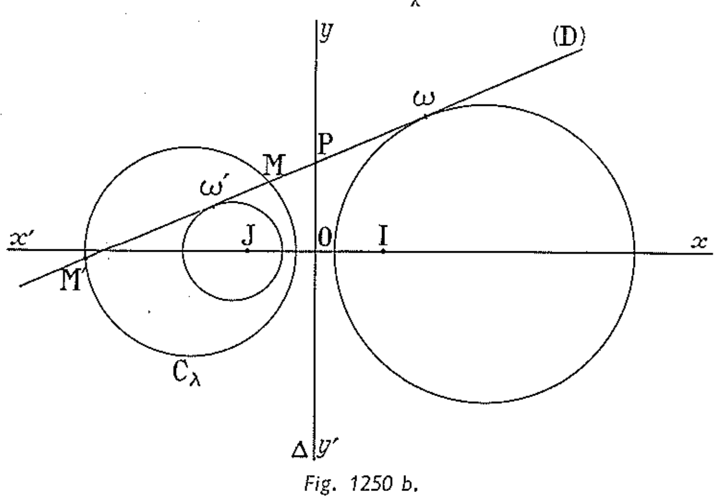


Fig. 1250 b.

Donc *les points* M *et* M' *sont liés involutivement.*

Si Φ est un faisceau de cercles de Poncelet, on a $k = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ (fig. 1250*a*).

Si Φ est un faisceau de cercles d'Apollonius, on a $k = PI^2 = PJ^2$ (fig. 1250 *b*).

Si Φ est un faisceau de cercles tangents, on a $k = PO^2$ (fig. 1250 *c*).

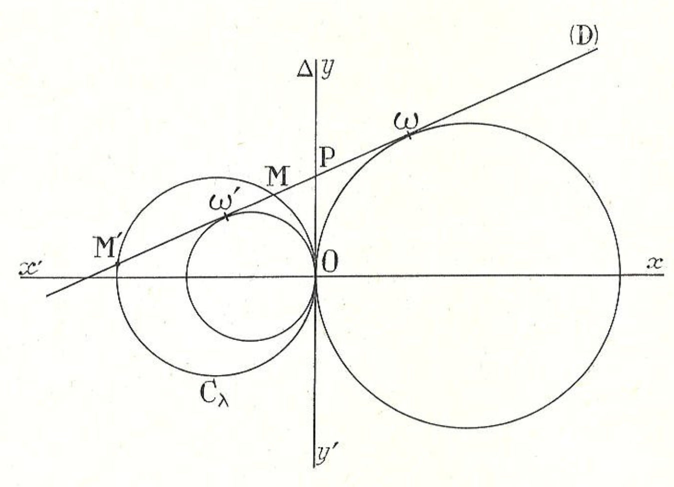


Fig. 1250 c.

Si ω et ω' sont les points doubles réels de l'involution, dans le cas où ils existent, on a

$$\overline{P\omega}^2 = \overline{P\omega'}^2 = k$$

et par suite les cercles du faisceau passant par ω et ω' sont tangents à la droite D.

1251. Faisceaux orthogonaux.

Soient Φ un faisceau de cercles de Poncelet d'équation

$$(C_\lambda) \qquad x^2 + y^2 - 2\,\lambda x - \alpha^2 = 0$$

et le faisceau Φ' de cercles d'Apollonius d'équation

$$(\Gamma_\mu) \qquad x^2 + y^2 - 2\,\mu y + \alpha^2 = 0$$

Ces deux faisceaux sont dits *faisceaux conjugués* (fig. 1251 *a*).

Le cercle C_λ et le cercle Γ_μ sont orthogonaux quels que soient λ et μ; en effet la condition d'orthogonalité :

$$2\,(aa' + bb') = c + c'$$

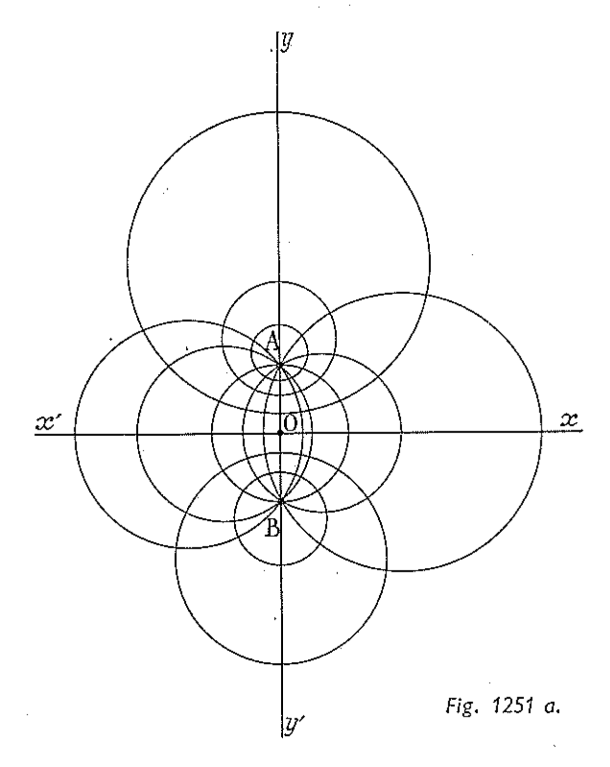


Fig. 1251 a.

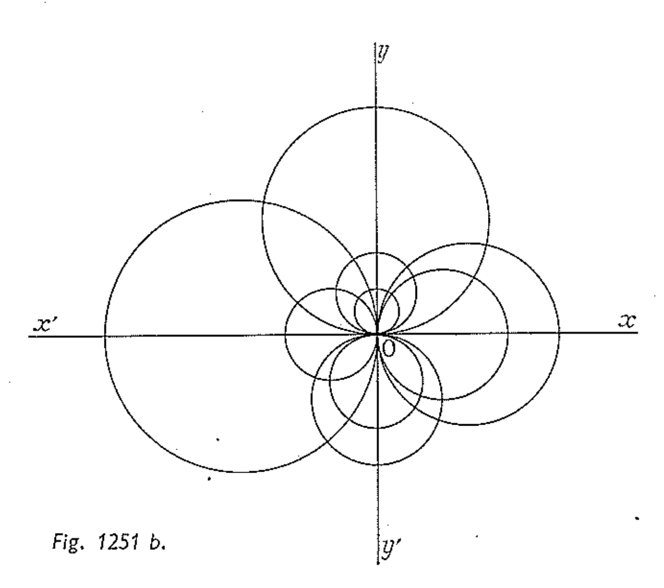


Fig. 1251 b.

est toujours vérifiée (ici $a = \lambda$, $b = 0$; $c = -\alpha^2$; $a' = 0$, $b' = \mu$, $c' = \alpha^2$).

On dit que *les deux faisceaux sont orthogonaux.* A et B sont points de base de Φ, et points-limites de Φ'.

Le raisonnement précédent est valable si $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour deux faisceaux de cercles tangents (fig. 1251 *b*).

1252. Inverse d'un faisceau de droites.

1° Soit le faisceau des droites d'une direction donnée (fig. 1252 *a*). On envisage une inversion inv(I; *p*).

La droite D du faisceau qui passe par I est conservée dans l'inversion; les autres droites du faisceau ont pour inverses les cercles tangents en I à la droite D.

Et :

L'inverse d'une direction de droites parallèles est un faisceau de cercles tangents.

Évidemment deux directions orthogonales ont pour inverses deux faisceaux conjugués de cercles tangents.

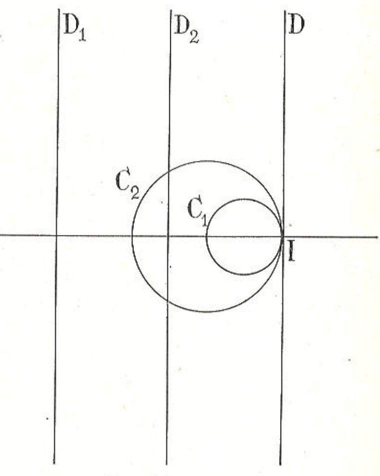


Fig. 1252 a.

2° Soit maintenant l'ensemble des droites passant par un point S (fig. 1252 *b*). On envisage l'inversion inv (I; *p*). Soit S' l'inverse de S.

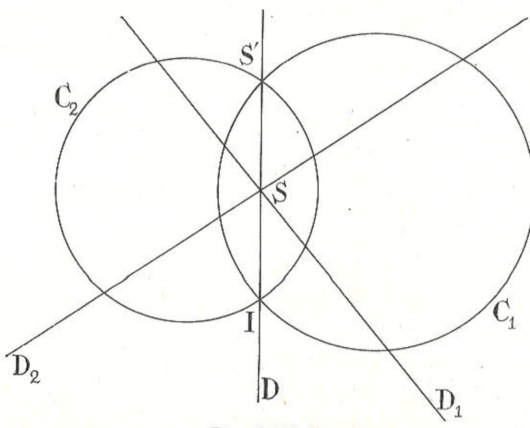


Fig. 1252 b.

La droite IS est conservée dans l'inversion; les autres droites du faisceau ont pour inverses des cercles passant par I et S′.

Et :

L'inverse du faisceau des droites passant par un point est un faisceau de cercles de Poncelet.

1253. Inverse d'un faisceau de cercles cocentriques.

Soient un point S et l'ensemble Φ des cercles cocentriques, de centre S (fig. 1253 *a*). On envisage l'inversion inv(I; *p*). Soit S′ l'inverse de S.

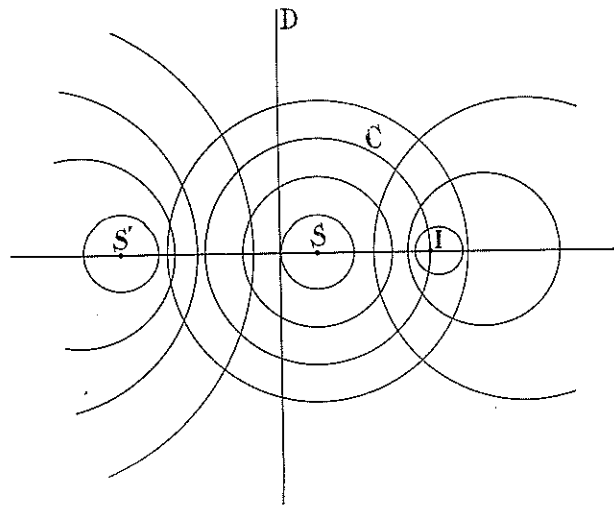


Fig. 1253 a.

Le cercle C de Φ passant par I a pour inverse une droite D, médiatrice de IS′. Les autres cercles sont transformés en cercles.

Les cercles de centre S sont orthogonaux aux droites passant par S (cf. nº 1252; 2º) donc les inverses des cercles de centre S constituent l'ensemble des cercles orthogonaux au faisceau des cercles de Poncelet passant par I et S′; c'est donc le faisceau conjugué formé de cercles d'Apollonius, ayant I et S′ pour points-limites.

1254. Inverse d'un faisceau de cercles.

1º Soit Φ un faisceau de cercles de Poncelet passant par A et B.

L'inversion inv (I; *p*) transforme les cercles de Φ en cercles passant par les points A′ et B′ inverses des points A et B.

Donc :

L'inverse d'un faisceau de cercles de Poncelet est un faisceau de cercles de Poncelet.

2° Soit Φ un faisceau de cercles d'Apollonius; on considère le faisceau Ψ conjugué de Φ.

L'inversion inv (I, p) transforme Φ en Φ' et Ψ en Ψ'; Φ' et Ψ' sont orthogonaux. Comme Φ' est un faisceau de cercles de Poncelet, Ψ' est un faisceau de cercles d'Apollonius.

Donc :

L'inverse d'un faisceau de cercles d'Apollonius est un faisceau de cercles d'Apollonius.

1255. Inverse de l'ensemble d'une droite et d'un cercle.

Soit un cercle (C), de centre O et de rayon R, et une droite (D) (fig. 1255 *a*). On envisage l'inversion inv(S; p), S étant un point du cercle (C).

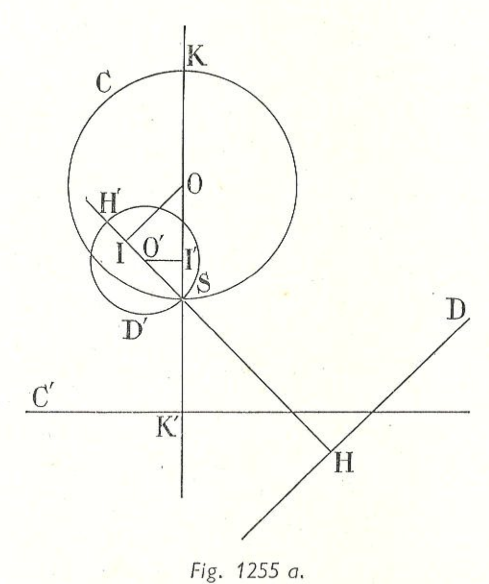


Fig. 1255 a.

L'inverse du cercle (C) est une droite C'; et l'inverse de la droite D est un cercle (D') passant par S. Soient H la projection de S sur D, et K' la projection de S sur C'; H' l'inverse de H et K' est l'inverse de K.

On a donc :

$$p = \overline{SH} \cdot \overline{SH'} = \overline{SK} \cdot \overline{SK'} \qquad (1255\ ;\ 1)$$

Si O se projette en I sur SH, et si O′ se projette en I′ sur SK, les points O, O′, I, I′ sont cocycliques et

$$\overline{SO'} \cdot \overline{SI} = \overline{SO} \cdot \overline{SI'} \qquad (1255\ ;\ 2)$$

La relation (1255 ; 1) s'écrit :

$$(\overline{SI} + \overline{IH}) \cdot 2\overline{SO'} = 2 \cdot \overline{SO} \cdot (\overline{SI'} + \overline{I'K'})$$

ou en tenant compte de (1255 ; 2) :

$$\overline{IH} \cdot \overline{SO'} = \overline{SO} \cdot \overline{I'K'}$$

En posant : $SO' = R'$, $SO = R$; $IH = d$, $\overline{I'K'} = d'$, on obtient :

$$d \cdot R' = R \cdot d'$$

ou enfin

$$\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{R'}}{\mathbf{d'}}. \qquad (1255\ ;\ 3)$$

CHAPITRE XCV

PÔLES ET POLAIRES

1256. Points conjugués par rapport à un cercle.

Soit un cercle (C) de centre O et de rayon R.

Deux points A et B sont conjugués par rapport au cercle (C) si on a

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2.$$

1257. Conditions nécessaires et suffisantes.

1° Pour que le cercle (Γ) de diamètre AB soit orthogonal au cercle (C) (fig. 1257 *a*) il faut et il suffit que

$$\overline{O}_\Gamma = R^2$$

ou

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$$

c'est-à-dire que A et B soient conjugués par rapport à (C).

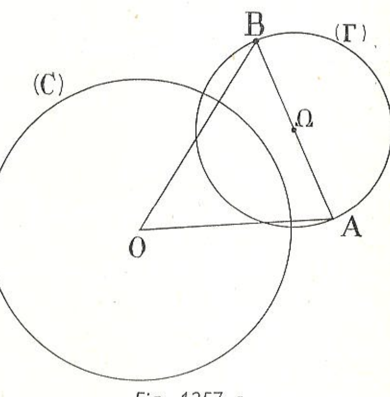


Fig. 1257 a.

Ainsi :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux points A et B soient conjugués par rapport à un cercle (C) est que le cercle de diamètre AB soit orthogonal à (C).

2° Soient deux points A et B conjugués par rapport à (C) (fig. 1257 *b*); on a donc :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$$

Pour qu'un point C soit conjugué de A il faut et il suffit que

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = R^2$$

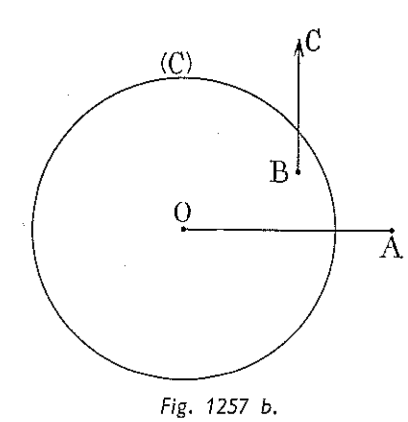


Fig. 1257 b.

ou $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) = R^2$

ou $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = R^2$

ou, en tenant compte de $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

D'où :

Le point B étant conjugué de A par rapport à un cercle (C), une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point C soit conjugué de A est que

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

1258. Points conjugués harmoniques par rapport à un cercle.

Deux points A et B d'une sécante (Δ) au cercle (C) sont dits conjugués harmoniques par rapport à ce cercle (C) s'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection C et D de la sécante (Δ) et du cercle (C).

Le quaterne (A, B; C, D) étant harmonique (fig. 1258 *a*), le cercle (C) et le cercle (Γ) de diamètre AB sont orthogonaux; donc :

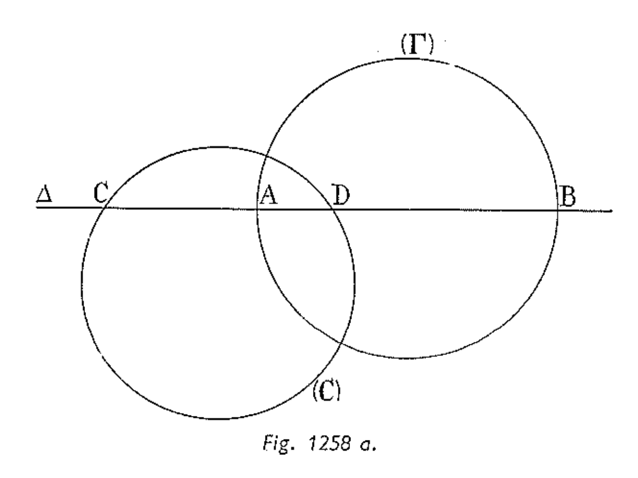


Fig. 1258 a.

Deux points conjugués harmoniques par rapport à un cercle, sont conjugués par rapport à ce cercle.

1259. Polaire d'un point.

1° Soit le cercle (C) et un point A. On se propose d'étudier l'ensemble des conjugués du point A.

Le point H conjugué harmonique de A sur le diamètre OA est un point du lieu (fig. 1259 *a*). Pour qu'un point M appartienne au lieu cherché il faut et il suffit que (cf. 1257, 2°)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$$

donc que M appartienne à la droite (*a*) perpendiculaire en H à OA.

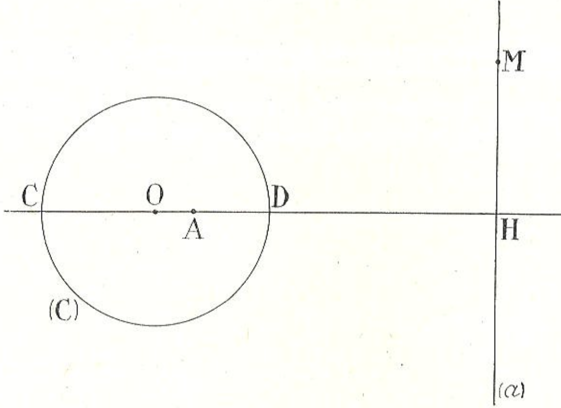


Fig. 1259 a.

Et :

Le lieu des conjugués d'un point A par rapport au cercle (C) est la droite (a) perpendiculaire en H à OA.

2° Ce résultat justifie la définition suivante :

On appelle polaire d'un point A par rapport à un cercle (C), la droite (a) lieu des points conjugués de ce point A par rapport au cercle (C).

1260. Étude analytique de la polaire.

Soient le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ et le point A $(x_0; y_0)$. L'équation vectorielle de la polaire est

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = R^2. \qquad (1260 ; 1)$$

c'est-à-dire analytiquement

$$x_0 x + y_0 y = R^2 \qquad (1260 ; 2)$$

1261. Position de la polaire.

Connaissant le point A, la relation $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$ permet de déterminer le point H, donc la polaire (a).

En particulier, si A est sur le cercle, le point H est identique à A; et la polaire (a) n'est autre que la tangente en A.

La polaire du point à l'infini dans une direction Δ est le diamètre (D) perpendiculaire à Δ, car H, conjugué harmonique du point à l'infini, est confondu avec O.

La polaire du point O est la droite de l'infini, car on peut prendre pour H le point à l'infini dans une direction quelconque.

1262. Ensemble des conjugués harmoniques d'un point.

Soient un point A et sa polaire (a) pour un cercle (C). Un conjugué harmonique de A, étant conjugué de A, appartient à (a).

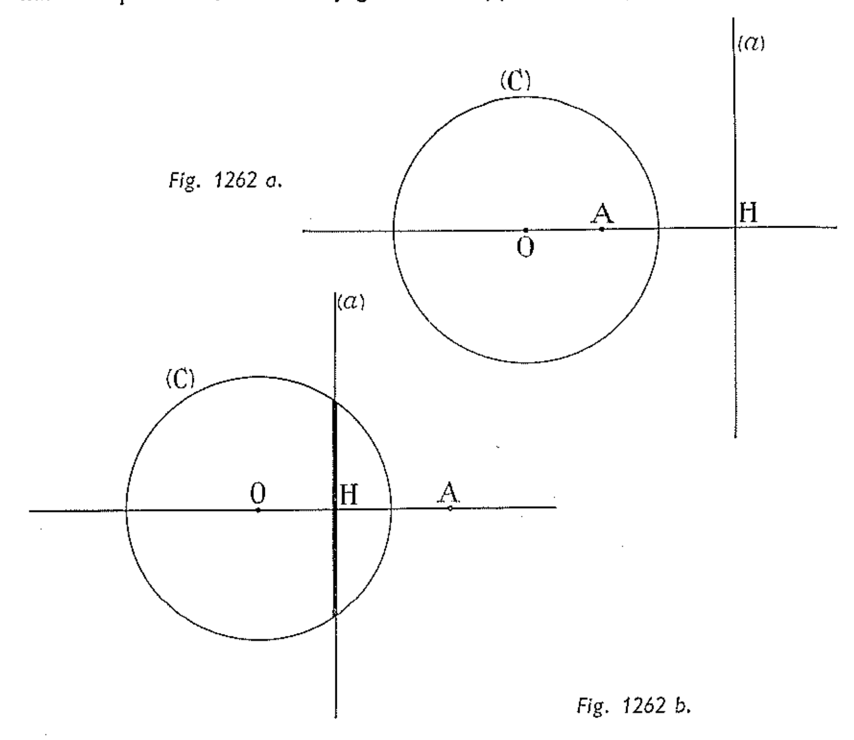


Fig. 1262 a.

Fig. 1262 b.

Par suite, le lieu des conjugués harmoniques de A est la polaire (a) si A est intérieur au cercle (C) ou sur ce cercle; et c'est la partie de (a) intérieure au cercle (C) si A est extérieur (fig. 1262 a et b).

1263. Construction de la polaire d'un point.

Soit un point A. On mène par A deux sécantes APM et AP'M' au cercle (C). Les conjugués harmoniques de A par rapport à PM et par rapport à P'M' appartiennent à la polaire; la polaire (a) n'est donc autre que la polaire de A par rapport aux droites PP' et MM'. Elle est donc déterminée par les points I et J d'intersection de PP' et MM', et de PM' et MP' (fig. 1263 a).

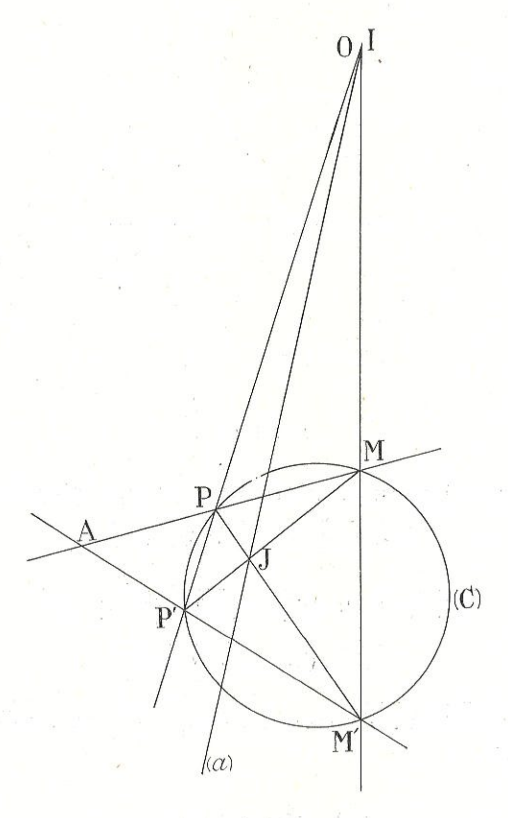


Fig. 1263 a.

Le cercle (C) étant tracé, on peut ainsi construire la polaire (a) de A uniquement avec la règle.

1264. Relation de Salmon.

Soient les points A et B et leurs polaires (a) et (b) par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon R.

A′ est la projection de A sur (b) et B′ est la projection de B sur (a) (fig. 1264 a).

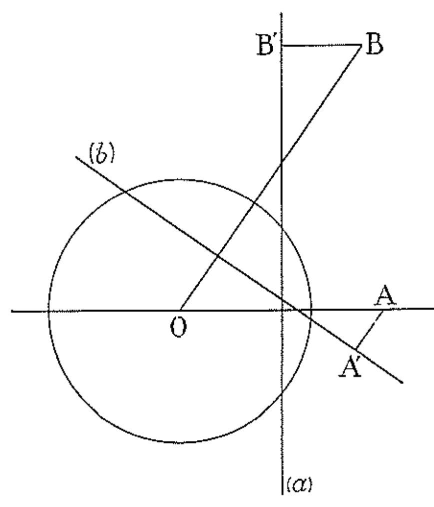


Fig. 1264 a.

A et B′ sont conjugués; de même B et A′ sont conjugués; donc :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA'} = R^2$$

ou

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'})$$

Doù :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA'}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont parallèles ; les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont aussi parallèles.

Donc :

$$OA \cdot BB' = OB \cdot AA'$$

c'est-à-dire

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} \qquad (1264\,;\,1)$$

Et :

Le rapport des distances de deux points au centre d'un cercle est égal au rapport des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre.

1265. Pôle d'une droite.

1° Soit le cercle (C) et une droite (*a*). Existe-t-il des points conjugués pour tous les points de la droite (*a*) (fig. 1265 *a*).

Si un point A répond à la question, d'après la condition du (1257, 2°), on doit avoir, M et N étant deux points quelconques de (*a*) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MN} = 0.$$

Donc le point A doit se trouver sur le diamètre Δ perpendiculaire en H à (*a*). A et H sont conjugués; on a :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$$

ce qui montre que A est unique.

Et :

(*a*) *est la polaire du point A.*

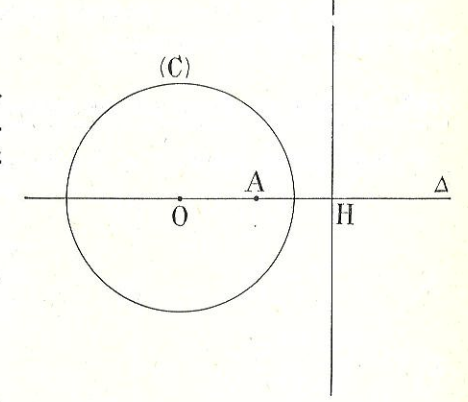


Fig. 1265 a.

2° Ce résultat justifie la définition suivante :

On appelle pôle d'une droite (a) le point A ayant (a), pour polaire.

1266. Position du pôle.

Pour déterminer A, on mène la droite Δ perpendiculaire en H à (*a*); la relation $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = R^2$ détermine le point A.

Si la droite (*a*) est tangente au cercle (C), le pôle est le point de contact A.

Si la droite (*a*) est un diamètre de (C), le pôle est le point à l'infini dans la direction Δ perpendiculaire à (*a*).

La droite de l'infini a pour pôle le centre O du cercle (C).

1267. Correspondance par polaires réciproques.

Étant donné un cercle (C), dit cercle directeur, à tout point M on fait correspondre sa polaire (m), et à toute droite (n) on fait correspondre son pôle N.

φ : $$M \longrightarrow \varphi(M) = (m).$$

A un ensemble E formé de points M et de droites (*n*), on fait donc correspondre un ensemble F formé de droites (*m*) et de points N.

L'ensemble F est l'ensemble polaire de E pour le cercle directeur (C).

Évidemment E est l'ensemble polaire de F.

On dit que E et F sont polaires réciproques, et que φ *est une correspondance par polaires réciproques.*

1268. Images de deux points conjugués.

1° Soient deux points A et B conjugués par rapport à (C). (*a*) passe par B et (*b*) passe par A (fig. 1268 *a*).

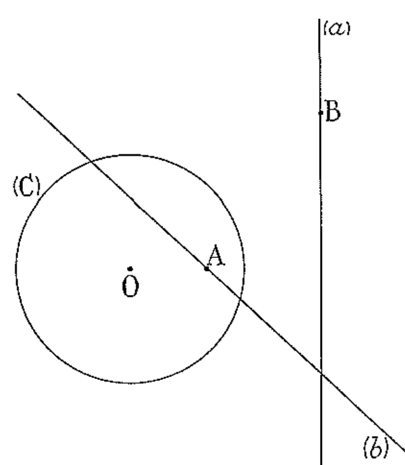


Fig. 1268 a.

Ces deux droites (*a*) et (*b*) sont dites conjuguées par rapport à (C), conformément à la définition suivante :

Deux droites sont conjuguées par rapport à un cercle si le pôle de l'une appartient à l'autre.

2° On en déduit :

Si la polaire (a) du point A passe par B, les points A et B sont conjugués, et *la polaire (b) de B passe par A.*

Si le pôle A de la droite (a) appartient à la droite (b), le point A est conjugué du pole B de (*b*) et, par suite, *le pôle B de la droite* (b) *appartient à la droite* (a).

1269. Image d'une droite.

Soit une droite (*a*) et son pôle A (fig. 1269 *a*).

Un point M de (*a*), étant conjugué de A, a une polaire (*m*) qui passe par A. D'où l'énoncé :

***Les points M d'une droite* (a) *ont pour images les droites* (m) *passant par le pôle A de la droite* (a).**

Réciproquement :

Les droites (m) passant par un point A ont pour images les points de la polaire (a) du point A.

Ou sous une autre forme :

Des points alignés ont pour images des droites concourantes; et des droites concourantes ont pour images des points alignés.

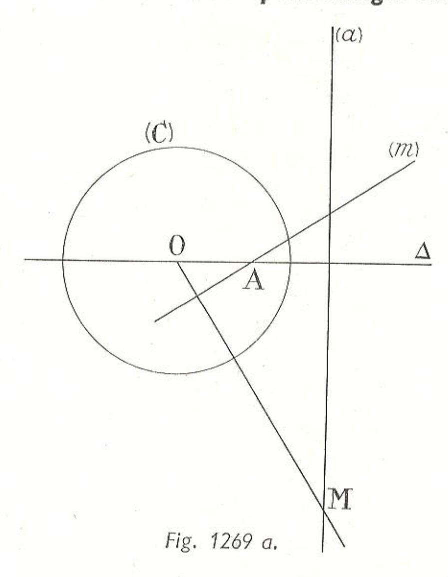


Fig. 1269 a.

1270. Propriétés angulaires.

Soient deux points A et B, et leurs polaires (*a*) et (*b*) (fig. 1270 *a*).

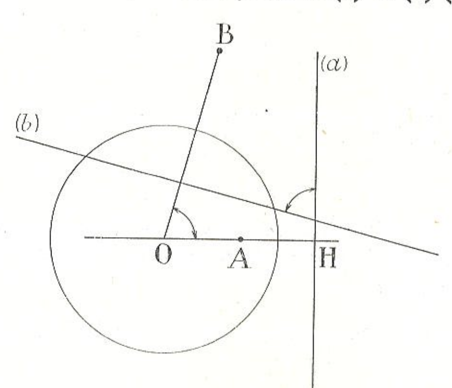


Fig. 1270 a.

Comme les droites OA et (*a*) sont perpendiculaires; et que les droites OB et (*b*) sont aussi perpendiculaires, on déduit :

***angle* (*OA*; *OB*) = *angle* (a; b), mod π.**

1271. Birapport et polaires réciproques.

Soient quatre points A, B, C, D d'une droite (δ) (fig. 1271 *a*). Le pôle de (δ) est le point Δ; les polaires (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) des points A, B, C, D passent par Δ.

Les deux faisceaux (O; A, B, C; D) et (*a*; *b*; *c*; *d*) ayant leurs rayons respectivement perpendiculaires sont isométriques.

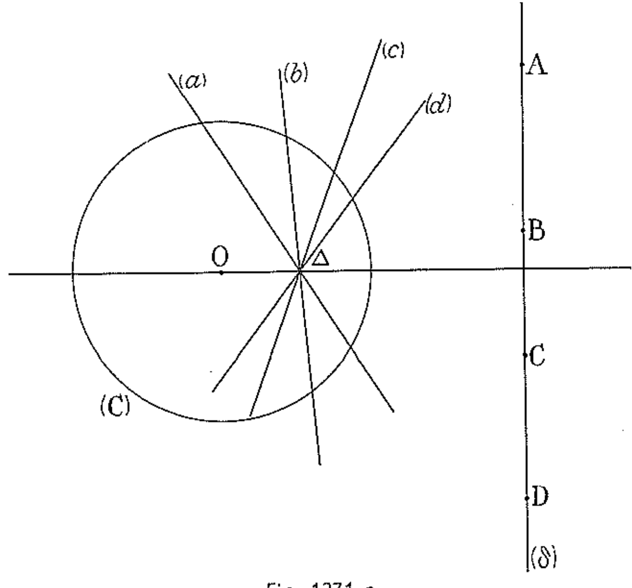


Fig. 1271 a.

Si le birapport du premier faisceau est ρ = (A; B; C; D), le birapport du second est aussi ρ.

Donc :

Un quaterne de quatre points alignés a pour image par polaires réciproques un faisceau de quatre droites concourantes de birapport et réciproquement.

Si le quaterne est harmonique, le faisceau image est aussi harmonique.

1272. Remarques.

1° Soient un point A extérieur au cercle (C) et les deux tangentes à (C) passant par A, T et T′ étant les points de contact. T et T′ sont aussi les pôles des tangentes (fig. 1271 *a*). La polaire (*a*) du point A n'est donc autre que la droite TT′.

Cela donne un moyen de construire la polaire (a) d'un point A extérieur au cercle; et inversement un moyen de construire le pôle A de la sécante (a) au cercle.

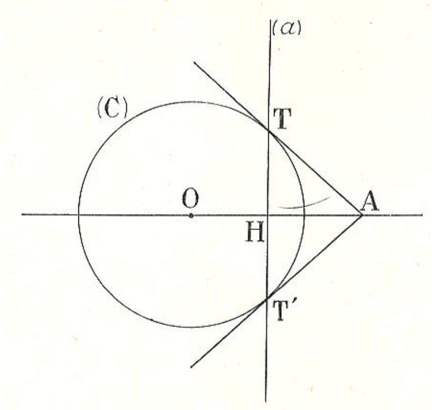


Fig. 1272 a.

2° Si R et S sont deux points conjugués harmoniques pour les points TT', le quaterne harmonique (T, T'; R; S) a pour image le faisceau harmonique (A; T, T'; R, S), et *les deux droites AR et AS sont dites conjuguées par rapport au cercle* (C) (fig. 1272 *b*).

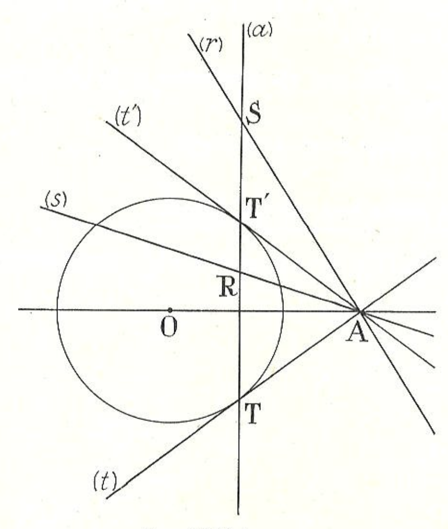


Fig. 1272 b.

1273. Triangle conjugué pour un cercle.

Soient deux points conjugués A et B (fig. 1273 *a*). Si leurs polaires (*a*)

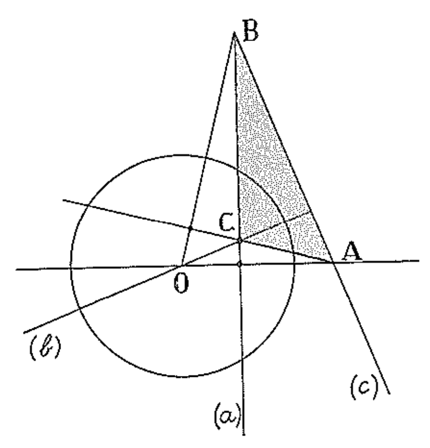


Fig. 1273 a.

et (*b*) se coupent en C, la polaire (*c*) n'est autre que la droite AB. Les points A, B, C sont conjugués deux à deux.

Les sommets A, B, C du triangle ont pour polaire les côtés (*a*) = (BC), (*b*) = (CA); (*c*) = (AB).

Le triangle ABC est dit conjugué pour le cercle (C), ou autopolaire pour (C).

Le point O est l'orthocentre du triangle.

1274. Courbes polaires réciproques.

Soit une courbe (Γ). On considère une tangente (*m*) en T à la courbe

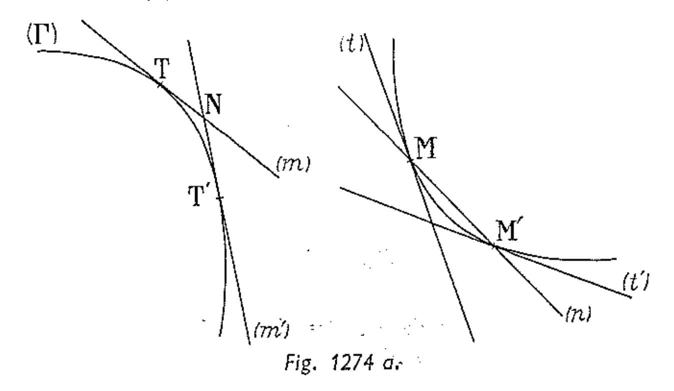


Fig. 1274 a.

(Γ). Il lui correspond un point M. Lorsque la tangente (m) varie, le point M décrit une courbe (γ) qui est dite courbe polaire réciproque de (Γ) (fig. 1274 *a*).

Soit maintenant une tangente (m') en T′ à la courbe (Γ), T′ étant un point voisin du point T. A (m') correspond un point M′ de (γ). Soit N le point d'intersection de (m) et (m'); la polaire (n) de N n'est autre que la droite MM′.

Lorsque T′ tend vers T, la polaire (n) de N tend vers la tangente en M à (γ). Comme N tend vers T, on peut dire que l'image de T est la tangente (t) en M à (γ) et que l'image de la tangente (m) en T à (Γ) est le point M de (γ).

Autrement dit :

(γ) est l'enveloppe des polaires des points de (Γ)

et

(Γ) est l'enveloppe des polaires des points de (γ).

1275. Corrélation.

La correspondance par polaires réciproques, à une propriété concernant des points et des droites associe une autre propriété concernant des droites et des points. Ces deux propriétés sont dites corrélatives.

Ainsi chaque théorème a son corrélatif. On aperçoit alors tout l'intérêt que présente cette correspondance pour l'étude de nouvelles propriétés.

CHAPITRE XCVI

LES CONIQUES DANS LE PLAN MÉTRIQUE

1276. Étude d'un ensemble de points.

On se propose le problème suivant :

Étudier l'ensemble des points dont le rapport des distances à un point fixe F et à une droite fixe D ne passant pas par F, est constant et égal à un nombre constant positif donné e.

On prend le point fixe F pour origine; l'axe $x'Fx$ est perpendiculaire à la droite D en H. Le plan est orthonormé (fig. 1276 *a* et *b*).

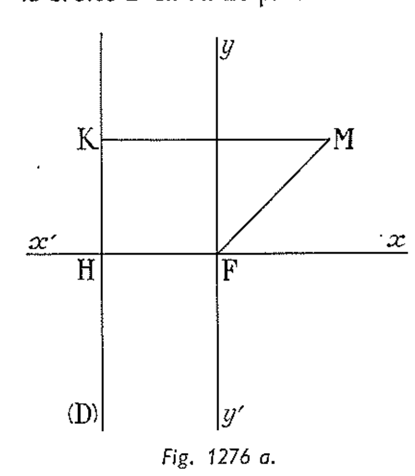


Fig. 1276 a.

On pose :

$$\overline{FH} = \mathbf{d} \qquad (1276\,;1)$$

Si un point M du plan se projette en K sur la droite D, l'ensemble est défini par la condition

$$\frac{MF}{MK} = \mathbf{e} \qquad (1276\,;2)$$

qui équivaut à

$$MF^2 = e^2 \cdot MK^2$$

Or :

$$\overline{KM} = x - d$$

et

$$MF^2 = x^2 + y^2$$

L'équation du lieu cherché est donc :

$$x^2 + y^2 = e^2\,(x - d)^2 \qquad (1276;3)$$

Ce lieu est donc *une conique.*

L'équation (1276; 3) s'écrit encore :

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2e^2 dx - e^2d^2 = 0$$

ou

$$\mathbf{y^2 = (e^2 - 1)\, x^2 - 2e^2 dx + e^2d^2} \qquad (1076\,;\,4)$$

Cette équation montre que x'Fx *est un axe de symétrie de la conique.*

Le point F est appelé le *foyer* de la conique; la droite D est la *directrice* de la conique *associée au foyer F*; e est l'*excentricité* de la conique.

La conique est donc définie par (F; D; e).

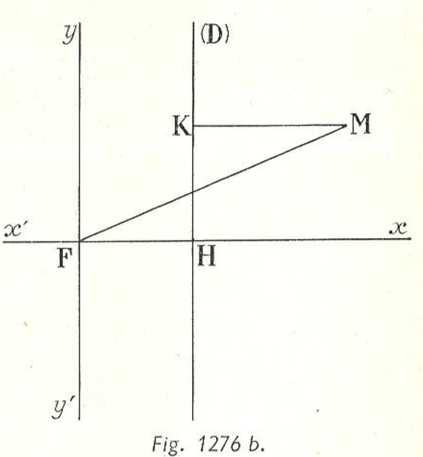


Fig. 1276 b.

1277. Cas où e = 1.

Si e = 1, l'équation devient

$$y^2 = -2\,dx + d^2$$

ou

$$y^2 = d\,(d - 2\,x)$$

La conique est donc une parabole. Elle coupe l'axe $x'Fx$ au point S

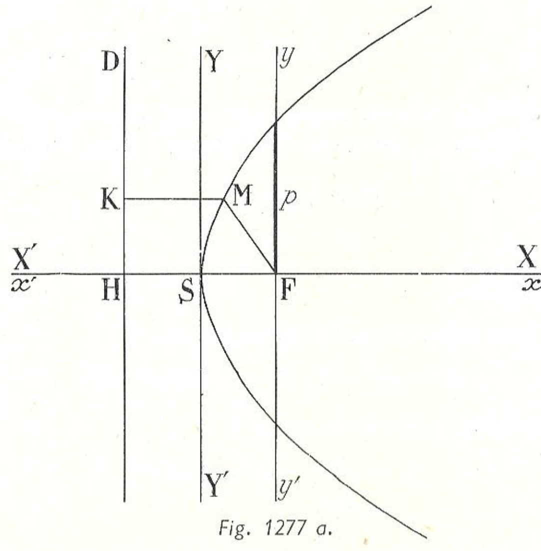


Fig. 1277 a.

d'abscisse $x = \frac{d}{2}$. Ce point S est le sommet de la parabole. C'est le milieu du segment FH (fig. 1277 *a* et *b*).

On a immédiatement l'équation de la demi-parabole située dans le demi-plan $y \geqslant 0$:

$$y = \sqrt{d(d - 2x)}$$

Si $x = 0$, on a $\qquad y = |d|$

Le nombre $p = |d| = FH$ est le paramètre de la parabole.

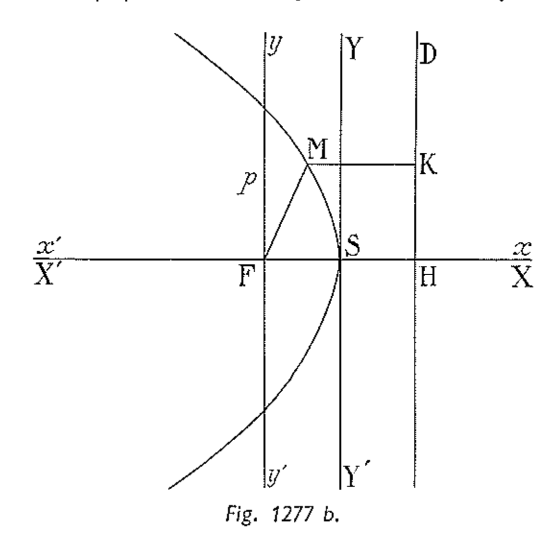


Fig. 1277 b.

La parabole est l'ensemble des points équidistants du point F et de la droite D.
Par une translation $t_{\overrightarrow{FS}}$ des axes, la parabole a pour nouvelle équation

$$\mathbf{Y^2 = 2dX} \qquad (1277 ; 1)$$

1278. Cas où e ≠ 1.

1° Lorsque e est différent de 1, l'équation s'écrit :

$$y^2 = (e^2 - 1)\,x^2 - 2\,e^2\,dx + e^2d^2$$

Le discriminant du trinôme en x est

$$\begin{aligned}\Delta' &= e^4d^2 - (e^2 - 1)\,e^2d^2 \\ &= e^2d^2\end{aligned}$$

Ce trinôme a donc toujours deux solutions réelles distinctes :

$$x = \frac{e^2d + ed}{e^2 - 1}$$

c'est-à-dire :

$$x_1 = \frac{ed(e+1)}{e^2-1} = \frac{ed}{e-1}$$

$$x_2 = \frac{ed(e-1)}{e^2-1} = \frac{ed}{e+1}.$$

Pour $x = x_1$ et $x = x_2$, y est nul, et on obtient les points A et A′ de la conique situés sur l'axe $x'Fx$ (fig. 1278 *a*, *b*).

On a :

$$\overline{OA} = \frac{ed}{e-1} \qquad \overline{OA'} = \frac{ed}{e+1}$$

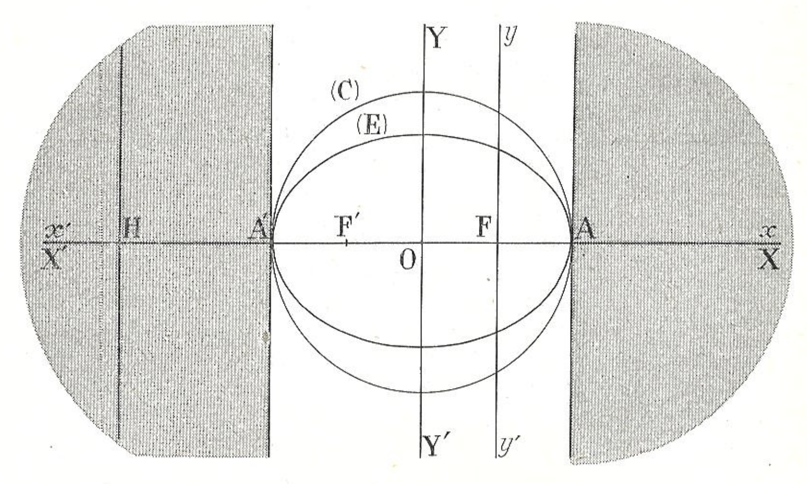


Fig. 1278 a.

L'équation de la conique s'écrit :

$$y^2 = (e^2-1)\left(x - \frac{ed}{e-1}\right)\left(x - \frac{ed}{e+1}\right) \quad (1278\,;\,1)$$

***Si* e $<$ *1*,** le trinôme est positif dans $\left[\frac{ed}{e-1}\,;\frac{ed}{e+1}\right]$, et la conique est dans la bande déterminée par les droites d'équation $x = \frac{ed}{e-1}$ et $x = \frac{ed}{e+1}$. *La conique est une ellipse* (fig. 1278 *a*).

Si e > 1, le trinôme est positif pour $x \notin \left[\frac{ed}{e-1} ; \frac{ed}{e+1}\right]$ et la conique est à l'extérieur de la bande. *La conique est une hyperbole* (fig. 1278 *b*).

2° De plus pour les points A et A', on a :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AH}} = e \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'F}}{\overline{A'H}} = -e.$$

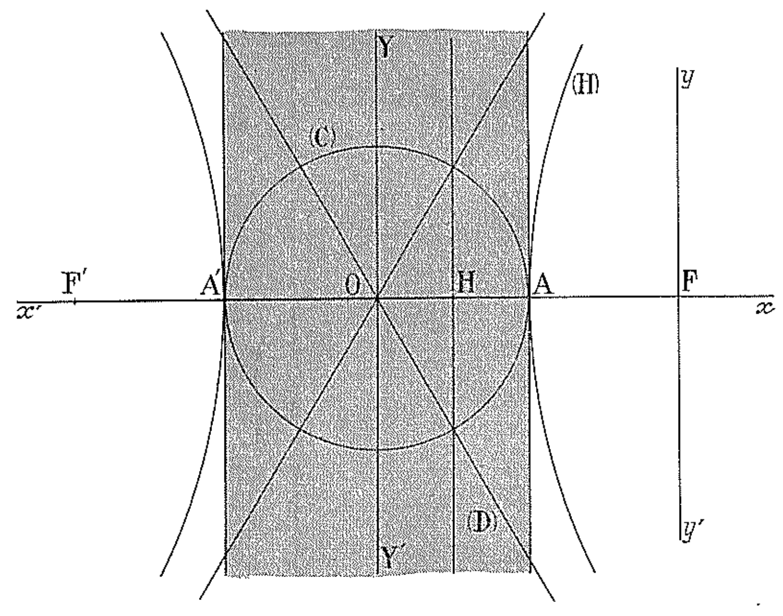


Fig. 1278 b.

Ce sont les points qui partagent le vecteur $\overrightarrow{FH}$ dans les rapports + e et − e. On a (cf. n° 635) :

$$\overline{FA} = \frac{e}{e-1}\overline{FH} = \frac{ed}{e-1} = x_1$$

et

$$\overline{FA'} = \frac{-e}{-e-1} \cdot \overline{FH} = \frac{ed}{e+1} = x_2$$

On a : (F, H; A, A') = − 1, et

Le quaterne A, A', F, H est harmonique.

Soit O le milieu du segment AA′; il partage $\overrightarrow{FH}$ dans le rapport e^2; donc :

$$\overline{FO} = \frac{e^2}{e^2 - 1}\,\overline{FH}$$

$$\overline{FO} = \frac{e^2 d}{e^2 - 1} \qquad (1278\,;\,2)$$

3° En envisageant une translation des axes de vecteur $\overrightarrow{FO}$, les formules de translation sont :

$$x = \frac{e^2 d}{e^2 - 1} + X$$

$$y = Y.$$

L'équation devient :

$$Y^2 = (e^2 - 1)\left[X + \frac{e^2 d}{e^2 - 1}\right]^2 - 2e^2 d\left[X + \frac{e^2 d}{e^2 - 1}\right] + e^2 d^2$$

ou

$$Y^2 = (e^2 - 1)\,X^2 - \frac{e^2 d^2}{e^2 - 1}$$

ou enfin

$$X^2 + \frac{Y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(e^2 - 1)^2}$$

ou encore

$$\frac{X^2}{\dfrac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1 - e^2}} = 1.$$

On écrit :

$$\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} = 1 \qquad (1278\,;\,3)$$

on posant

$$\alpha = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}.$$

Cette équation montre que *le point O est un centre de symétrie, et que les axes X′OX, Y′OY sont des axes de symétrie.*
L'axe X′OX est appelé l'axe focal.

Si e est inférieur à 1, on pose :

$$\alpha = a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{e \cdot |d|}{1 - e^2}$$

et

$$\beta = b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2} \qquad \text{ou} \qquad b = \frac{e \cdot |d|}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Alors l'équation s'écrit :

$$\frac{\mathbf{X}^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{Y}^2}{\mathbf{b}^2} = 1 \qquad (1278;\ 4)$$

C'est *l'équation réduite de l'ellipse.*

On a :

$$OA = OA' = a \quad \text{et} \quad OB = OB' = b \text{ (fig. 1278 } a \text{ et } c\text{).}$$

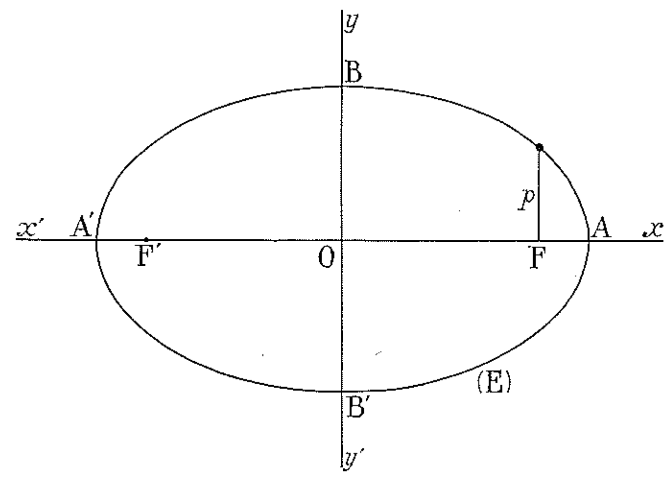


Fig. 1278 c.

Si e est supérieur à 1, on pose :

$$\alpha = a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{e \cdot |d|}{e^2 = 1}$$

et

$$\beta = -\, b^2 = -\, \frac{e^2d^2}{e^2 - 1} \qquad \text{ou} \qquad b = \frac{e \cdot |d|}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Alors l'équation s'écrit :

$$\frac{\mathbf{X}^2}{\mathbf{a}^2} - \frac{\mathbf{Y}^2}{\mathbf{b}^2} = 1 \qquad (1278;\ 5)$$

C'est *l'équation réduite de l'hyperbole.*

Cette hyperbole admet les droites (Δ) et (Δ') d'équations $Y = \frac{b}{a} X$ et $Y = -\frac{b}{a} X$ comme asymptotes (fig. 1278 *b*, *d*).

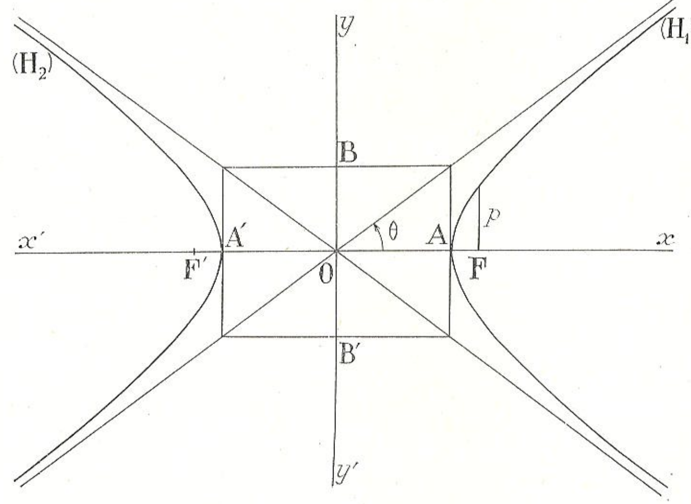


Fig. 1278 d.

En posant :

$$\text{angle } (Ox ; \Delta) = \theta$$

on a

$$\mathbf{tg}\, \theta = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}. \qquad (1278 ; 6)$$

1279. Éléments des coniques à centre.

1° On pose :

$$OF = \mathbf{c} \qquad (1279 ; 1)$$

ou (cf 1278 ; 2)

$$c = \frac{\mathrm{e} \cdot |d|}{|\mathrm{e}^2 - 1|}$$

2° D'autre part, dans tous les cas :

$$a = \frac{\mathrm{e} \cdot |d|}{|\mathrm{e}^2 - 1|}$$

et

$$c = \mathrm{e} \cdot a$$

D'où :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} \qquad (1279 ; 2)$$

3° On a encore :

$$\overline{\text{OH}} = \overline{\text{OF}} + \overline{\text{FH}}$$
$$= \frac{e^2 d}{1 - e^2} + d$$

ou

$$\overline{\text{OH}} = \frac{d}{1 - e^2}$$

D'où :

$$\delta = \text{OH} = \frac{|d|}{|1 - e^2|} = \frac{a^2}{c}$$

et

$$\delta = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{c}}. \qquad (1279 ; 3)$$

4° On a aussi :

$$\alpha - \beta = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 d^2}{1 - e^2}$$
$$= \frac{e^4 d^2}{(1 - e^2)^2}$$
$$= c^2$$

D'où :

$$\alpha - \beta = \mathbf{c}^2 \qquad (1279 ; 4)$$

Dans le cas de l'ellipse, cette relation s'écrit :

$$a^2 - b^2 = c^2$$

ou

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 \qquad (1279 ; 5)$$

Dans le cas de l'hyperbole, la relation s'écrit :

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 \qquad (1279 ; 6)$$

5° On a :

$$\frac{|\beta|}{a} = \frac{e^2 d^2}{|1 - e^2|} \times \frac{|1 - e^2|}{e \cdot |d|}$$
$$= e \cdot |d|$$

On pose :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}} = \mathbf{e} \cdot |\mathbf{d}| \qquad (1279 ; 7)$$

p est le paramètre de la conique.

Or, pour $x = c$, on a :

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{Y^2}{\beta} = 1$$

ou

$$\frac{Y^2}{\beta} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$
$$= 1 - e^2.$$

D'où :

$$Y^2 = \beta(1 - e^2)$$
$$= \frac{e^2 d^2}{1 - e^2} \cdot (1 - e^2)$$
$$= e^2 d^2$$

Et :

$$|Y| = e \cdot |d|$$

Par suite :

$$Y_F = p \qquad (1279 ; 8)$$

Le paramètre d'une conique est l'ordonnée au foyer.

6° *Le cercle (C) de diamètre AA', de centre O et de rayon* a, *est le cercle principal de la conique.*

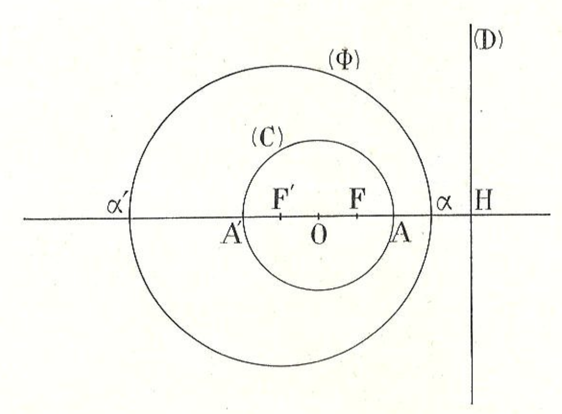


Fig. 1279 a.

Comme (A, A'; F, H) = − 1 (fig. 1279 *a*) :

La directrice (D) est la polaire de F par rapport au cercle principal.

7° Comme O est centre de symétrie, il y a deux foyers F et F′, et deux directrices (D) et (D′) symétriques pour O (fig. 1279 *b* et *c*).

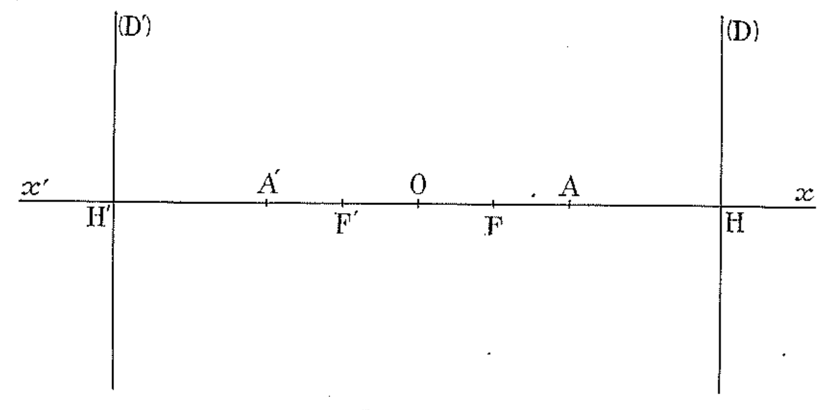


Fig. 1279 b.

La conique est définie par (F; D; e) ou par (F′; D′; e).

8° ***Le cercle (Φ) de centre F′ et de rayon 2a est le cercle directeur associé au foyer F.***

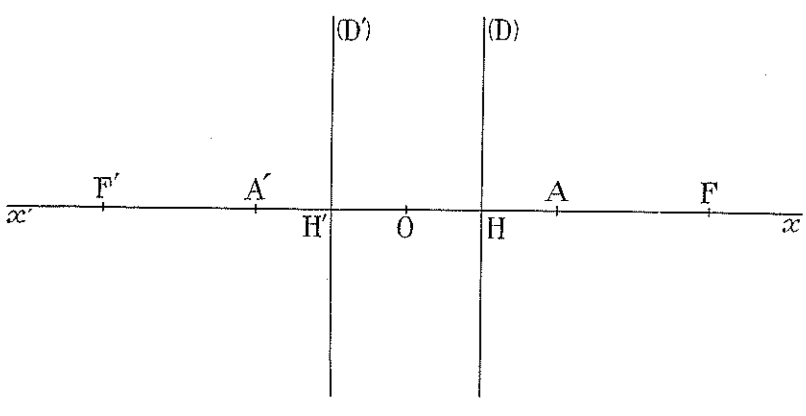


Fig. 1279 c.

Il y a un second cercle directeur (Φ′) associé au foyer F′.

Le cercle directeur (Φ) est l'homothétique du cercle principal (C) dans l'homothétie hom(F; 2).

9° Dans le cas de l'hyperbole (cf. n° 1278; 6) on a :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$$

D'où :

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{a^2}{c^2}$$

et

$$\cos \theta = \frac{1}{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} \qquad (1279 ; 9)$$

Par suite :

$$\sin \theta = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\sqrt{\mathbf{e}^2 - 1}}{\mathbf{e}}. \qquad (1279 ; 10)$$

1280. Remarque.

L'équation du cercle directeur (Φ) est

$$(x + c)^2 + y^2 - 4\,a^2 = 0$$

et l'équation du cercle-point F est

$$(x - c)^2 + y^2 = 0$$

L'équation de l'axe radical de ces deux cercles est

$$(x + c)^2 + y^2 - 4\,a^2 = (x - c)^2 + y^2$$

ou

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

D'où :

L'axe radical du cercle-point F et du cercle directeur (Φ) associé à F est la directrice associée au foyer F.

1281. Nouvelle définition de la parabole.

La parabole de foyer F et de directrice (D) est le lieu des points M tels que MF = MK (fig. 1281 *a*).

On considère les cercles (μ) de centre M et passant par F; pour qu'un cercle (μ) soit tangent à (D) en K, il faut et il suffit que MF = MK.

Donc :

La parabole de foyer F et de directrice (D) est le lieu des centres des cercles passant par F et tangents à la droite (D).

1282. Nouvelle définition des coniques à centre.

Après cette nouvelle définition de la parabole, on peut se demander s'il n'existe pas une définition analogue pour l'ellipse et l'hyperbole.

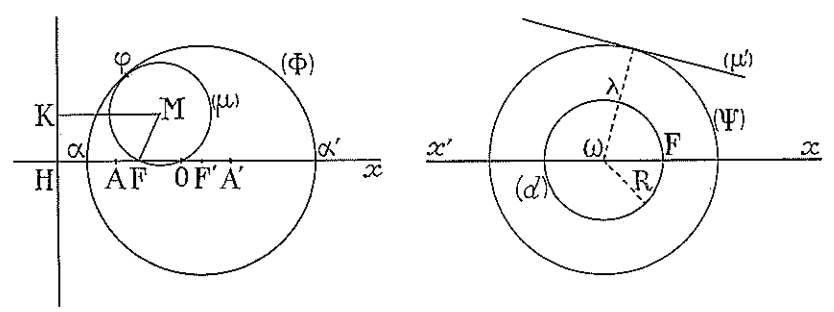


Fig. 1282 a.

On considère les cercles (μ) ayant pour centre un point M de la conique et passant par F, donc de rayon MF = e.MK. On se propose de rechercher à quelle courbe les cercles (μ) restent tangents (fig. 1282 *a* et *b*).

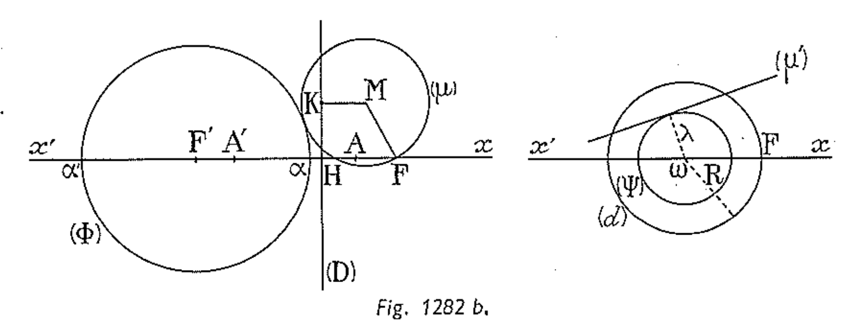


Fig. 1282 b.

Un cercle (μ), de centre M et de rayon MF, et la directrice (D) sont transformés par une inversion de centre F et de puissance p quelconque, en une droite (μ') et en un cercle (d) de centre ω situé sur l'axe local et de rayon R. Ce cercle (d) est fixe.

Si λ est la distance de ω à la droite (μ'), on a (cf. nº 1255) :

$$\frac{MF}{MK} = \frac{R}{\lambda} = e$$

Comme R et e sont des constantes, $\lambda = \frac{R}{e}$ est une constante. La droite (μ') reste donc à la distante $\lambda = \frac{R}{e}$ de ω; par suite elle reste tangente à un cercle fixe Ψ de centre ω et de rayon $\lambda = \frac{R}{e}$.

L'inversion conservant le contact, les cercles (μ) restent tangents à un cercle (Φ) inverse de (Ψ) dans l'inversion considérée.

On peut préciser la position du cercle Φ.

Son centre est évidemment sur l'axe focal.

Il est possible de trouver les points de (Φ) situés sur $x'Ox$. Les cercles (A; AF) et (A'; A'F) sont des cercles (μ) particuliers tangents à (Φ). Les points de contact sont α et α' respectivement symétriques de F pour A et A'.

Le cercle (Φ) n'est donc autre que le cercle de diamètre $\alpha\alpha'$; ce n'est autre que le cercle directeur associé à F, c'est-à-dire le cercle (F'; 2 a).

Donc :

Une conique à centre (ellipse ou hyperbole) est le lieu des centres des cercles qui passent par le point fixe F et qui sont tangents à un cercle Φ.

1283. Définition bifocale de l'ellipse.

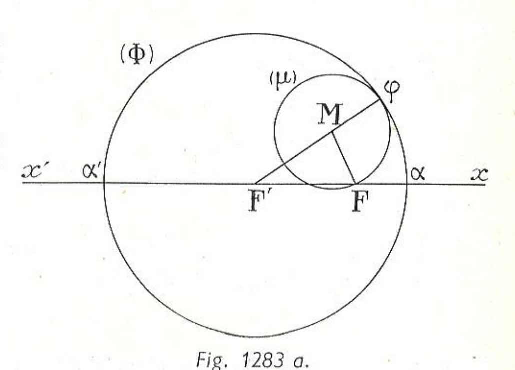


Fig. 1283 a.

On remarque que, si e est inférieur à 1, le point fixe F est intérieur à (Φ).

Pour qu'un cercle (μ) de centre M et passant par F soit tangent en φ à (Φ), il faut et il suffit que la distance des centres M et F' soit égale à la différence des rayons; donc que (fig. 1283 a) :

$$MF' = F'\varphi - MF$$

ou

$$MF + MF' = 2\,a.$$

Par suite :

L'ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes F et F′ est constante.

1284. Définition bifocale de l'hyperbole.

On remarque que si e est supérieur à 1, le point fixe F est extérieur à (Φ).

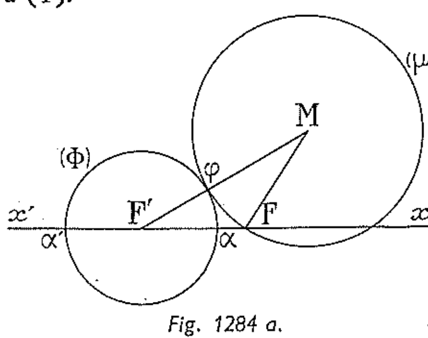


Fig. 1284 a.

Pour qu'un cercle (μ) de centre M et passant par F soit tangent extérieurement en φ à (Φ), il faut et il suffit que la distance des centres M et F′ soit égale à la somme des rayons; donc (fig. 1284 *a*) :

$$MF' = MF + F'\varphi$$

ou

$$MF' - MF = 2a \qquad (1284; 1)$$

Pour qu'un cercle (μ) de centre M et passant par F soit tangent intérieurement en φ à (Φ), il faut et il suffit que la distance des centres M et F′ soit égale à la différence des rayons; donc (fig. 1284 *b*) :

$$MF' = MF - F'\varphi$$

ou

$$MF - MF' = 2a \qquad (1284; 2)$$

Fig. 1284 b.

Dans les deux cas, on a :

$$|MF - MF'| = 2a. \qquad (1284; 3)$$

Et :

L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante.

1285. Expression des rayons-vecteurs.

On peut calculer les rayons-vecteurs

$$MF = r \quad \text{et} \quad MF' = r'$$

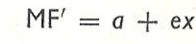
en fonction de l'abscisse x du point M, $\overline{OP} = x$.

1° Ellipse.

Si le point M appartient à l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on a (fig. 1285 *a*) :

$$\begin{aligned} MF &= e \cdot MK \\ &= e \cdot \overline{PH} \\ &= e(\overline{OH} - \overline{OP}) \\ &= e\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \\ &= a - ex \end{aligned}$$

et



$$MF' = a + ex$$

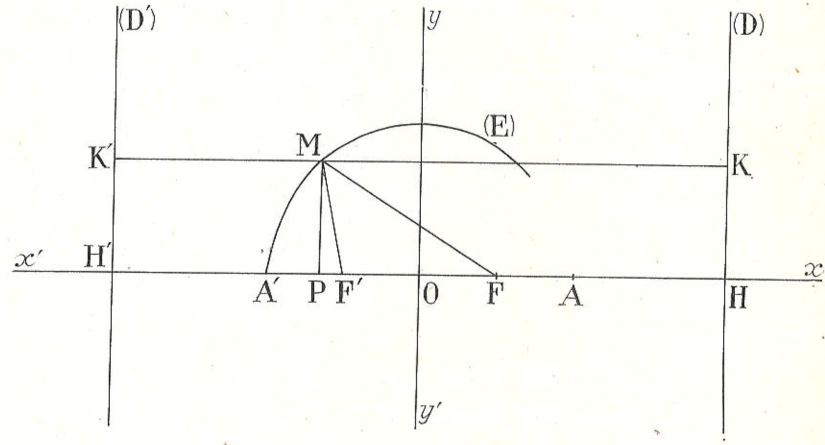


Fig. 1285 a.

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \boldsymbol{MF} &= \mathbf{a - ex} \\ \mathbf{r'} = \boldsymbol{MF'} &= \mathbf{a + ex} \end{aligned} \qquad (1285\,;\,1)$$

2e Hyperbole.

Si le point M appartient à la branche de droite de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ on a (fig. 1285 *b*) :

$$\begin{aligned} MF &= e \cdot MK \\ &= e \cdot \overline{HP} \\ &= e(\overline{OP} - \overline{OH}) \\ &= e\left(x - \frac{a^2}{c}\right) \\ &= ex - a \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} MF' &= 2a + MF \\ &= 2a + ex - a \\ &= a + ex. \end{aligned}$$

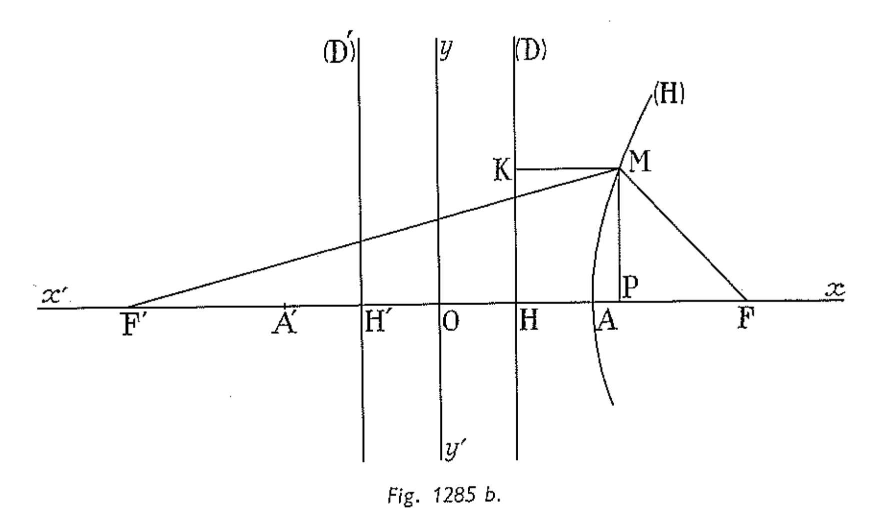


Fig. 1285 b.

D'où :

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{MF} = \mathbf{ex - a}$$
$$\mathbf{r'} = \boldsymbol{MF'} = \mathbf{ex + a} \qquad (1285\,;\,2)$$

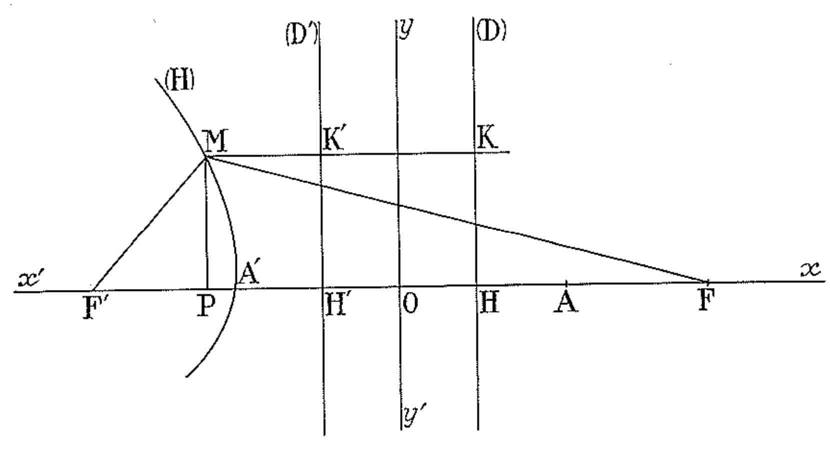


Fig. 1285 c.

Si le point M appartient à la branche de gauche, on a (fig. 1285 *c*) :

$$\begin{aligned} MF &= e \cdot MK \\ &= e \cdot \overline{PH} \\ &= e(\overline{OH} - \overline{OP}) \\ &= e\left(\frac{a^2}{c} - x\right) \\ &= a - ex \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} MF' &= MF - 2a \\ &= a - ex - 2a \\ &= -a - ex \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \boldsymbol{MF} = \mathbf{a - ex} \\ \mathbf{r'} &= \boldsymbol{MF'} = \mathbf{-a - ex} \end{aligned} \qquad (1285\,;\,3)$$

1286. Autre définition des coniques à centre.

Si le point M $(x; y)$ se projette en P sur $x'Ox$, on a :

$$\overline{PA} = \frac{ed}{e-1} - x$$

$$\overline{PA'} = \frac{ed}{e+1} - x$$

$$\overline{PM} = y$$

L'équation (1278 ; 1) s'écrit :

$$y^2 = (e^2 - 1)\left(\frac{ed}{e-1} - x\right)\left(\frac{ed}{e+1} - x\right)$$

ou

$$\overline{PM}^2 = (e^2 - 1) \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PA'} \qquad (1286\,;\,1)$$

1287. Hyperbole équilatère.

On appelle hyperbole équilatère une hyperbole dont les deux asymptotes sont perpendiculaires (fig. 1287 *a*).

L'angle θ est donc égal à $\frac{\pi}{4}$; donc $\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = 1$ et $a = b$.

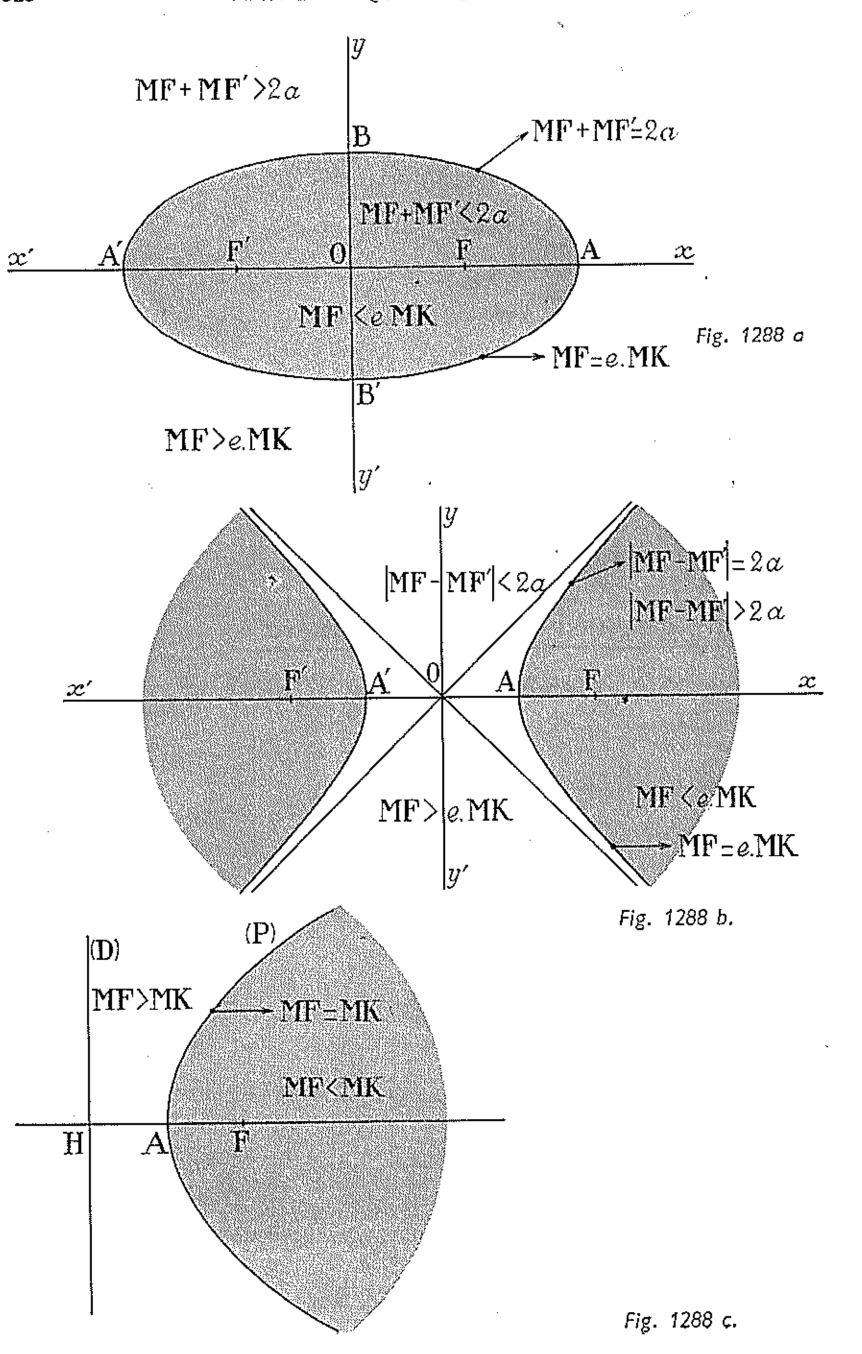


Fig. 1288 a

Fig. 1288 b.

Fig. 1288 c.

L'équation de l'hyperbole équilatère est donc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\mathbf{x^2 - y^2 = a^2} \qquad (1287\ ;\ 1)$$

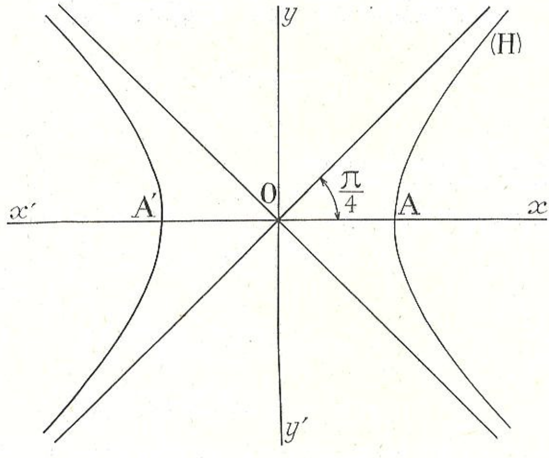


Fig. 1287 a.

D'autre part on a :

$$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{e}$$

D'où :

$$\mathbf{e = \sqrt{2}} \qquad (1287\ ;\ 2)$$

L'excentricité d'une hyperbole équilatère est e = $\sqrt{2}$.

1288. Régionnement.

Une conique divise le plan en régions; deux pour l'ellipse et la parabole, trois pour l'hyperbole.

La région (ou les régions) contenant les foyers constitue l'intérieur de la conique; l'autre région est l'extérieur.

On peut comparer MF + MF′ et 2 *a* suivant les régions; ou MF et eMK suivant les régions.

Les figures (1288, *a*, *b*, *c*) donnent des régionnements dans le cas de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

CHAPITRE XCVII

CONIQUES ET CONTACT

1289. Tangente à une conique.

Soit une conique d'équation

$$y^2 = ax^2 + bx + c$$

On a :

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

ou

$$y = -\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

La fonction $y = y(x)$ étant dérivable en tout point de l'ensemble de définition, on en déduit :

En chaque point d'une conique il existe une tangente unique.

1290. Propriété métrique de la tangente à une conique.

Soit une conique déterminée par (F; D; e). Son équation est (fig. 1290 *a*, *b*, *c*).

$$\left\| \overrightarrow{FM} \right\| = e \cdot \left\| \overrightarrow{MK} \right\|$$

En dérivant par rapport à la variable x abscisse de M, on a (cf. 1120) :

$$\frac{\overrightarrow{FM}}{\left\| \overrightarrow{FM} \right\|} \cdot \frac{d\left(\overrightarrow{FM}\right)}{dx} = e \cdot \frac{\overrightarrow{KM}}{\left\| \overrightarrow{KM} \right\|} \cdot \frac{d\left(\overrightarrow{KM}\right)}{dx} \qquad (1290\,;\,1)$$

Or :

$$\frac{\overrightarrow{FM}}{\left\| \overrightarrow{FM} \right\|} = \vec{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{KM}}{\left\| \overrightarrow{KM} \right\|} = \vec{u}$$

sont des vecteurs unitaires sur FM et KM; on envisage la base mobile normée $(\vec{u}; \vec{R})$.

On pose :

$$\frac{d(\overrightarrow{FM})}{dx} = \vec{T}$$

$\vec{T}$ est un vecteur directeur de la tangente en M à la conique.

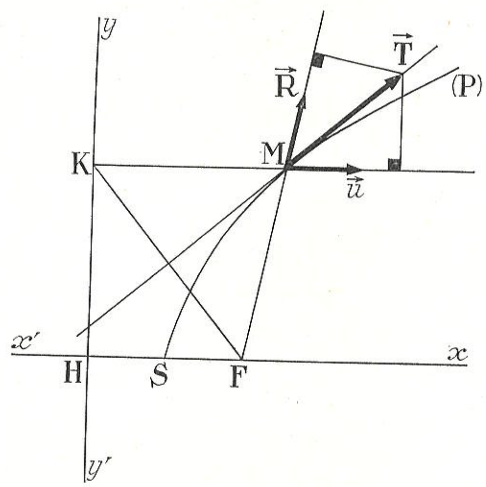


Fig. 1290 a.

On a, d'autre part :

$$\frac{d(\overrightarrow{KM})}{dx} = \frac{d(\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FM})}{dx} = \frac{d(\overrightarrow{FM})}{dx} = \vec{T}$$

car $\overrightarrow{KH}$ et $\overrightarrow{HF}$ ne dépendent pas de x.

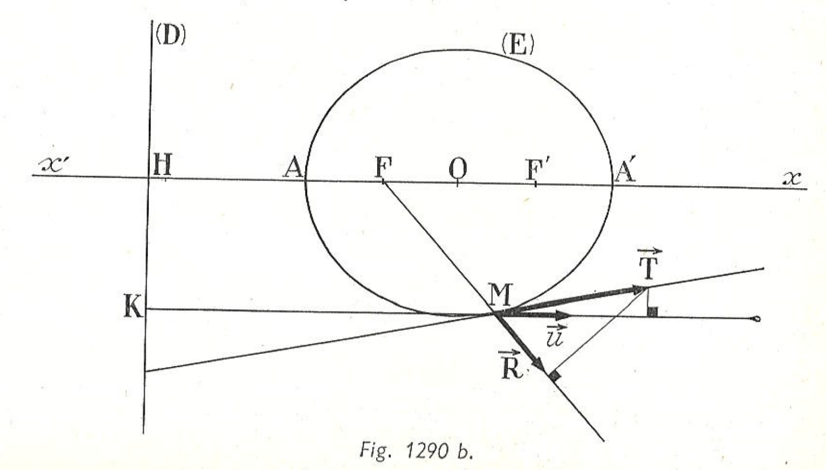


Fig. 1290 b.

La formule (1290 ; 1) s'écrit alors :

$$\vec{R} \cdot \vec{T} = e \cdot \vec{u} \cdot \vec{T}$$

$Y = \vec{R}.\vec{T}$ est la mesure algébrique de la projection orthogonale de $\vec{T}$ sur l'axe de vecteur unitaire $\vec{R}$ et $X = \vec{u}.\vec{T}$ est la mesure algébrique de la projection orthogonale de T sur l'axe de vecteur unitaire $\vec{u}$.

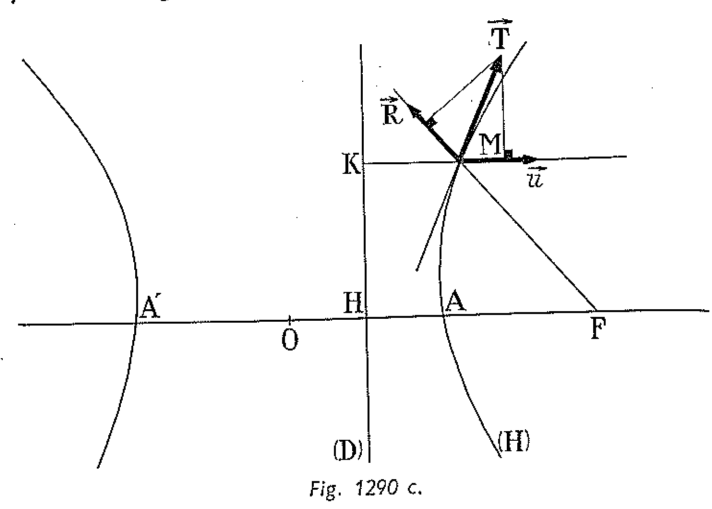


Fig. 1290 c.

Entre X et Y on a donc la relation

$$Y = eX$$

qui permet de construire la tangente en M.

1291. Cas particulier de la parabole.

Si la conique est une parabole $e = 1$ et $Y = X$; la tangente est donc la première bissectrice du repère $(M; \vec{u}; \vec{R})$ (fig. 1290 *a*).

Et :

La tangente MT en un point M d'une parabole est la bissectrice intérieure de l'angle des demi-droites MF et MK.

On en déduit une construction de la tangente et du point de contact à partir du point K de la directrice.

La tangente est la médiatrice du segment FK, et le point de contact est le point d'intersection de la tangente et de la perpendiculaire en K à (D).

1292. Sous-tangente et sous-normale pour la parabole.

Soit P la projection de M sur l'axe $x'x$ (fig. 1292 *a*). La translation de vecteur $\overrightarrow{HP}$ transforme le triangle HFK en PNM.

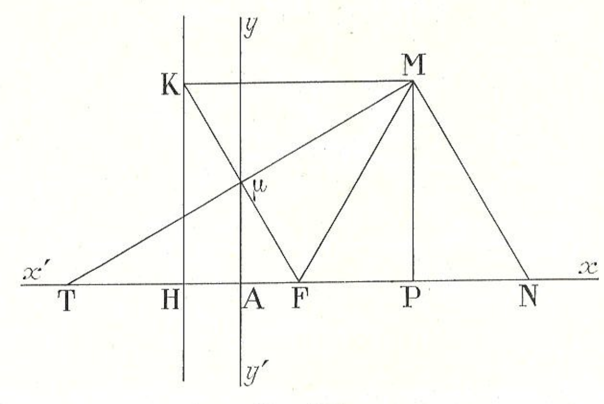


Fig. 1292 a.

Donc :

$$\overline{PN} = \overline{HF} = p$$

$\overline{PN}$ est la sous-normale de la parabole. D'où :

La valeur absolue de la sous-normale d'une parabole est égale au paramètre.

La tangente coupe $x'x$ en T. $\overline{PT}$ est la sous-tangente de la parabole. Dans le triangle MTN rectangle en N on a :

$$PM^2 = -\overline{PT} \cdot \overline{PN}$$

ou

$$y^2 = -p \cdot \overline{PT}$$

ou

$$2px = -p \cdot \overline{PT}$$

D'où :

$$\boldsymbol{\overline{PT} = -2x}$$

Comme $\overline{SP} = x$, on en déduit que *P et T sont symétriques pour le sommet S.*

1293. Propriété de la tangente à une ellipse.

Soit une ellipse de foyers F et F'; elle est définie par l'équation (fig. 1293 *a*) :

$$\|\overrightarrow{FM}\| + \|\overrightarrow{F'M}\| = 2a$$

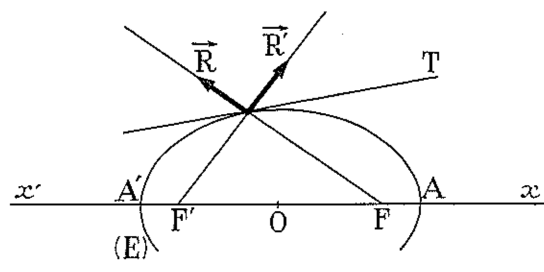


Fig. 1293 a.

En dérivant cette égalité par rapport à une variable quelconque *t*, on a :

$$\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} \cdot \frac{d(\overrightarrow{FM})}{dt} + \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} \cdot \frac{d(\overrightarrow{F'M})}{dt} = 0 \qquad (1293\,;\,1)$$

Or :

$$\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} = \vec{R} \quad \text{et} \quad \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} = \vec{R'}$$

sont des vecteurs unitaires sur FM et F'M; on envisage la base normée $(\vec{R}; \vec{R'})$.

On pose :

$$\frac{d(\overrightarrow{FM})}{dt} = \vec{T}$$

$\vec{T}$ est un vecteur directeur de la tangente en M à l'ellipse.

On a, d'autre part :

$$\frac{d(\overrightarrow{F'M})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{F'F} + \overrightarrow{FM})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{FM})}{dt} = \vec{T}$$

La formule (1293 ; 1) s'écrit :

$$\vec{R} \cdot \vec{T} + \vec{R'} \cdot \vec{T} = 0 \qquad (1293\,;\,2)$$

Or $X = \vec{R}.\vec{T}$ est la mesure algébrique de la projection orthogonale du vecteur $\vec{T}$ sur l'axe de vecteur unitaire $\vec{R}$, et $Y = \vec{R'}.\vec{T}$ est la mesure algébrique de la projection orthogonale du vecteur $\vec{T}$ sur l'axe de vecteur unitaire $\vec{R'}$.

On a donc :

$$X + Y = 0$$

Autrement dit :

La tangente MT en un point M d'une ellipse est bissectrice extérieure de l'angle des demi-droites MF et MF'.

1294. Propriété de la tangente à une hyperbole.

Soit une hyperbole de foyers F et F'; elle est définie par l'équation (fig. 1294 *a*)

$$\|\overrightarrow{FM}\| - \|\overrightarrow{F'M}\| = 2a$$

ou

$$\|\overrightarrow{FM}\| - \|\overrightarrow{F'M}\| = -2a$$

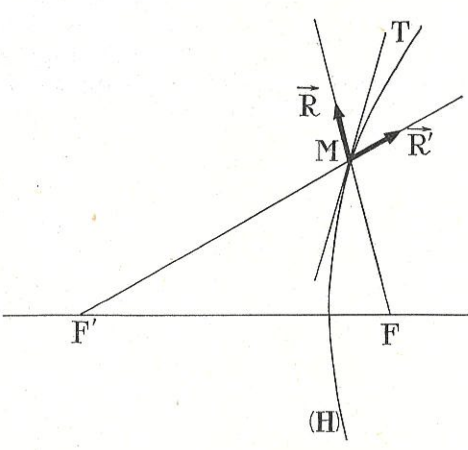


Fig. 1294 a.

En dérivant par rapport à une variable quelconque t, dans les deux cas, on a

$$\frac{\overrightarrow{FM}}{\|\overrightarrow{FM}\|} \cdot \frac{d(\overrightarrow{FM})}{dt} - \frac{\overrightarrow{F'M}}{\|\overrightarrow{F'M}\|} \cdot \frac{d(\overrightarrow{F'M})}{dt} = 0$$

D'où avec les mêmes notations qu'au n° 1293 :

$$\vec{R}\cdot\vec{T} - \vec{R'}\,\vec{T} = 0$$

ou

$$X - Y = 0$$

Autrement dit :

La tangente MT en un point M d'une hyperbole est bissectrice intérieure de l'angle des demi-droites MF et MF'.

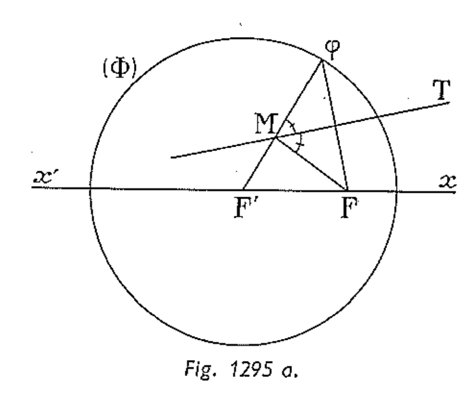


Fig. 1295 a.

1295. Remarque.

Des deux résultats précédents, on déduit une construction de la tangente et du point de contact à partir du point φ du cercle directeur (Φ).

La tangente est la médiatrice du segment Fφ, et le point de contact est le point d'intersection de la tangente et de la droite Fφ (fig. 1295 *a* et *b*).

Dans le cas de l'ellipse la construction précédente est toujours possible, le point F étant intérieur au cercle (Φ).

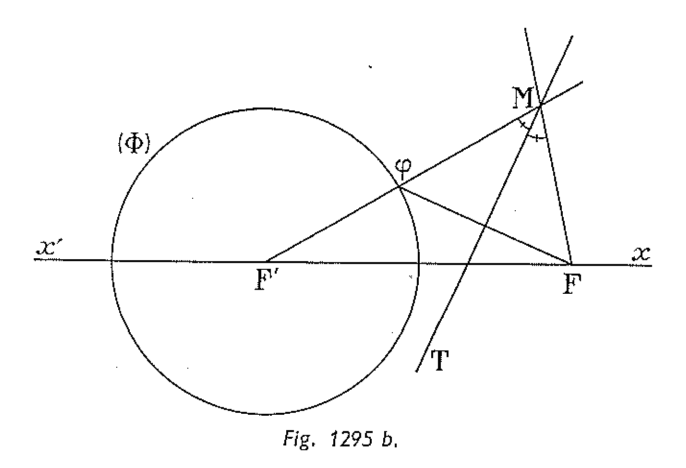


Fig. 1295 b.

Dans le cas de l'hyperbole, le point F est extérieur au cercle Φ; la tangente, médiatrice de Fφ existe toujours. Mais lorsque Fφ est l'une

ou l'autre des tangentes $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ à (Φ), les médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ sont les asymptotes de l'hyperbole. En effet, on a (fig. 1295 c) :

$$\cos\theta = \frac{F\varphi_1}{FF'} = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$

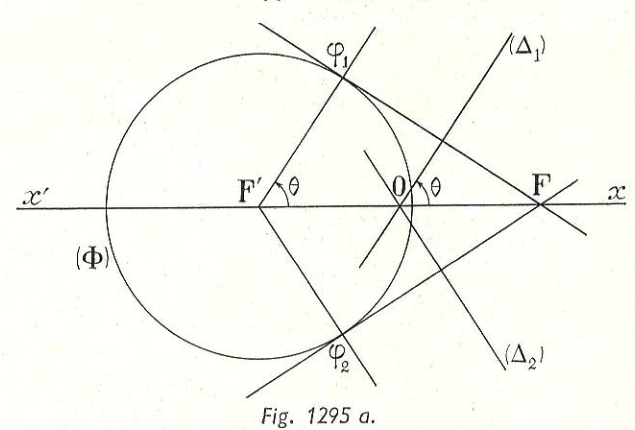


Fig. 1295 a.

Les points de contact sont les points à l'infini des asymptotes.

1296. Construction des asymptotes d'une hyperbole.

Les asymptotes d'une hyperbole sont déterminées par l'une des méthodes suivantes :

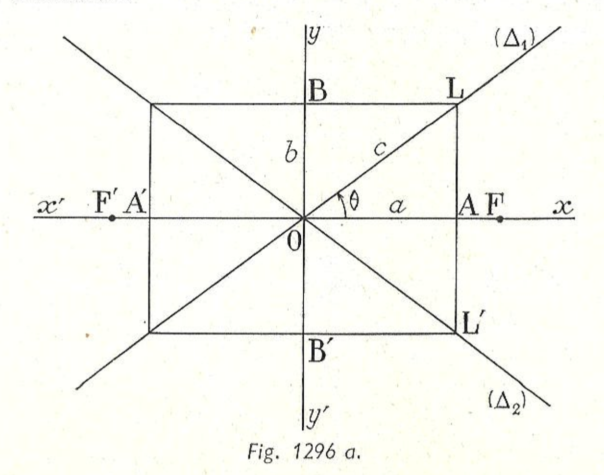


Fig. 1296 a.

1° a et b étant donnés, construire le rectangle des axes (fig. 1296 a). Les asymptotes sont les diagonales de ce rectangle.

En effet :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

2° Tracer le cercle de centre O et de rayon c (cercle de diamètre FF'); la tangente au sommet A coupe le cercle en L et L'. Les droites OL et OL' sont les asymptotes (fig. 1296 *b*).

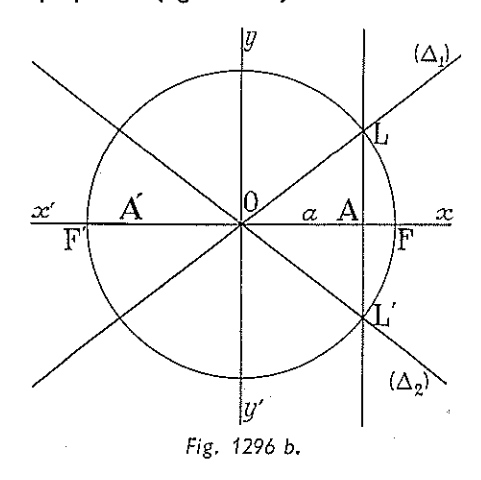


Fig. 1296 b.

En effet dans le triangle OAL, on a :

$$\text{AL} = \sqrt{\text{OL}^2 - \text{OA}^2} = \sqrt{c^2 - a^2} = b$$

3° Mener les tangentes $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ à (Φ); les asymptotes sont les médiatrices des segments $F\varphi_1$, et $F\varphi_2$. (fig. 1295 *c*).

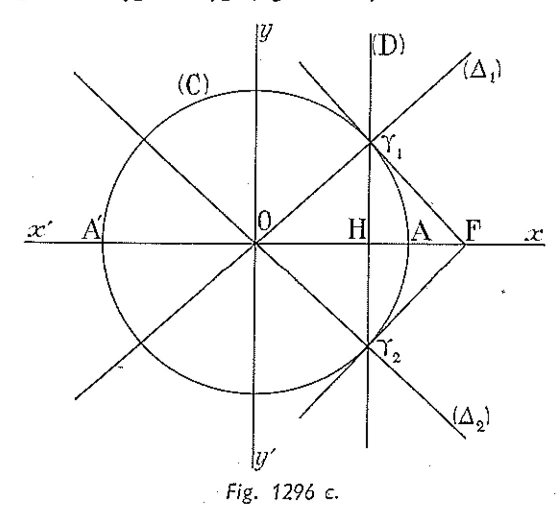


Fig. 1296 c.

4° Tracer le cercle principal de diamètre AA′, et les tangentes $F\gamma_1$ et $F\gamma_2$ à ce cercle. La droite $\gamma_1\gamma_2$ est la directrice associée à F; les asymptotes sont les droites $O\gamma_1$ et $O\gamma_2$ (fig. 1296 *c*).

En effet dans le triangle $O\gamma F$, on a :

$$\cos\theta = \frac{O\gamma}{OF} = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}.$$

1297. Sécante à une conique.

Une conique étant une courbe algébrique de degré 2, une droite la rencontre en deux points au plus (fig. 1297 *a*, *b*).

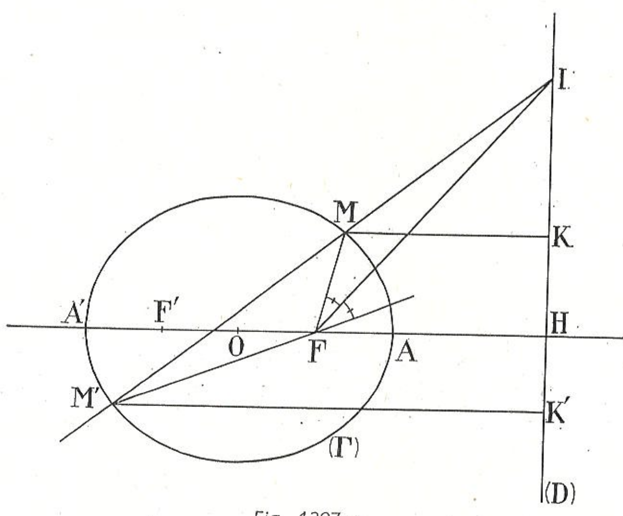


Fig. 1297 a.

Une sécante coupe la conique (Γ) en deux points M et M′, et coupe la directrice (D) en I et on a :

$$e = \frac{MF}{MK} = \frac{M'F}{M'K'}$$

D'où :

$$\frac{MK}{M'K'} = \frac{MF}{M'F}$$

Les triangles homothétiques IMK et IM′K′ donnent :

$$\frac{MK}{M'K'} = \frac{IM}{IM'}$$

Par suite :

$$\frac{IM}{IM'} = \frac{FM}{FM'} \qquad (1297\,;\,1)$$

ce qui prouve que I est le pied d'une bissectrice de l'angle F du triangle FMM'.

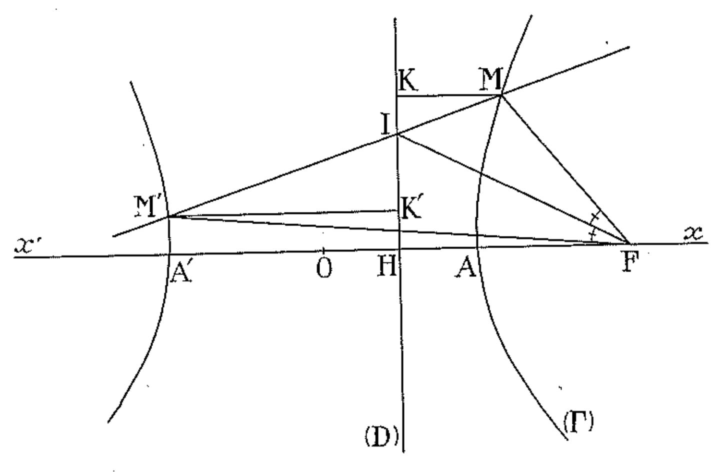


Fig. 1297 b.

Si M et M' sont d'un même côté de la directrice (D), la droite FI est bissectrice extérieure; si M et M' sont de part et d'autre de (D), la droite FI est bissectrice intérieure.

Donc :

L'angle sous lequel une corde MM' d'une conique est vue d'un foyer F a pour bissectrice la droite FI déterminée par le foyer F et le point I d'intersection de la directrice et de la sécante MM'.

Cette bissectrice est intérieure si M et M' sont sur les branches différentes d'une hyperbole; elle est extérieure dans tous les autres cas.

1298. Sécante focale.

Quand la droite MM' passe par F (sécante focale) la relation (1297; 1) subsiste (fig. 1298 *a*). **Et :**

Le quaterne (M, M'; F, I) est harmonique.

La directrice est donc le lieu des conjugués harmoniques du foyer pour toutes les cordes focales; on dit qu'elle est la polaire du foyer par rapport à la conique.

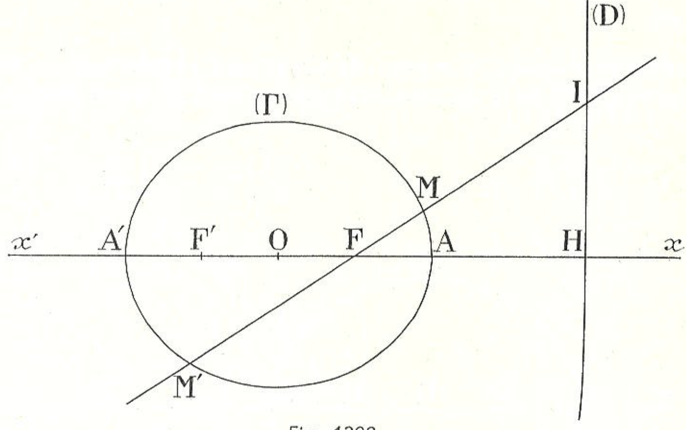


Fig. 1298 a.

1299. Propriété de la tangente à une conique.

Soit M un point d'une conique (Γ) et M' un point de (Γ) voisin de M; par conséquent M et M' sont d'un même côté de la directrice (D). La droite MM' coupant (D) en I, la droite FI est bissectrice extérieure de l'angle MFM' (fig. 1299 *a*).

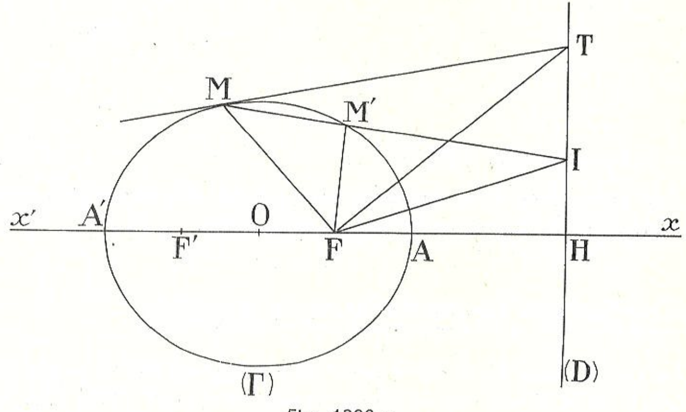


Fig. 1299 a.

Lorsque M' tend vers M, la bissectrice intérieure de l'angle MFM' tend vers FM; par suite la bissectrice extérieure a pour limite la perpendiculaire FT à FM, et I tend vers T.

Donc :

La portion de tangente à une conique comprise entre la directrice et le point de contact est vue du foyer associé sous un angle droit.

Ce théorème donne le moyen de construire simplement la tangente en un point donné de la conique lorsqu'on connaît le foyer et la directrice.

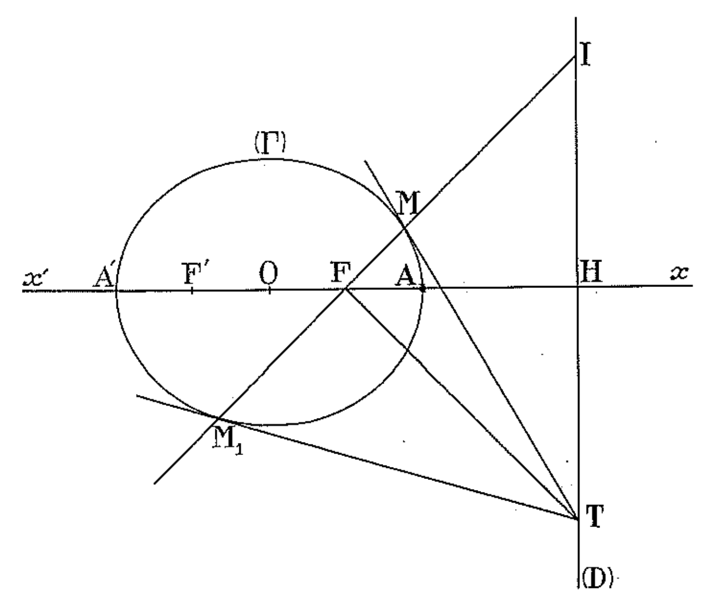


Fig. 1299 b.

En conséquence (fig. 1299 *b*) :

Les tangentes à la conique aux points d'intersection avec une sécante locale se coupent sur la directrice.

1300. Générations tangentielles de la parabole.

1° Le symétrique du foyer F pour une tangente MT à la parabole est un point K de la directrice et réciproquement (cf. n° 1291) (fig. 1300 *a*).

Donc :

Le lieu des symétriques du foyer pour les tangentes à la parabole est la directrice.

2° On peut dire aussi (Première génération tangentielle de la parabole) : (fig. 1300 *a*) :

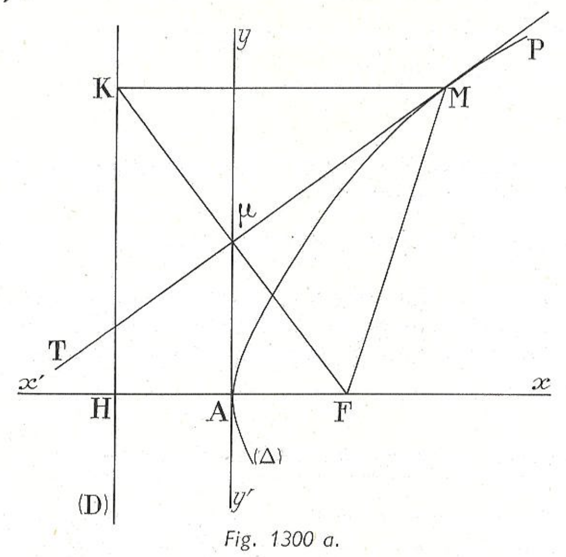


Fig. 1300 a.

L'enveloppe de la médiatrice du segment FK ayant pour extrémités le point fixe F et un point variable K d'une droite fixe (D) ne passant pas par F est la parabole de foyer F et de directrice (D).

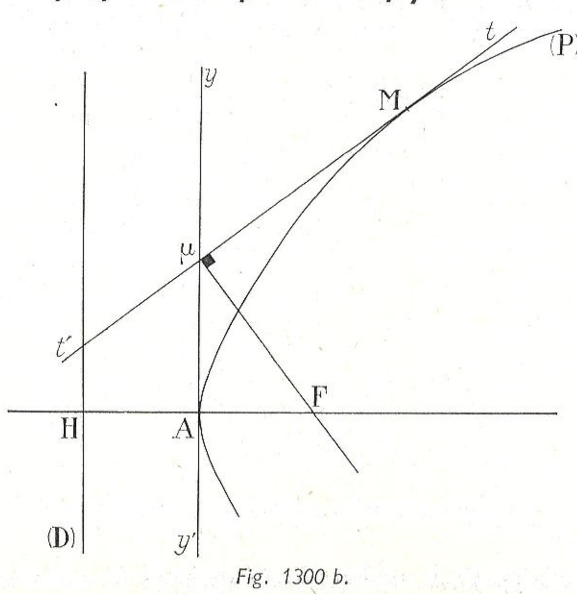


Fig. 1300 b.

3° Le milieu μ du segment FK est, en même temps, la projection orthogonale du foyer F sur la tangente MT. Comme μ est l'image de K par l'homothétie hom $\left(\left(F; \frac{1}{2}\right)\right)$ le lieu de μ est l'image de (D), c'est donc la tangente au sommet (fig. 1300 *b*).

Donc :

Le lieu des projections du foyer d'une parabole sur les tangentes est la tangente au sommet.

4° Ou encore (Deuxième génération tangentielle de la parabole) (fig. 1300 *b*).

Si le sommet μ d'un angle droit décrit une droite fixe (Δ) et si l'un de ses côtés passe par un point fixe F n'appartenant pas à (Δ), l'autre côté enveloppe la parabole de foyer F et de tangente au sommet (Δ).

1301. Génération tangentielle des coniques à centre.

1° Le symétrique du foyer F d'une conique à centre (Γ) pour la tangente MT est un point φ du cercle directeur (Φ) associé à F et réciproquement (cf. n° 1293, 1294).

Donc (fig. 1301 *a*, *b*) :

Le lieu des symétriques d'un foyer F pour les tangentes à une conique à centre (Γ) est le cercle directeur (Φ) associé au foyer F.

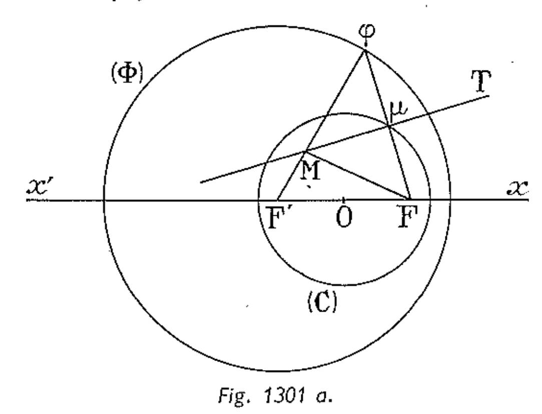


Fig. 1301 a.

2° On peut dire aussi (Première génération tangentielle des coniques à centre) :

L'enveloppe de la médiatrice du segment Fφ ayant pour extré-

mités le point fixe F et un point variable φ d'un cercle fixe (Φ) ne passant pas par F est la conique à centre de foyer F et de cercle directeur (Φ).

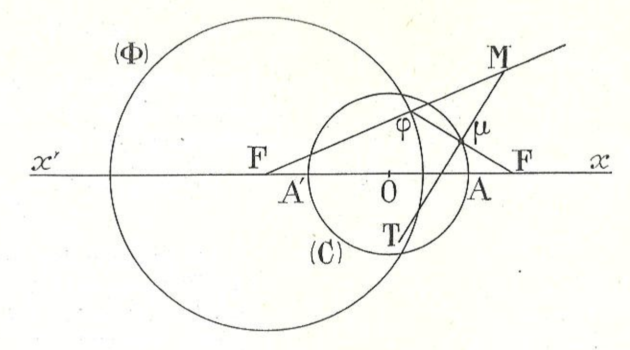


Fig. 1301 b.

3º Le milieu μ de Fφ est en même temps la projection orthogonale de F sur la tangente MT. Comme μ est l'image de φ par l'homothétie hom $\left(F; \frac{1}{2}\right)$, le lieu de μ est l'image de (Φ), c'est donc le cercle principal (C) de la conique (fig. 1301 *a*, *b*).

Donc :

Le lieu des projections du foyer d'une conique à centre sur les tangentes est le cercle principal.

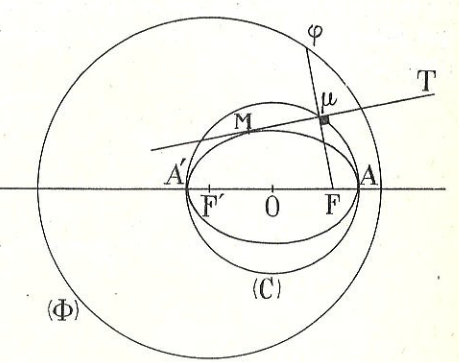


Fig. 1301 c.

4º Ou encore (Deuxième génération tangentielle des coniques à centre) (fig. 1301 c) :

Si le sommet μ d'un angle droit décrit un cercle fixe (C) et si l'un de ses côtés passe par un point fixe F n'appartenant pas à (C) l'autre côté enveloppe la conique de foyer F et de cercle principal (C).

5º La propriété de la conique (Γ) relative aux projections de F sur les tangentes est évidemment valables pour F'. Soient donc μ et μ' les projections des foyers F et F' sur la tangente en M; ces points appartiennent au cercle principal (C) de la conique (fig. 1301 *d*, e).

Si $F\mu$ recoupe (C) en μ_1, on voit immédiatement, par symétrie que μ' et μ_1 sont symétriques pour 0, et que $\overline{F'\mu'} = -\overline{F\mu_1}$. Par suite, on a :

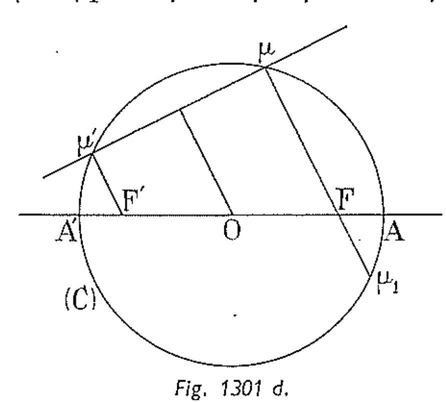


Fig. 1301 d.

$$\overline{F\mu} \cdot \overline{F'\mu'} = -\overline{F\mu} \cdot \overline{F\mu_1}$$
$$= -\bar{F}_{(C)}$$

Or la puissance $\bar{F}_{(C)}$ de F par rapport à (C) est $c^2 - a^2$; et en conséquence, on a :

$$\overline{F\mu} \cdot \overline{F'\mu'} = a^2 - c^2 \qquad (1301 ; 1)$$

Le produit des distances algébriques des foyers d'une conique à centre à une tangente est constant et égal à $a^2 - c^2$.

Dans le cas de l'ellipse $a^2 - c^2 = b^2$ et le produit est positif.

Dans le cas de l'hyperbole $a^2 - c^2 = -b^2$ et le produit est négatif.

6° *Soit à chercher l'enveloppe des droites du plan telles que le produit des distances algébriques de deux points fixes F et F' à ces droites soit égal à un nombre réel donné k non nul.*

Soient μ et μ' les projections de F et F' sur une des droites considérées. Le milieu O de FF' est équidistant de μ et μ'. Soit (C) le cercle de centre O qui passe par μ et μ'; ce cercle passe aussi par le symétrique μ_1 de μ' pour O (fig. 1301 *d*, e).

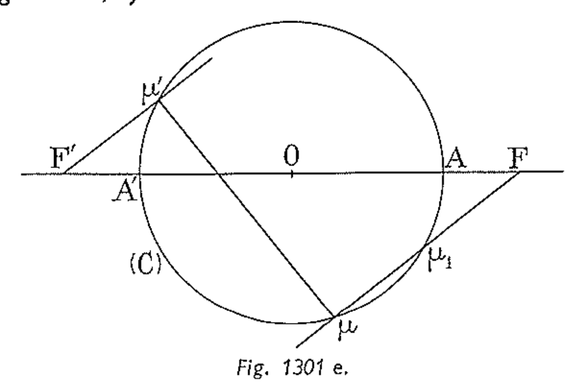


Fig. 1301 e.

On a donc les relations :

$$\overline{F\mu} \cdot \overline{F'\mu'} = k$$

ou

$$\overline{F\mu} \cdot \overline{F\mu_1} = -k$$

Cela signifie que la puissance $\overline{F}_{(C)}$ de F par rapport à (C) est égale à $-k$. Si $FF' = 2c$ et si R est le rayon de (C) on a :

$$\overline{F}_{(C)} = c^2 - R^2 = -k$$

D'où :

$$R^2 = c^2 + k.$$

Le point μ décrit donc le cercle fixe (C) de centre O et de rayon $R = \sqrt{c^2 + k}$. Le problème posé est donc ramené à celui de l'enveloppe du deuxième côté d'un angle droit $F\mu\mu'$ dont un côté passe par le point fixe F et dont le sommet μ décrit un cercle fixe (C).

Donc :

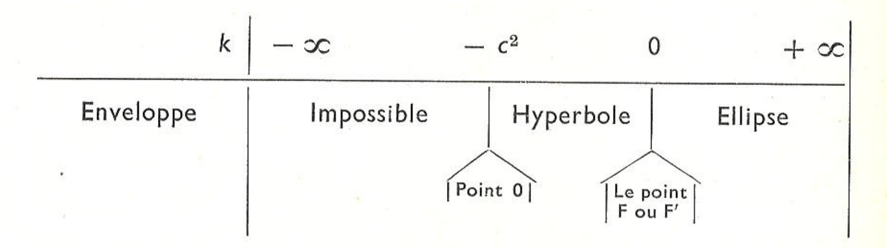
L'enveloppe est une conique de foyers F et F' admettant (C) comme cercle principal.

Cette conique est une ellipse si k est positif, une hyperbole si k est négatif. Le problème n'est du reste possible que si $R^2 = c^2 + k$ est positif, c'est-à-dire si k est supérieur à $-c^2$.

Si $k = -c^2$, l'enveloppe se réduit au cercle-point O.

Si $k = 0$, les droites passent par F ou F'.

En résumé :



k	$-\infty$	$-c^2$	0	$+\infty$
Enveloppe	Impossible	Point O	Hyperbole	Le point F ou F'	Ellipse

1302. Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Soient l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, et ses asymptotes X'OX et Y'OY (fig. 1302 *a*). En considérant la base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$ des axes $x'Ox$, $y'Oy$ et la base $(\vec{u}; \vec{v})$ normée des axes X'OX, Y'OY.

On a

$$x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = X\vec{u} + Y\vec{v}$$
$$= X(\cos\theta \cdot \vec{i} - \sin\theta \cdot \vec{j}) + Y(\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j})$$
$$= (X + Y)\cos\theta \cdot \vec{i} + (-X + Y)\sin\theta \cdot \vec{j}$$

D'où les formules de changement de base

$$\begin{cases} x = (X + Y)\cos\theta \\ y = (-X + Y)\sin\theta \end{cases}$$

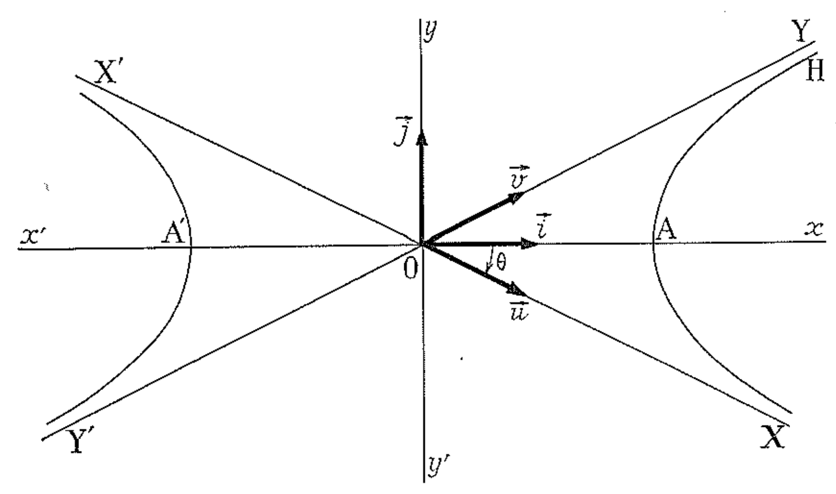


Fig. 1302 a.

En remplaçant dans l'équation de l'hyperbole, on a :

$$\frac{(X + Y)^2 \cos^2\theta}{a^2} - \frac{(X - Y)^2 \sin^2\theta}{b^2} = 1$$

Or (cf n° 1279, 9 et 10) :

$$\cos\theta = \frac{a}{c} \text{ et } \sin\theta = \frac{b}{c}.$$

Et l'équation devient alors :

$$(X + Y)^2 - (X - Y)^2 = c^2$$

ou

$$\mathbf{XY = \frac{c^2}{4}} \qquad (1302\,;\,1)$$

1303. Propriétés de l'hyperbole relatives aux asymptotes.

1° La distance du point M $(x; y)$ de l'hyperbole à l'asymptote d'équation $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ est (fig. 1303 *a*)

$$MH = \left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$= \left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right| \cdot \frac{ab}{c}$$

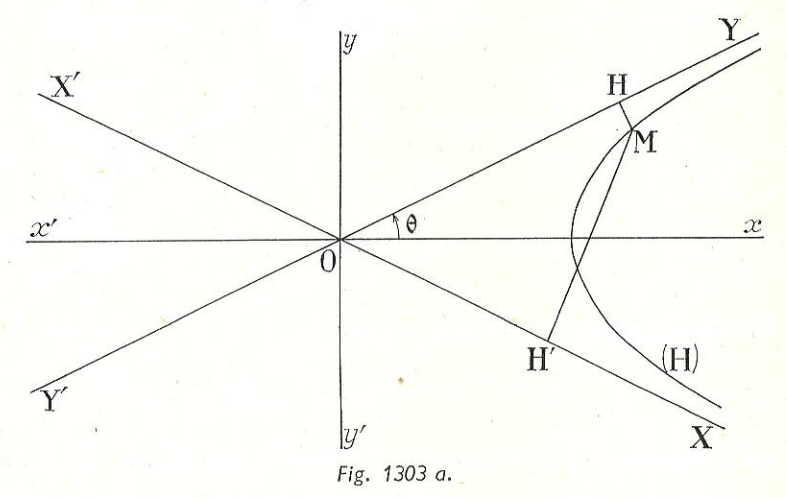


Fig. 1303 a.

La distance du point M à l'asymptote d'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ est

$$MH' = \left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right| \cdot \frac{ab}{c}$$

D'où :

$$MH \cdot MH' = \left|\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right| \cdot \frac{a^2b^2}{c^2}$$

$$= \frac{a^2b^2}{c^2}$$

et

$$\boldsymbol{MH \cdot MH' = \frac{a^2b^2}{c^2}} \qquad (1303\ ;\ 1)$$

Le produit des distances d'un point de l'hyperbole aux asymptotes est constant.

2° On considère l'hyperbole rapportée à ses asymptotes (fig. 1303 *b*). La tangente en M a pour coefficient directeur :

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{c^2}{4}\cdot\frac{1}{X^2}.$$

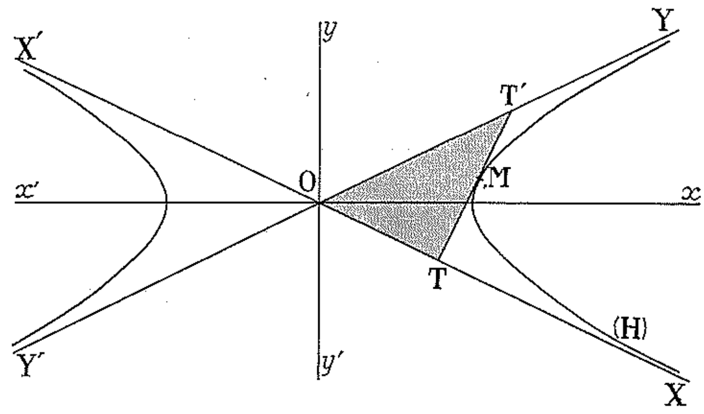


Fig. 1303 b.

Son équation dans le repère $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est :

$$y - Y = -\frac{c^2}{4}\cdot\frac{1}{X^2}(x - X)$$

Elle coupe l'axe X'OX en un point T d'abscisse donnée par

$$Y = \frac{c^2}{4}\frac{1}{X_2}(x - X)$$

ou

$$x - X = \frac{4X^2\,Y}{c^2} = X$$

D'où :

$$x = 2X$$

Autrement dit :

Le point T a pour coordonnées (2*X*; 0).

Si la tangente coupe l'axe Y'OY en T', on montre de même que :

Le point T' a pour coordonnées (0; 2 *Y*).

Donc :

Le point M est le milieu du segment TT'.

3° L'aire du triangle OTT′ est (fig. 1303 *b*) :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot |2X| \cdot |2Y| \cdot \sin 2\theta$$
$$= 4 \cdot |XY| \sin\theta \cos\theta$$
$$= 4XY \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c}$$
$$= 4 \frac{c^2}{4} \cdot \frac{ab}{c^2}$$

ou

$$\mathcal{A} = \mathbf{ab}. \qquad (1303\,;\,2)$$

4° Par un point M (X; Y) de l'hyperbole on mène une sécante (Δ) quelconque de vecteur directeur *unitaire* $\vec{v}\,(\alpha;\beta)$. L'équation de (Δ) est (fig. 1303 *c*) :

$$\overrightarrow{MP} = \rho \cdot \vec{U}$$

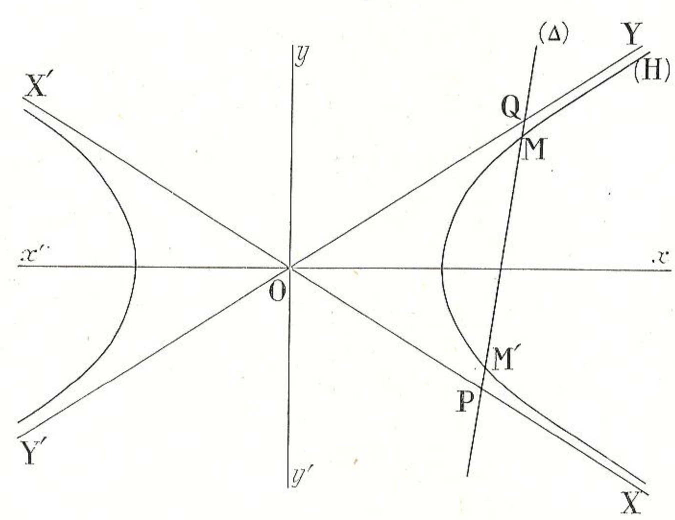


Fig. 1303 c.

Si X_1, Y_1, sont les coordonnées du point P on a :

$$\begin{cases} X_1 = X + \alpha \cdot \rho \\ Y_1 = Y + \beta \cdot \rho \end{cases}$$

(Δ) coupe OX en un point P ayant pour ordonnée $Y_P = 0$; d'où :

$$\rho_P = -\frac{Y}{\beta}$$

De même (Δ) coupe OY en un point Q ayant pour abscisses $X_Q = 0$, d'où :

$$\rho_Q = -\frac{X}{\alpha}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\overline{MP} \cdot \overline{MQ} &= \rho_P \cdot \rho_Q \\ &= \frac{XY}{\alpha\beta} \\ &= \frac{c^2}{4\alpha\beta}\end{aligned}$$

Donc :

Le produit $\overline{MP} \cdot \overline{MQ}$ ne dépend que de la direction Δ; il est le même pour toutes les sécantes de la direction (Δ).

CHAPITRE XCVIII

CONIQUES ET PROJECTIONS

1304. Projection orthogonale sur un plan.

Soient un plan (H) et un plan (P), l'angle α de (H) et (P) étant supposé différent de 0 et $\frac{\pi}{2}$ (fig. 1304 *a*).

On considère dans le plan (P) deux axes orthonormés X'OX, Y'OY, le premier étant l'intersection des deux plans, et dans le plan (H) deux axes orthonormés *x'Ox*, *y'Oy*, le premier étant identique à X'OX.

Un point quelconque M (X; Y) de (P) se projette orthogonalement en *m* (*x*; *y*) sur (H), et en μ sur *x'Ox*; μ est aussi la projection de *m* sur *x'Ox*.

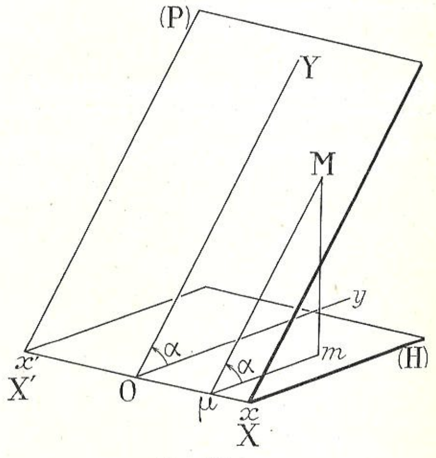


Fig. 1304 a.

On a immédiatement :

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{Y} \cos \alpha \\ \mathbf{x} = \mathbf{X} \end{cases} \qquad (1304\,;\,1)$$

D'où :

$$\begin{cases} \mathbf{Y} = \dfrac{\mathbf{y}}{\cos \alpha} \\ \mathbf{X} = \mathbf{x} \end{cases} \qquad (1304\,;\,2)$$

1305. Projection orthogonale d'un cercle.

On se propose de déterminer la projection orthogonale sur le plan (H) d'un cercle du plan (P). On ne diminue pas la généralité du problème en supposant que le centre de ce cercle est l'origine O des axes (fig. 1305 *a*).

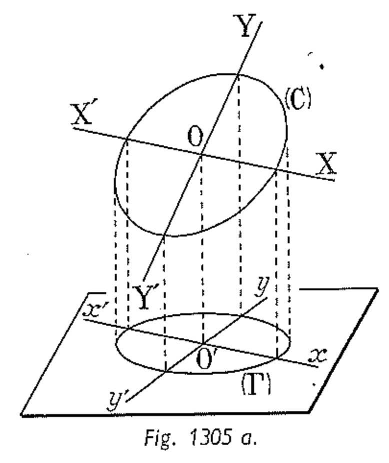


Fig. 1305 a.

Soit donc le cercle (C) d'équation

$$X^2 + Y^2 = a^2.$$

Sa projection (Γ) sur le plan (H) a pour équation :

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = a^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 1$$

(Γ) *est donc une ellipse*; l'axe focal est $x'Ox$.

1306. Ellipse se projetant suivant un cercle.

Soit maintenant un cercle (Γ) du plan (H), d'équation (fig. 1306 *a* et *b*).

$$x^2 + y^2 = R^2$$

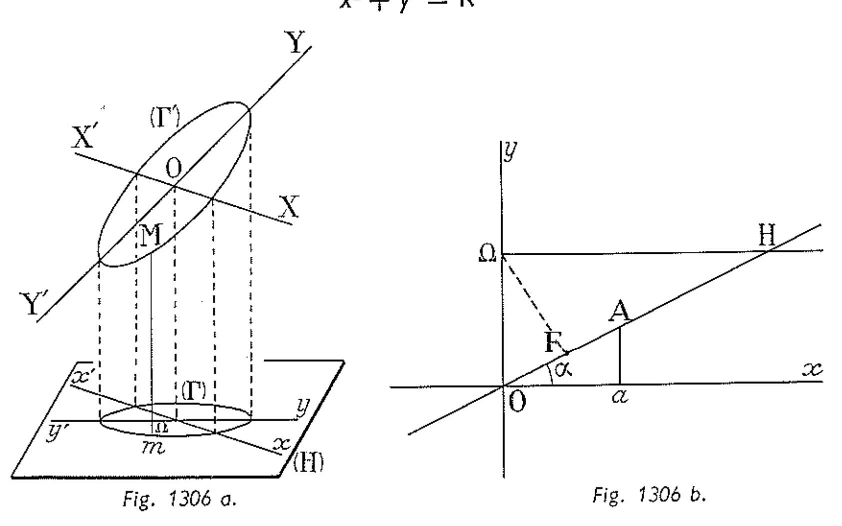


Fig. 1306 a. *Fig. 1306 b.*

Il est la projection d'une courbe (C) dont l'équation est

$$X^2 + Y^2 \cos^2 \alpha = R^2$$

ou

$$\frac{X^2}{R^2} + \frac{y^2}{\frac{R^2}{\cos^2 \alpha}} = 1$$

(C) est donc une ellipse avec a $= R$ et b $= \frac{R}{\cos \alpha}$.

L'axe focal est Y'OY.

La distance focale est

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = R \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}$$

ou

$$c = R \operatorname{tg} \alpha = aA$$

On peut ainsi déterminer les foyers : OF $= aA$ (fig 1306 *b*). Les coordonnées de F sont donc F $\left(R \sin \alpha; R \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}\right)$.

La distance de O à la directrice est

$$\delta = OH$$
$$= \frac{R^2}{R \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}$$

ou

$$\delta = \frac{R}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

1307. Surface cylindrique circonscrite à une sphère.

Soient une sphère (Σ) de centre O et de rayon R, et une direction de droites; Δ est la droite de cette direction qui passe par O (fig. 1307 *a*).

On considère un demi-plan ayant pour arête la droite Δ; il coupe (Σ) suivant un demi-cercle Γ; il existe dans ce demi-plan une et une seule droite G parallèle à Δ et tangente à Γ en M.

On envisage alors tous les demi-plans ayant pour arête la droite Δ. L'ensemble des demi-cercles Γ est la sphère (Σ).

L'ensemble des droites G est une surface cylindrique de révolution (Σ') d'axe Δ et de rayon R (fig. 1307 *b*).

(Σ') est la surface cylindrique de direction Δ circonscrite à la sphère (Σ).

On dit que *la sphère* (Σ) *est inscrite dans la surface cylindrique* (Σ').

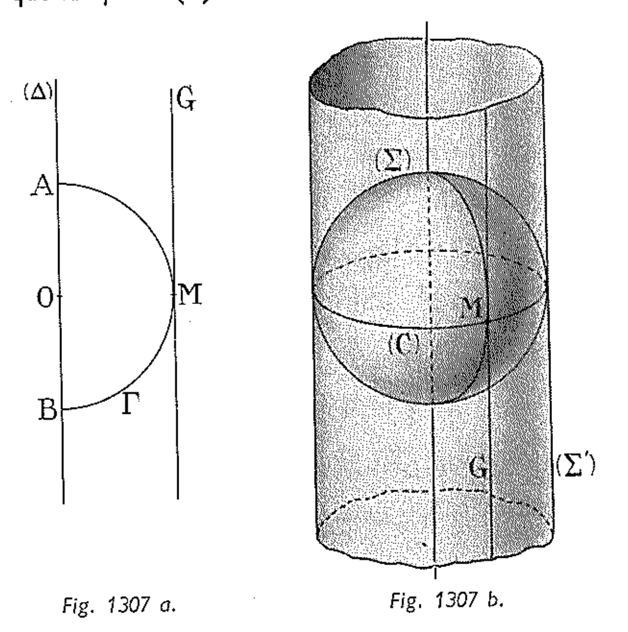


Fig. 1307 a. *Fig. 1307 b.*

L'ensemble des points M est un cercle (C) situé sur (Σ) et (Σ'); *(C) est le cercle de contact de* (Σ) *et* (Σ').

1308. Section plane d'une surface cylindrique de révolution.

Soit une surface cylindrique de révolution (Σ) ayant pour section droite le cercle (Γ) du plan (H) (fig. 1308 *a*, *b*).

Un plan (P) coupe (Σ) suivant une courbe (C).
La courbe (C) a pour projection le cercle (Γ); c'est donc une ellipse (cf. n° 1306).

Donc :

Toute section d'une surface cylindrique de révolution par un plan non parallèle aux génératrices est une ellipse.

Le plan passant par l'axe de révolution de (Σ) et perpendiculaire à (P) est un plan de symétrie. La section par ce plan donne la figure du numéro précédent.
La courbe (C) est une ellipse de sommets A et A'. Les foyers F et F' sont déterminés par

$$OF = c = R \operatorname{tg} \alpha$$

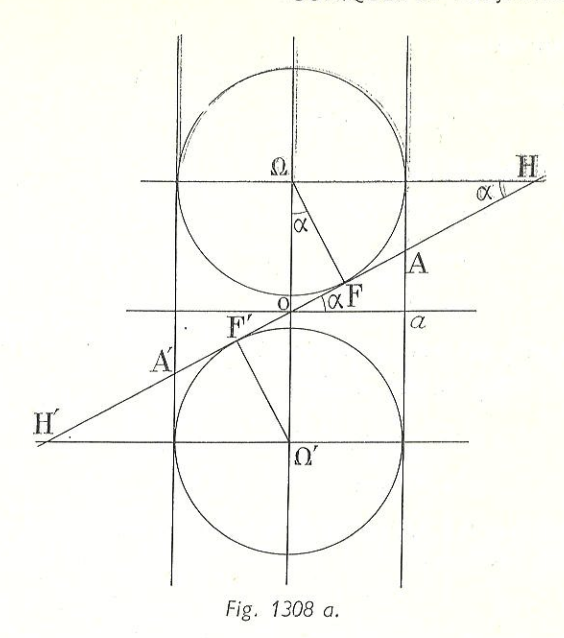


Fig. 1308 a.

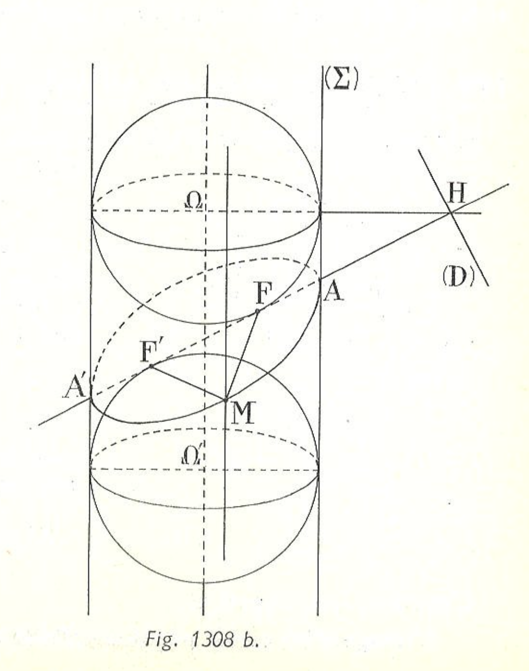


Fig. 1308 b.

La directrice est déterminée par

$$OH = \delta = \frac{R}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}.$$

Si H se projette en Ω sur l'axe de (Σ) on a :

$$\begin{aligned} O\Omega &= OH \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{R}{\cos\alpha} \\ &= OA. \end{aligned}$$

Le point Ω se projette en φ sur AA′, et on a :

$$\begin{aligned} O\varphi &= O\Omega \times \sin\alpha \\ &= \frac{R}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha \\ &= R \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}$$

Donc le point φ est identique à F. Le cercle de centre Ω et de rayon R est tangent à AA′ en F (fig 1308 *a*).

D'où :

Si on considère la sphère inscrite dans (Σ), de centre Ω et de rayon R, et tangente à (P), le point de contact avec (P) est le foyer F de l'ellipse (C) et le plan du cercle de contact coupe (P) suivant la directrice de l'ellipse.

1309. Image d'un cercle par affinité.

Soit un cercle (C) de centre O et de rayon a (fig. 1309 *a*). Son équation est :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

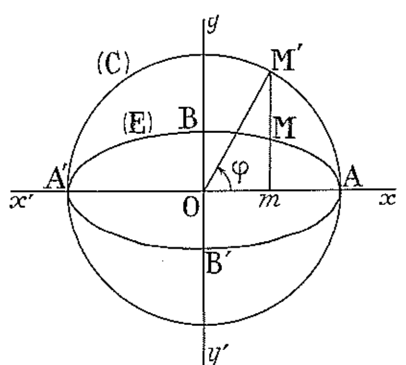


Fig. 1309 a.

On envisage une affinité orthogonale d'axe $x'Ox$ et de rapport λ; les formules de transformation sont :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = \lambda \cdot y \end{cases}$$

La courbe (Γ) image de (C) a pour équation :

$$X^2 + \frac{Y^2}{\lambda^2} = a^2 \qquad (1309\,;\,1)$$

C'est donc une ellipse; et :

L'image d'un cercle par une affinité orthogonale est une ellipse.

1310. Remarques.

1° La projection (Γ) sur (H) d'un cercle (C) du plan (P) est une ellipse. *La projection f envisagée est la composée de la rotation d'axe x'Ox et d'angle α qui transforme (P) en (H), et de l'affinité orthogonale d'axe x'Ox et de rapport*

$$\lambda = \frac{b}{a} = \cos \alpha.$$

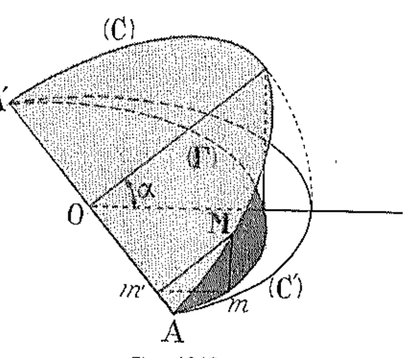


Fig. 1310 a.

En effet, en faisant $\lambda = \frac{b}{a}$ dans la formule (1309; 1) on a (fig.1310 *a*) :

$$X^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2$$

ou

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

ce qui est bien l'équation de (Γ).

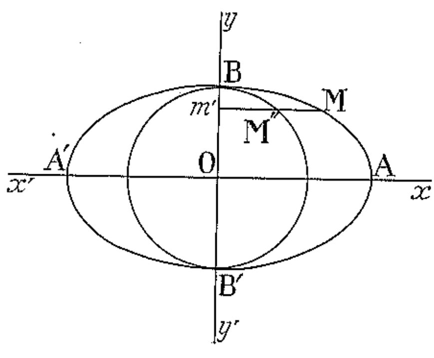


Fig. 1310 b.

2° *L'ellipse est l'image du cercle principal de diamètre AA' dans l'affinité orthogonale d'axe* x'Ox *et de rapport* $\frac{b}{a}$ (fig 1309 *a*).

L'ellipse est aussi l'image du second cercle principal de diamètre BB' dans l'affinité orthogonale d'axe y'Oy et de rapport $\frac{a}{b}$ (fig. 1310, *b*).

1311. Équations paramétriques de l'ellipse.

1° On peut exprimer les coordonnées d'un point de l'ellipse en fonction d'un paramètre.

En effet l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

conduit à poser

$$\frac{x}{a} = \cos \varphi \quad \text{et} \quad \frac{y}{b} = \sin \varphi.$$

D'où les équations paramétriques de l'ellipse

$$\begin{cases} \mathbf{x = a \cos \varphi} \\ \mathbf{y = b \sin \varphi} \end{cases} \qquad x \in [0 ; 2\pi] \qquad (1311 ; 1)$$

L'angle φ est l'angle polaire du point M' du cercle principal, qui correspond au point M (fig. 1309, *a*). On donne à cet angle le nom *d'anomalie excentrique*.

2° En posant $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{x = a \cdot \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}} \\ \mathbf{y = b \cdot \dfrac{2t}{1 + t^2}} \end{cases} \qquad (1311 ; 2)$$

1312. Équations paramétriques de l'hyperbole.

1° Soit l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette équation conduit à poser

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \varphi} \qquad \frac{y}{b} = \operatorname{tg} \varphi$$

En effet :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \operatorname{tg}^2 \varphi$$
$$= 1$$

D'où les équations paramétriques de l'hyperbole :

$$\begin{cases} \mathbf{x = \dfrac{a}{\cos \varphi}} \\ \mathbf{y = b \cdot tg\, \varphi} \end{cases} \qquad \mathbf{x \in [0 ; 2\pi]} \qquad (1312 ; 1)$$

2° En posant $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{x = a \cdot \dfrac{1 + t^2}{1 - t^2}} \\ \mathbf{y = b \cdot \dfrac{2t}{1 - t^2}} \end{cases} \qquad (1312 ; 2)$$

1313. Projection centrale sur un plan.

Soient un plan (H) et un plan (P), et Δ leur intersection (fig. 1313 *a*).

On considère dans le plan (P) deux axes orthonormés $X'OX$, $Y'OY$ le premier étant sur (Δ), et dans le plan (H) deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ le premier étant identique à $X'OX$. On a ainsi un système d'axes normés $(Ox;\ Oy;\ OY)$ de l'espace.

On considère un point fixe S extérieur à (H) et (P); on peut le supposer dans le plan yOY; ses coordonnées sont alors $(0;\ \alpha;\ \beta)$.

Si M est un point de (P) ses coordonnées sont $(X;\ 0;\ Y)$ et celles de $\overrightarrow{SM}$ sont $(X;\ -\alpha;\ Y-\beta)$.

Si m est un point de (H) ses coordonnées sont $(x;\ y;\ 0)$ et celles de $\overrightarrow{Sm}$ sont $(x;\ y-\alpha;\ -\beta)$.

Le point m est la projection de centre S du point M si les points S, M, m sont alignés, c'est-à-dire si :

$$\frac{X}{x} = \frac{-\alpha}{y-\alpha} = \frac{Y-\beta}{-\beta}$$

On en déduit :

$$X = \frac{-\alpha x}{y-\alpha}$$

et

$$Y - \beta = \frac{\alpha\beta}{y-\alpha}$$

ou

$$Y = \frac{\alpha\beta}{y-\alpha} + \beta$$

Fig. 1313 a.

D'où les formules :

$$\begin{cases} X = \dfrac{-\alpha x}{y-\alpha} \\ Y = \dfrac{\beta y}{y-\alpha} \end{cases} \qquad (1313\ ;\ 1)$$

On a aussi :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\beta X}{Y-\beta} \\ y = \dfrac{\alpha Y}{Y-\beta} \end{cases} \qquad (1313\ ;\ 2)$$

1314. Projection centrale d'un cercle.

1° Si on considère le cercle (C) du plan (P) ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = a^2$$

son image (Γ) a pour équation :

$$\frac{\beta^2 X^2}{(Y - \beta)^2} + \frac{\alpha^2 Y^2}{(Y - \beta)^2} = a^2$$

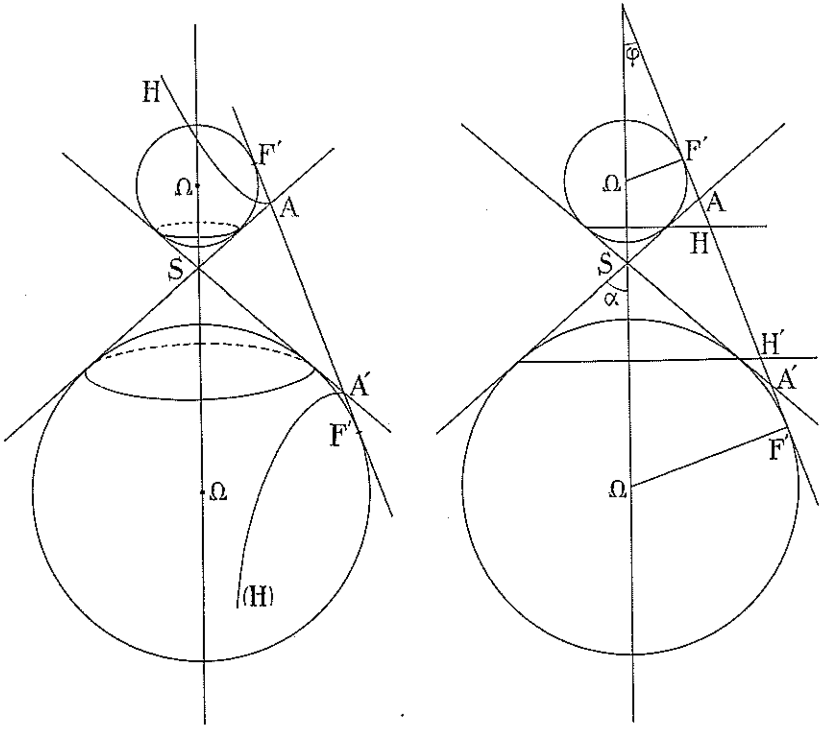


Fig. 1314 d.

ou

$$\beta^2 X^2 + \alpha^2 Y^2 = a^2 (Y^2 - 2\beta Y + \beta^2)$$

ou

$$\beta^2 X^2 + 2\beta a^2 Y - a^2\beta^2 = (a^2 - \alpha^2) Y^2$$

c'est-à-dire finalement

$$X^2 = \frac{a^2 - \alpha^2}{\beta^2} Y^2 - \frac{2a^2}{\beta} Y + a^2$$

(Γ) est donc une conique.

Et :

La projection centrale d'un cercle est une conique.

2° Si on se donne dans (H) le cercle d'équation $X^2 + Y^2 = R^2$, il est la projection d'une conique d'équation

$$\frac{\alpha^2 x^2}{(y - \alpha)^2} + \frac{\beta^2 y^2}{(y - \alpha)^2} = R^2$$

1315. Surface conique circonscrite à une sphère.

Soient une sphère (Σ) de centre O et de rayon R, et un point S extérieur à la sphère (Σ) (fig. 1315, *a*).

On considère un demi-plan ayant pour arête la droite OS; il coupe (Σ) suivant un demi-cercle Γ; il existe une droite et une seule G passant par S et tangente à Γ en M.

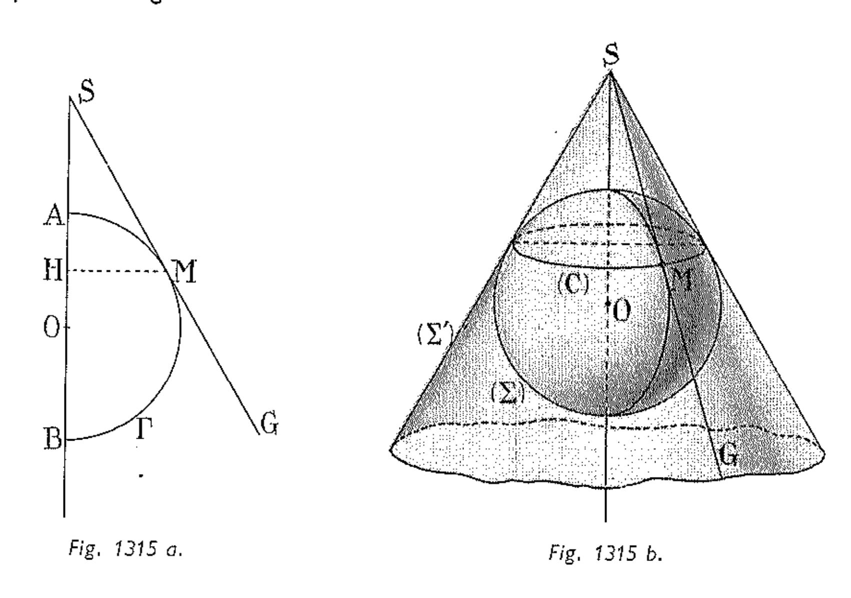


Fig. 1315 a. *Fig. 1315 b.*

On envisage alors tous les demi-plans ayant pour arête la droite OS. L'ensemble des cercles Γ est la sphère (Σ).

L'ensemble des droites G est une surface conique (Σ') de sommet S, (Σ') est la surface conique de sommet S circonscrite à la sphère (Σ).

On dit que la sphère (Σ) est inscrite dans la surface conique (Σ').

L'ensemble des points M est un cercle (C) situé sur (Σ) et (Σ'); (C) est le contact de (Σ) et (Σ').

1316. Section plane d'une surface conique de révolution.

1° Soit une surface conique de révolution (Σ) ayant pour directrice le cercle (Γ) dans le plan (H).

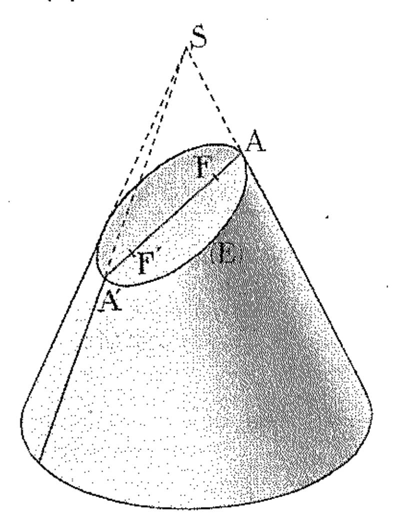


Fig. 1316 a.

Un plan (P) coupe (Σ) suivant une courbe (C).

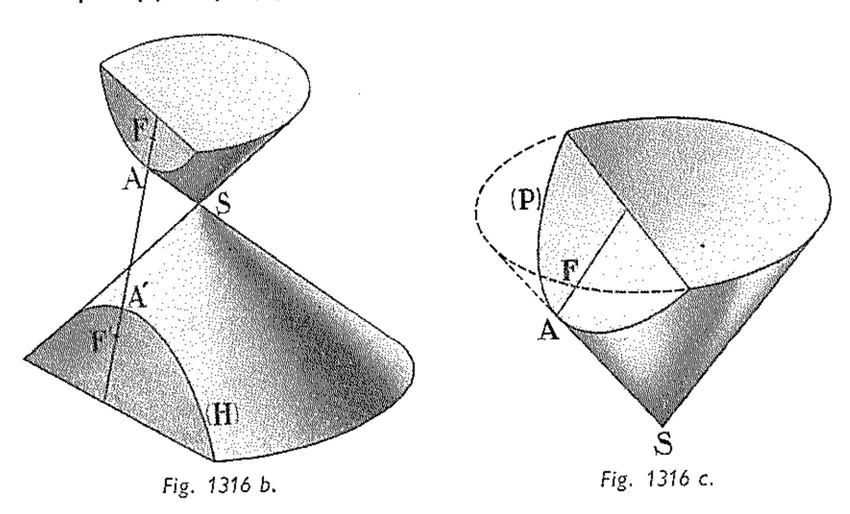


Fig. 1316 b. *Fig. 1316 c.*

La courbe (C) a pour projection centrale le cercle (Γ); c'est donc une conique.

Donc :

Toute section d'une surface conique de révolution par un plan ne passant pas par le sommet est une conique.

Si (P) coupe une seule nappe de (Σ), (C) est une ellipse (fig. 1316, *a*, *d*).
Si (P) coupe les deux nappes de (Σ), (C) est une hyperbole (fig. 1316 *b*, c).

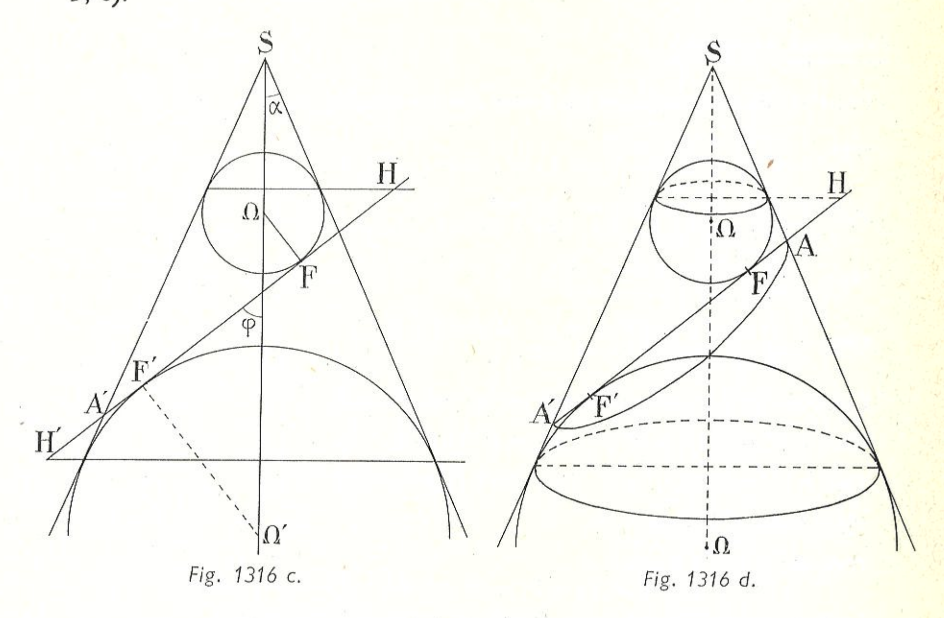


Fig. 1316 c. *Fig. 1316 d.*

Si (P) est parallèle à une génératrice de (Σ'), (C) est une parabole (fig. 1316 *c*),

2° *Si on considère les deux sphères inscrites dans (Σ) et tangentes au plan (P), on démontre que les points de contact avec (P) sont les foyers F et F′ de (C).*

Les plans des cercles de contact coupent le plan (P) suivant les directrices de (C).

Si (C) est une parabole, il n'y a qu'une seule sphère inscrite, donc un foyer et une directrice.

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE X

Faisceaux de cercles.

Équations des faisceaux de cercles déterminés par (C) et (C′) :

1959. $\begin{cases} (C) & x^2 + y^2 = 25 \\ (C') & x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$

1960. $\begin{cases} (C) & x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \\ (C') & x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0. \end{cases}$

1961. $\begin{cases} (C) & x^2 + y^2 + y - 2x + 10 = 0 \\ (C') & x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$

1962. $\begin{cases} (C) & 4x^2 + 4y^2 + 12x - 12y - 3 = 0 \\ (C') & 4x + 4y + 13 = 0 \end{cases}$

Équations des faisceaux déterminés par les points A et B.

1963. A $(2; 0)$ B $(-2; 0)$ 1964. A $(0; 3)$ B $(0; -3)$

1965 A $(1; 1)$ B $(-1; -1)$ 1966. A $(4; 0)$ B $(-2; 0)$

1967. A $(1; 2)$ B $(-2; -1)$

1968. On donne le faisceau

$$(x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4) + \lambda\,(x^2 + y^2 - x - 2) = 0.$$

Trouver l'axe radical du faisceau. Quelle est la nature du faisceau?

Nature et éléments des faisceaux suivants :

1969. $[x^2 + (y-5)^2 - 16] + \lambda\,[x^2 + (y+5)^2 - 16] = 0$

1970. $[(x+3)^2 + y^2 - 4] + \lambda\left[(x + \frac{3}{2})^2 + (y+3)^2 - \frac{25}{4}\right] = 0$

1971. Soit le faisceau

$$x^2 + y^2 + \lambda x = 0$$

Déterminer le cercle du faisceau qui passe par le point A $(1; 1)$. Y a-t-il des cercles du faisceau qui sont tangents à la droite $x + y - 1 = 0$

1972. Soit un faisceau Φ. Une droite coupe un cercle variable en M et M′.

1° Montrer que les cercles de diamètre MM′ forment un faisceau.

2° Si A est un point fixe quelconque, montrer que les cercles circonscrits aux triangles AMM′ forment un faisceau.

1973. Soit un axe $x'Ox$; sur cet axe on considère deux points M et M′ dont les abscisses sont liées par la relation involutive

$$\alpha x'x'' + \beta\,(x' + x'') + \lambda = 0$$

Montrer que les cercles de diamètre MM' forment un faisceau
Si A est un point fixe quelconque, montrer que les cercles circonscrits aux triangles AMM' forment un faisceau.

1974. On donne un faisceau Φ. Déterminer les cercles du faisceau qui passent par un point donné.

1975. On donne un faisceau Φ. Déterminer les cercles du faisceau qui sont tangents à une droite donnée.

1976. Soient deux cercles fixes donnés C et C'. Étudier l'ensemble des points M tels que

$$\overline{M_C} = k \, . \, \overline{M_{C'}}$$

Discussion suivant k.

1977. Soient un triangle ABC, l'orthocentre H et l'isobarycentre G de ce triangle. Montrer que le cercle de diamètre HG appartient au faisceau déterminé par le cercle circonscrit au triangle et le cercle d'Euler de ce triangle.

1978. Construire un cercle C d'un faisceau orthogonal à un cercle donné (Γ).

1979. Soient trois cercles C_1, C_2, C_3 de centre O_1, O_2, O_3 d'un faisceau. M étant un point quelconque démontrer la relation

$$\overline{M_{C_1}} \cdot \overline{O_2O_3} + \overline{M_{C_2}} \cdot \overline{O_3O_1} + \overline{M_{C_3}} \, . \, \overline{O_1O_2} = 0.$$

1980. Ensemble des centres des cercles passant par un point A et vus du point fixe B sous un angle θ.

Discussion suivant θ.

Pôles et polaires.

Déterminer la polaire du point A par rapport au cercle (C) :

1981. A $(0; 0)$ (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

1982. A $\left(\frac{15}{3}; \frac{5}{2}\right)$ (C) $x^2 + y^2 = \frac{25}{2}$

1983. A $(1; 3)$ (C) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

1984. A $(3; 5)$ (C) $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

1985. A $(1; 2)$ (C) $x^2 + y^2 - 5y = 0$

Déterminer le pôle A d'une droite (a) par rapport au cercle (C).

1986. (C) $x^2 + y^2 = 9$ (a) $4x - 3y = 9$

1987. (C) $x^2 + y^2 = 8$ (a) $x + 3y = 4$

1988. Soient trois points A, B, C. Étudier l'ensemble des centres des cercles passant par A et tels que B et C soient conjugués par rapport à ces cercles.

1989. Soient deux cercles fixes (C) et (C') et un point A. Etudier les point M conjugués de A par rapport aux deux cercles. Discussion.

1990. Démontrer que les polaires d'un point par rapport aux cercles d'un faisceau sont concourantes. Discussion.

1991. Soient un cercle (C), un point A de ce cercle, et une corde variable MP qui reste parallèle à la direction Δ.

1° Si A est fixe, montrer que la polaire de l'orthocentre du triangle AMP passe par un point fixe I.

2° Étudier l'ensemble des points I lorsque le point A décrit le cercle (C).

1992. Soit un cercle (C) circonscrit au triangle ABC; M est un point du cercle (C); la droite BM coupe AC en D et la droite CM coupe AB en E.
Montrer que la droite DE passe par un point fixe lorsque M décrit (C).

1993. Sur un cercle fixe (C) on considère deux points fixes A et B et deux points variables M et P. Les droites MA et PB se coupent en I et les droites PA et MB se coupent en J.
Montrer que la droite IJ passe par un point fixe.

Coniques.

1994. Construire une parabole connaissant deux points et la directrice.

1995. Construire une parabole connaissant deux points et le foyer.

1996. Ensemble des centres des cercles tangents à une droite et à un cercle.

1997. Ensemble des centres des cercles tangents à deux cercles donnés. Examiner les divers cas suivant la position relative des deux cercles.

1998. Soient un axe $x'Ox$ et le faisceau Φ des cercles tangents en O à $x'Ox$. A et B étant deux points de $x'Ox$, on mène par A et B les tangentes à un cercle quelconque du faisceau; ces tangentes se coupant en M, étudier l'ensemble des points M.

1999. Ensemble des foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole dont on donne le cercle principal et un point.

2000. Construire une conique connaissant une directrice et trois points.

2001. Construire une conique connaissant les deux directrices et deux points.

2002. Construire une conique connaissant une directrice, l'excentricité et deux points.

2003. Soient une droite (D) et un point A fixes. Un angle droit (Ax, Ay) de sommet A pivote autour de A, et les côtés Ax et Ay coupent (D) en M et P.
Ensemble des centres des cercles inscrits dans le triangle AMP.
Ensemble des centres des cercles exinscrits dans l'angle A du triangle AMP.

2004. Soient une ellipse (E) et ses foyers F et F'. On pose $FM = r$ et $F'M = r'$, et angle $(MF, MF') = \theta$. Si M est un point de (E), montrer que les expressions suivantes sont constantes :
1° $rr' + OM^2$
2° $(r - r')^2 - 4OM^2$
3° $rr' \cos^2\frac{\theta}{2}$

2005. On considère une hyperbole (H), montrer que les expressions suivantes sont constantes :
1° $rr' - OM^2$
2° $(r + r')^2 - 4OM^2$
3° $rr' \sin^2\frac{\theta}{2}$

2006. Ensemble des centres des cercles passant par un point fixe A et coupant une droite fixe (D) sous un angle constant α.

2007. Ensemble des points dont la somme (ou la différence) des distances à une droite et à un point fixes est constante.

2008. Ensemble des foyers des paraboles passant par deux points donnés et dont l'axe de symétrie appartient à une direction donnée.

2009. Construire une hyperbole connaissant une directrice, une asymptote et un point.

2010. Construire une hyperbole connaissant une directrice, le foyer correspondant et une direction asymptotique.

2011. Soit une conique variable dont on donne un foyer F et deux points A et B de cette conique. Démontrer que les directrices associées au foyer F passent l'une ou l'autre par deux points fixes.

2012. Ensemble des foyers des paraboles tangentes à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, le point de contact avec $x'Ox$ étant le point A donné.

2013. Un point μ décrit une droite fixe (Δ); soit A un point non situé sur Δ. Déterminer l'enveloppe des bissectrices des droites Δ et $A\mu$.

2014. Un angle (Mx; My) de mesure constante, a son sommet M qui décrit une droite ou un cercle et son côté Mx passe par un point fixe A.
Étudier l'enveloppe du côté My.

2015. Enveloppe des asymptotes d'une hyperbole dont on connait une directrice et le foyer correspondant.

2016. Soit la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$. Une sécante focale la rencontre en M et M'.
Ensemble des milieux des cordes MM'.

2017. Soient un cercle (C) de diamètre AB et la tangente AT en A. Un point M de cette tangente a pour polaire la droite (m). Les droites BM et (m) se coupent en P.
Étudier l'ensemble des points P lorsque M décrit la tangente.

2018. Mener par une droite donnée un plan coupant une surface conique de révolution suivant une hyperbole équilatère.

2019. Ensemble des foyers des paraboles situées sur une surface conique de révolution.

2020. Etudier l'ensemble des foyers des hyperboles équilatères situées sur une surface conique de révolution.

Inversion.

2021. Soit un faisceau de cercles Φ. Si un cercle variable Γ coupe sous des angles constants deux cercles fixes de Φ, il coupe tout autre cercle du faisceau sous un angle constant.

2022. Soient deux cercles (C) et (C') tangents extérieurement en A et la tangente commune (Δ) en A. Si M est un point de (Δ), montrer qu'il passe par M deux cercles tangents aux cercles donnés.

2023. Ensemble des centres des inversions transformant deux cercles cocentriques en deux cercles égaux.

2024. Soient deux cercles (C) et (C′) tangents extérieurement en A, et la tangente commune extérieure Δ, B et C étant les points de contact. Soient D un point fixe de (C) et M un point variable de (C′).
Montrer que le second point d'intersection P des cercles (MBC) et (MAD) décrit un cercle orthogonal à (C) en B et D.

2025. Soient trois points A, B, C non alignés. Un cercle variable (Γ) passe par A et B; à ce cercle on associe le cercle (Γ′) passant par A et C et orthogonal à (Γ). Quel est l'ensemble du second point d'intersection des cercles (Γ) et (Γ′).

2026. Soient une droite (D) et un point A non situé sur (D). Un angle (Ax; Ay), de mesure constante α, pivote autour de A. La droite Ax coupe (D) en B et la droite Ay coupe (D) en C.
Trouver l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ABC, et celle du cercle de diamètre BC.

2027. Soient une droite (D) et un point A non situé sur (D). On considère un cercle (C) passant par A et tangent à (D), et on lui associe le cercle (C′) passant par A, tangent à (D) et orthogonal à (C). Ces deux cercles (C) et (C′) se recoupent en M.
Etudier l'ensemble des points M.

2028. Même problème en remplaçant la droite (D) par un cercle (Γ) ne passant pas par A.

2029. Soient une droite (D) et deux points A et A′ de (D). On considère deux cercles (C) et (C′) tangents respectivement en A et A′ à (D); ces cercles sont assujettis à rester orthogonaux.
Etudier l'ensemble de leurs points d'intersection.

2030. Soient deux droites (D) et (D′), et deux points A sur (D) et A′ sur (D′). On considère deux cercles (C) et (C′) tangents respectivement en A à (D) et en A′ à (D′). Ces cercles sont assujettis à rester orthogonaux.
Étudier l'ensemble de leurs points d'intersection.

2031. Soient un cercle (Γ) et deux points A et A′ de (Γ). On considère deux cercles (C) et (C_2) tangents respectivement en A et A′ à (Γ). Ces cercles sont assujettis à rester orthogonaux.
Etudier l'ensemble de leurs points d'intersection.

Problèmes.

2032. Soit l'hyperbole équilatère (H) dont l'équation, en axes orthonormés, est

$$xy = k \qquad (k > 0).$$

1° Exprimer en fonction des abscisses a, b, c, d de quatre points A, B, C, D de cette hyperbole, la condition pour que les cordes AD et BC soient orthogonales; de ces quatre points l'un quelconque est alors l'orthocentre du triangle déterminé par les trois autres; si une hyperbole équilatère passe par les trois sommets d'un triangle, elle passe par son orthocentre; si un triangle rectangle est inscrit dans une hyperbole équilatère, la hauteur relative à l'hypoténuse est tangente à cette hyperbole au sommet de l'angle droit.

2° Cette dernière propriété ramène la construction des intersections d'une hyperbole équilatère et d'un cercle ayant une de ses cordes BC pour diamètre à la construction de tangentes de direction donnée à cette hyperbole. Rappeler, sans démonstration, les conditions de possibilité. De deux cercles ayant pour diamètres des cordes BC et AD rectangulaires de cette hyperbole, un seul, celui de diamètre BC par exemple, la coupe en deux autres points T′ et T″ diamétralement opposés sur cette hyperbole.

Former l'équation qui donne les abscisses t' et t'' de ces points en fonction des abscisses b et c de B et C; discuter.

3° Si D est l'orthocentre d'un triangle ABC, les cercles de diamètre BC et AD sont orthogonaux.

4° On considère les deux familles de cordes de (H) respectivement parallèles à deux directions fixées rectangulaires. Démontrer que les cercles ayant pour diamètres les cordes de l'une des familles ont même axe radical. Préciser la disposition des deux familles de cercles. En déduire que, si un triangle ABC, d'orthocentre D, est inscrit dans une hyperbole équilatère, le centre de celle-ci est sur le cercle de diamètre IJ (I, milieu de BC; J, milieu de AD) qui passe par les pieds des hauteurs du triangle.

2033. On donne un rectangle ABCD, dont les sommets se suivent dans cet ordre, et l'on considère deux cercles variables (C_1) de centre C_1 et (C_2) de centre C_2, tangents le premier en A à la droite AD et le second en C à la droite CD. On suppose que ces cercles sont orthogonaux et se coupent en P et Q.

1° Transformer la figure par l'inversion inv $(A;\ p = AC^2)$.

2° Étudier l'ensemble des points P, et l'ensemble des points Q. Montrer que la droite PQ passe par un point fixe.

3° Les parallèles à DC et DA menées respectivement par C_2 et C_1 se coupent en un point E. Lieu du point E.

4° Construire les cercles orthogonaux (C_1) et (C_2) dans les deux cas suivants :

a) ils sont égaux.

b) ils sont vus du point D sous le même angle.

5° Montrer que le lieu des points dont la somme des puissances par rapport à deux cercles orthogonaux (C_1) et (C_2) a une valeur nulle est un cercle (C). Lorsque les cercles (C_1) et (C_2) varient, montrer que les cercles (C) passent par B et par un autre point fixe I.

6° Lieu de la projection de I sur la droite C_1C_2 et enveloppe de cette droite.

2034. On considère deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, un point A sur Ox, un point B sur Oy, $\overline{OA} = \overline{OB} = a$, $(a > 0)$. Un cercle (C) est tangent en A à Ox et en B à Oy. Une tangente variable (D) à ce cercle rencontre les axes $x'Ox$, $y'Oy$ respectivement en P et Q. Pour les questions 2 et 3 on supposera (C) inscrit dans le triangle OPQ.

1° On fait l'inversion de centre O qui transforme en lui-même le cercle (C). Construire le centre du cercle image de la droite (D). Lieu géométrique (H) de ce centre quand (D) varie. Déterminer les points d'intersection de (H) avec le cercle (C).

2° On désigne par u l'angle OPQ. Évaluer en fonction de $\text{tg}\,\frac{u}{2} = t$, la longueur z de PQ. Variations de z en fonction de t. Courbe représentative. Déterminer u de manière que PQ ait une longueur donnée m. Discuter. Solution géométrique. Comment peut-on déduire des résultats obtenus l'angle u de manière que le triangle OPQ ait une aire donnée k^2 $(k > 0)$.

3° Utiliser la figure de ce problème pour calculer en fonction de u, l'excentricité de la section d'un cône de révolution, de demi-angle au sommet 45°, par un plan tangent à une sphère de rayon a inscrite dans ce cône. Calculer u de manière que l'excentricité soit égale à 1. Solution géométrique.

2035. 1° On considère un triangle quelconque ABC. La bissectrice intérieure de l'angle A coupe BC en D. On pose $\widehat{BAC} = 2\alpha$.

On projette orthogonalement les points B et C sur AD en β et γ respectivement.

Montrer que les quatre points A, D, β, γ forment un quaterne harmonique. En déduire que

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2 \cdot \cos \alpha}{AD}.$$

2° On considère un angle fixe xAy de mesure 2α. On prend sur les demi-droites Ax et Ay respectivement les points B et C tels que

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2}{m} \qquad (m > 0)$$

a) Montrer que la droite BC passe par un point fixe.

b) On prend sur Ax et Ay respectivement deux nouveaux points B′ et C′ tels que $AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = k^2$ (k nombre positif donné).

Montrer que le cercle circonscrit au triangle AB′C′ passe par un deuxième point fixe F et que la droite B′C′ reste tangente à une parabole fixe de foyer F.

3° Conservant les données de la question n° 2, on pose $\widehat{ADB} = \theta$.

a) Dans quelles limites peuvent varier θ et $\sin\theta$?

b) Calculer DB et DC en fonction de AD, α et θ.

Montrer que

$$BC = \frac{AD \cdot \sin\theta \cdot \sin 2\alpha}{\sin^2\theta - \sin\alpha}.$$

c) On suppose que $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et que $AD = \sqrt{3}$. Quand on remplace $\sin\theta$ par x et BC par y dans la formule précédente, on obtient une fonction y de x dont on étudiera les variations, x prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

En déduire l'étude des variations de BC en fonction de θ; tracer le graphique de cette fonction.

2036. On donne dans un plan un segment de droite $AB = a$. Un point M variable de ce segment est défini par $AM = x$. On construit du même côté de AB les triangles équilatéraux APM et MQB.

1° Calculer la distance d (P; Q) en fonction de x et a. Déterminer x pour que d (P; Q) soit égale à un nombre positif donné. Discuter.

2° Lieu du milieu de PQ. Démontrer que la médiatrice de PQ passe par un point fixe I. Quelle est l'enveloppe de la droite PQ ? Que peut-on dire des cercles circonscrits aux triangles PMQ ? Quel est l'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles CPQ, C désignant le quatrième sommet du parallélogramme dont P, M, Q sont trois sommets consécutifs ?

3° La droite PQ coupe AB en S. Montrer que les cercles variables de centre S et de rayon SM forment un faisceau de cercles.

2037. On considère un cercle (C) de centre O, de rayon $R = 2a\sqrt{2}$, un point fixe A tel que $OA = 4a$, le point B situé sur la demi-droite OA tel que $OB = 2a$; puis les cercles (γ), dont les centres ω sont situés sur le cercle (C) et qui sont vus de A sous l'angle $\frac{\pi}{3}$.

1° Construire le cercle (C) et un cercle (γ). Démontrer que tous les cercles (γ) sont vus du point B sous un angle constant que l'on calculera.

Ensemble des points de contact des tangentes menées de A aux cercles (γ) ?

Enveloppe des rayons de ces cercles qui passent aux points de contact ?

2° On mène la perpendiculaire à $A\omega$ en A; elle coupe en T la tangente ωT en ω au cercle (C). Le cercle (Γ) de diamètre ωT coupe le cercle (γ) de centre ω en deux points M et M′.

Démontrer que la droite MM′ passe par un point fixe I de OA, et que les cercles (γ) coupent orthogonalement un cercle fixe de centre I.

3° On considère deux cercles (γ) et (γ') dont les centres ω et ω' sont alignés avec A.

Démontrer que (γ) et (γ') sont homologues dans une inversion de centre A et de puissance que l'on calculera, et que B et I sont homologues dans cette inversion.

2038. On donne dans un plan un cercle (C) de centre O et de rayon R.

1° M étant un point quelconque du plan et (D) une droite quelconque passant par M dans le plan, construire les cercles (α) et (β) passant par M et tangents à la droite (D) et au cercle (C).

A et B étant les points de contact avec (C), montrer que le cercle (ABM) est orthogonal à la droite (D) et au cercle (C).

2° Soit M′ le point diamétralement opposé à M sur le cercle (ABM). Montrer que le lieu de M′, quand la droite (D) tourne autour de M, supposé fixe, est une droite (m). Quel est dans les mêmes conditions, le lieu du point d'intersection des tangentes en A et B au cercle (C) ?

2039. Un point M est variable sur une ellipse fixe donnée (S), de foyers F, F′; on désigne par A et A′ les sommets du grand axe de l'ellipse (S), par $2a$ la distance AA′, par $2c$ la distance FF′.
On considère l'ellipse (E) dont un foyer est F′, qui passe par F et qui est tangente en M à l'ellipse (S).

1° Montrer que la longueur du grand axe de l'ellipse (E) demeure constante quand M parcourt (S); en déduire que le lieu du deuxième foyer φ de (E) est un cercle (F) de centre F.

2° La droite FF′ coupe l'ellipse (E) en un point N distinct du point F. Les tangentes en M, F, N à l'ellipse (E) forment un triangle PQR. Trouver les lieux de P, Q, R.

3° Indiquer une construction simple de la directrice (Δ) de (E) relative au foyer φ. Trouver le lieu du pôle ω de (Δ) par rapport au cercle (F).

4° On projette orthogonalement le point F en I sur la directrice (Δ). Trouver le lieu du point I et en déduire l'enveloppe de la droite (Δ). Discuter la nature de cette enveloppe suivant la valeur de l'excentricité de l'ellipse donnée (S).

2040. On donne sur un axe, trois points fixes A, F, F′, tels que $\overline{AF} = m$, $\overline{AF'} = m'$, $0 < m < m'$. On appellera (F) le cercle de centre F, de rayon m, (F′) le cercle de centre F′, de rayon m', et (C) tout cercle tangent à (F) et à (F′); C sera le centre de (C), P son point de contact avec (F), P′ son point de contact avec (F′).

1° Démontrer que l'ensemble des points C se compose d'une ellipse et d'une droite.

2° Démontrer que, si P et P′ sont distincts, la droite PP′ passe par un point fixe I. Qu'est le point I par rapport à (F) et (F′) ? Calculer $\overline{AI}$ en fonction de m et m'.

3° Déduire du 2° une construction géométrique de l'intersection de l'ellipse (E) de foyers F et F′ et passant par A avec une droite issue de F (ou de F′).

4° Quel est l'ensemble des points d'intersection des tangentes en P et P′ à (C)? Déduire une construction géométrique des tangentes menées à (E) d'un point de la perpendiculaire en A à FF′.

5° Que sont, dans l'inversion de centre A et de puissance $4mm'$, les inverses de (F), (F′), (C) ? Qu'est l'inverse de la droite PP′ ?

Utiliser cette inversion :

a) pour retrouver tous les résultats du 2°;

b) pour démontrer que les cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe si P et P′ sont distincts; calculer $\overline{AK}$, K étant le centre de ce cercle.

2041. On donne deux droites fixes Δ et D parallèles entre elles et un point fixe A sur D. Un cercle variable (γ) passe par A et est tangent en K à Δ.

1° Ensemble des centres ω de (γ).

2° Ce cercle recoupe D en un deuxième point P. Montrer que la droite PK passe par un point fixe I. En déduire que la tangente en P à (γ) reste tangente à un cercle fixe (C) de centre I.

3° Un cercle (γ) étant donné, montrer qu'il existe deux cercles (γ') et (γ'') de centres ω' et ω'' passant par A, tangents à Δ et orthogonaux à (γ).

4° On considère l'un d'eux (γ'). Soit P' le point autre que A où (γ') coupe D. Montrer que les tangentes en P et P' respectivement à (γ) et (γ') sont perpendiculaires. Lieu de leur point de rencontre M quand (γ) et par suite (γ') varient.

5° On considère l'inversion de centre A qui transforme la droite Δ en le cercle (C). Quelles sont les images de deux cercles (γ) et (γ') orthogonaux. En déduire le lieu de leur deuxième point d'intersection B autre que A.

2042. On donne deux points fixes A et F.

1° Trouver l'ensemble des points de contact, T, des tangentes issues de A aux coniques dont F est l'un des foyers et dont la directrice associée passe par A.
On appellera coniques (C) celles des coniques précédentes qui ont une excentricité e donnée.

2° Combien passe-t-il de coniques (C) par un point donné, M, du plan? (On construira les directrices associées à F.) Discussion.

3° Ensemble des points M pour lesquels la question précédente admet une seule solution.

4° Ensemble des points M pour lesquels la construction du 2° donne deux directrices passant par A et faisant un angle donné 2α.

5° Ensemble des sommets des coniques (C) situés sur l'axe focal.

2043. On donne un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle (O) de centre O et de rayon R.

1° On appelle cercle (C) tout cercle ayant comme diamètre une corde quelconque PQ du cercle (O); on appelle C le centre d'un tel cercle, ρ son rayon.
Montrer qu'un cercle (C) est caractérisé par cette propriété : la puissance de son centre, C, par rapport au cercle (O) est $-\rho^2$.

2° On suppose, dans toute la suite du problème, que le centre C appartient à $x'Ox$ et l'on pose $\overline{OC} = \lambda$.

a) Former l'équation qui détermine λ quand (C) passe en un point donné, S, de coordonnées x, y. Montrer que le problème admet une solution unique si S appartient à une ellipse (E), qu'on obtiendra par son équation et dont on précisera les sommets et les foyers. Dans quelle région, limitée par l'ellipse, doit se trouver S pour que le problème admette deux solutions ?

b) On se place dans le cas où le problème admet deux solutions, C_1 et C_2, d'abscisses λ_1 et λ_2 et l'on demande que les cercles (C_1) et (C_2) soient orthogonaux en S_1. Former l'équation de l'ensemble des points S correspondants et préciser la nature et les éléments de cet ensemble.

3° Parmi les cercles (C) dont le centre C est sur $x'Ox$, on se borne désormais à ceux qui, en outre, coupent $y'Oy$.

a) Préciser l'ensemble des centres C de ces cercles.

b) Soient I et J les points où (C) coupe $y'Oy$, U et V les symétriques de I et J par rapport au diamètre PQ, U' et V' les points où les segments IU et JV coupent respectivement le cercle (O); montrer que $\overline{IU}$ et $\overline{IU'}$ gardent un rapport constant; reconnaître l'ensemble des points U et V.

c) Montrer que les tangentes en U à (C) et en U' à (O) se coupent sur $y'Oy$; quelle propriété en résulte-t-il pour les cercles (C) de cette partie 3° ?

2044. On donne un cercle (C), de centre O, et une corde fixe, AB, de ce cercle. On désigne par I le milieu de AB (on suppose que I et O sont distincts). Soit M un point variable de (C); la tangente en M au cercle (C) coupe la droite AB en T.

1° Montrer que la polaire t, de T par rapport au cercle (C) passe par un point fixe, J, et que le cercle (ω) de diamètre JT est orthogonal à (C). Le point M décrivant le cercle

(C) montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau, dont on précisera les points de base.

2° Quel est le lieu du point T′, image de T dans l'inversion de centre J, de puissance JA^2 ? Transformer par cette inversion le cercle (ω) et la droite MT.

3° Soit K le centre du cercle inverse de la droite MT. Quel est le lieu de K ?

Soient α le milieu de JO, $y'\alpha y$ un axe porté par JO et de même sens que $\overrightarrow{JO}$, $x'\alpha x$ un axe tel que le repère $x'\alpha x$, $y'\alpha y$ soit direct et orthonormé. Écrire l'équation du lieu de K par rapport à ce repère. On désignera par R le rayon de (C) et par kR ($k > 1$) la longueur OJ.

4° Quelle est la polaire, t′, du point T′ par rapport au cercle (C) ? Déterminer l'enveloppe de t'.

5° Dans cette question, on suppose que $k = 2$.

Déterminer les lieux :

a) de l'orthocentre, H, du triangle MAB.;

b) du pied, H′, de la polaire, *h*, de H par rapport au cercle (C).

Quelle est l'enveloppe (E) des droites *h* ? Écrire l'équation de (E) par rapport au repère $x'\alpha x$, $y'\alpha y$.

2045. Une droite fixe, *xy*, partage le plan en deux demi-plans, (Π_1) et (Π_2). Dans tout le problème, A et B désignent deux points du plan, symétriques par rapport à *xy*, A appartenant à (Π_1), B appartenant à (Π_2). O est le milieu de AB.

A) Les points A et B sont supposés fixes; la longueur AB est égale à $2a$. On désigne par *k* un nombre positif différent de 1.

1° Montrer que le lieu des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est un cercle, dont on déterminera le rayon et le centre. On désigne ce cercle par (C_k).

2° A toute valeur de *k* correspond un cercle (C_k). Montrer que les cercles (C_k) appartiennent à un faisceau. Montrer que le transformé d'un cercle (C_{k_1}) par l'inversion inv $(0; -a^2)$ est un cercle (C_{k_2}). Calculer k_2 en fonction de k_1.

3° Construire le cercle (C_k) passant par un point donné, P, du plan.

B) Dans ce qui suit, les points A et B ne sont plus donnés. On considère, dans le demi-plan (Π_1), un cercle (Ω) de centre ω et de rayon R. On désigne par *d* la distance du point ω à la droite *xy*.

Construire les points A et B et calculer *k* pour que, relativement à ces points, le cercle (Ω) coïncide avec le cercle (C_k). Quelle relation doit-il exister entre R et *d* pour que $k = \frac{1}{2}$? Calculer, dans ce cas, OA et OB en fonction de *d*.

C) 1° Quel est le lieu des centres, ω, des cercles (C_2) passant par un point donné S du demi-plan (Π_1) ? Construire les cercles (C_2) passant par S et dont les centres, ω, appartiennent à une droite donnée (Δ) perpendiculaire à *xy*. Discuter.

2° O est fixe dans cette question. Montrer que les cercles $(C_{\frac{1}{2}})$ sont tangents à deux droites fixes. Construire les cercles $(C_{\frac{1}{2}})$ tangents à une droite (D) donnée. Discuter.

3° O décrivant la droite fixe, *xy*, trouver le lieu des centres, ω, des cercles $(C_{\frac{1}{2}})$ tangents à une droite (D) donnée. Quel est le lieu des points A et B correspondants ?

2046. Soit un triangle équilatéral ABC dans le plan orienté :

$$\widehat{\text{angle}}\,(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}, \bmod 2\pi.$$

Un cercle (β) est tangent en B à AB; un cercle (γ) est tangent en C à AC; ces deux cercles se coupent en M et N.

1° *a*) Montrer que MN passe par un point fixe.

b) Quel est l'ensemble des points N lorsque M décrit la droite BC ?

c) On suppose, dans cette question seulement, que (β) et (γ) varient, en restant tangents en P. Quel est l'ensemble des points P ?

2° On suppose que (β) et (γ) varient en restant constamment orthogonaux.

a) Désignant par (O) le cercle de centre A et de rayon AB, on demande de construire de manière précise les images (β_1), (γ_1), (O_1) des cercles (β), (γ), (O) dans l'inversion de centre B et de puissance BC^2.

b) En déduire que l'ensemble des points communs à (β) et (γ) se compose de deux cercles, que l'on caractérisera.

3° Conservant l'hypothèse du 2° [(β) et (γ) orthogonaux], évaluer l'angle (MB; MC); retrouver ainsi les résultats du 2°, *b*).

2047. Soit un repère cartésien orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$, une longueur donnée a et le point fixe A, sur l'axe $x'Ox$, d'abscisse $\frac{4\,a}{3}$ M étant un point quelconque de l'axe $y'Oy$, on désigne par (M) le cercle de centre M et de rayon égal à $\frac{1}{2}$ AM.

1° I étant le conjugué de A par rapport au cercle (M) situé sur la droite AM, quel est l'ensemble des points I quand M décrit l'axe $y'Oy$?

Soit D la parallèle à $x'Ox$ issue de I; elle coupe (M) en deux points, P_1 et P_2.

On appelle u l'ordonnée de M. Donner, en fonction de u, l'équation du cercle (M), l'équation de la droite D, les coordonnées des points P_1 et P_2.

En déduire l'équation de la courbe (C) décrite par les deux points P_1 et P_2 lorsque M décrit l'axe $y'Oy$.

2° Construire cette courbe (C) et préciser ses éléments (sommets, foyers, directrices, asymptotes). Montrer que la courbe (C) est tangente au cercle (M) aux deux points correspondants, P_1 et P_2.

3° Soit (M') le cercle inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle A et de puissance $2\,a^2$; on appelle M' son centre. Quel est l'ensemble des points M' quand M décrit $y'Oy$? Calculer le rayon de (M') en fonction de AM'. Montrer que les cercles (M') restent orthogonaux à un cercle fixe, que l'on précisera, quand M décrit $y'Oy$. Préciser la position des points P'_1 et P'_2 inverses des points P_1 et P_2. Quelle est, en P'_1 (ou P'_2), la tangente à la courbe (C') décrite par ces deux points quand M décrit $y'Oy$? Montrer que la droite $P'_1P'_2$ passe par un point fixe. En déduire que la courbe (C') se conserve dans une inversion, que l'on précisera.

La droite AP'_1 (ou AP'_2) recoupe la courbe décrite par M' en h'_1 (ou h'_2). Montrer que la longueur $P'_1h'_1$ (ou $P'_2h'_2$) est constante et égale à a. (Cette propriété pourrait permettre de construire (C') point par point.

2048. Dans un système d'axes orthonormés Ox, Oy on donne l'ellipse (E), d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

et son cercle principal (C), d'équation

$$x^2+y^2=a^2.$$

On désigne par M un point de l'ellipse, par G la projection orthogonale de M sur le grand axe de (E), par K la projection du foyer F sur la tangente en M à l'ellipse, par S le point où cette tangente coupe le grand axe et par H la projection orthogonale de K sur le grand axe.

1° Soit N le point HK satisfaisant à $\overrightarrow{HM}=\lambda.\overrightarrow{HK}$, où λ est une constante donnée; trouver le lieu de N quand M décrit l'ellipse (E) et construire la tangente en N à ce lieu.

2° Montrer que, dans le cas où $\lambda=\frac{b}{a}$, la droite conjuguée de SN par rapport aux deux tangentes issues de S à l'ellipse (E) est tangente au cercle (C).

3° Montrer que le cercle (Γ) passant par les trois points G, S, M est orthogonal au cercle (C).

4° Soit Q le point où l'axe radical de ces deux cercles rencontre le grand axe de (E); soient u l'abscisse de Q et v l'abscisse du centre de (Γ). Montrer que $uv = a^2$.

(Démonstrations algébrique et géométrique.)

2049. On considère un faisceau F de cercles (C) ayant pour axe radical une droite D et pour droite des centres une droite D_1 coupant D en O. Soit A un point de D différent de O.

A) Soit Δ la polaire de A par rapport à un cercle (C) du faisceau F.

1° Montrer qu'il existe un cercle (ω) passant par A et orthogonal aux cercles de F. En déduire que Δ passe par un point fixe B quand le centre C du cercle (C) varie. Préciser la position de B.

2° Quelle est la transformée de Δ par l'inversion de centre A qui conserve le faisceau F ? En déduire que la polaire Δ passe par un point fixe B. De quel point B est-il l'inverse ?

B) On appelle M et M′ les points de rencontre de Δ et des tangentes à un cercle (C) parallèles à D.

1° On suppose dans cette question que F est un faisceau de cercles tangents en O à D. Que peut-on dire du point B ?

a) Montrer que la tangente MT à (C), qui coupe D et touche (C) en T, passe par un point fixe quand (C) varie.

b) Quel est l'inverse de MT dans l'inversion de centre A, de puissance AO^2 ? Retrouver à l'aide de cette inversion le résultat précédent.

c) Quel est le lieu de M quand (C) varie ? Quelle est l'équation de ce lieu quand on prend D pour axe Ox et D_1 pour axe Oy ?

2° F étant un faisceau quelconque :

a) montrer que les tangentes non parallèles à D, issues de M et M′ passent par un point fixe, milieu de AB;

b) montrer que les cercles passant par A et orthogonaux à (C) forment un faisceau;

c) quel est le lieu de M et quel est le lieu de M′ quand (C) varie ? Quelles sont les enveloppes des droites MC et M′C ?

2050. 1° On considère l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$. Montrer que, si A et A′ sont des sommets, m la projection de M sur AA′, cette hyperbole est le lieu des points M tels que $\overline{mM}^2 = -\overline{mA}.\overline{mA'}$.

2° On considère un cercle (C) de centre C, qui varie en passant constamment par deux points fixes A et A′. O est le milieu de AA′. Soit MM′ le diamètre du cercle (C) parallèle à AA′. Trouver le lieu (H) des points M et M′ lorsque (C) varie.

3° Soit Q le pôle de AA′ par rapport au cercle (C). Montrer que le cercle (Γ) circonscrit au triangle QMM′ passe par le symétrique Q′ de O par rapport à C.

En déduire que le cercle (Γ) coupe la droite AA′ en deux points F et F′ tels que $OF = OF' = OA.\sqrt{2}$.

Que représentent pour (H) les points F et F′ et la droite MQ.

4° Montrer que MQ et MO forment avec les parallèles aux asymptotes de (H) menées par M un faisceau harmonique.

En déduire que la tangente en M à (H) coupe les asymptotes en deux points symétriques par rapport à M.

2051. On donne dans un plan deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, de repère $(\vec{i}; \vec{j})$.

1° *a*) A tout point M de l'axe $x'Ox$, d'abscisse x, on associe le point M′, d'abscisse x', qui s'en déduit par une inversion de centre O et de puissance k, suivie d'une translation de vecteur $h\,\vec{i}$.

Établir la relation entre les abscisses x et x'.

b) Montrer que la relation $xx' - 4x + 3 = 0$ définit une transformation du même type.

Placer sur l'axe $x'Ox$, le vecteur translation $\overrightarrow{OH}$ ($\overline{OH} = h$) et calculer la puissance de l'inversion k.

Montrer que deux points A et B (points doubles) sont à eux-mêmes leurs propres homologues. Calculer leurs abscisses. Les placer sur $x'Ox$ et vérifier géométriquement leur propriété d'invariance.

2° On associe à tout point P du cercle (C) de diamètre AB le point P' qui s'en déduit par l'inversion de centre O et de puissance k, suivie de la translation définie par le vecteur $\overrightarrow{OH}$, telles qu'elles résultent de 1°, *b*).

Quel est le lieu de P' ?

Situer par rapport à P' le point Q où PO recoupe le cercle (C). Trouver l'enveloppe de la droite PP'. Construire son point de contact. Placer les éléments remarquables de cette enveloppe.

3° On suppose maintenant que P décrit une tangente (D) au cercle (C), en P_0.

Montrer que P' décrit un cercle (S), que l'on situera par rapport à (C). Quel est le lieu du centre S de (S) lorsque (D) varie en restant tangente à (C).

2052. On donne deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, et, sur Ox, les points A, B, B', par leurs abscisses $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OB'} = -b$.

On suppose $a > b > 0$.

Un cercle variable γ passe par B, B' et coupe $y'y$ en E et E'; les droites AE et AE' recoupent respectivement le cercle γ en T, T'.

1° Démontrer que la polaire Δ de A par rapport à γ passe par un point fixe C situé sur Ox, dont on calculera l'abscisse. Construire, uniquement à l'aide de la règle, cette polaire Δ, qui coupe en général $y'y$ en un point D. Préciser la polaire du point D par rapport à γ et montrer que l'axe radical du cercle γ et du cercle de diamètre OC passe par A.

2° On considère l'inversion ayant A pour centre et pour puissance $a^2 - b^2$. Définir et construire les inverses de l'axe $y'y$, d'un cercle γ et de la droite Δ. Quel est le lieu des points T, T' lorsque γ varie ?

3° Les tangentes à γ menées en E et E' coupent la droite Δ respectivement en M et M'. Montrer que MT et MT' sont des tangentes à γ et que ces droites se coupent en un point fixe F situé sur Ox, dont on calculera l'abscisse.

4° En se servant des résultats précédents, déterminer le lieu des points M et M'.

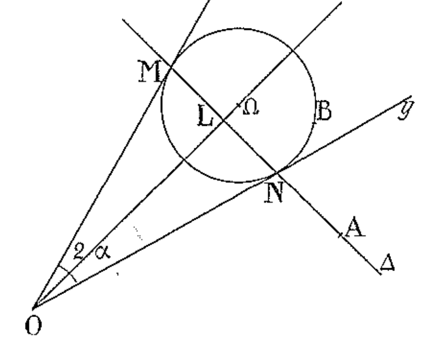


Fig. Ex. 2053.

2053. On donne un angle xOy variable en position, ayant le sommet fixe en O et une mesure constante 2α (fig. ex. 2053).

Soit (C) un cercle inscrit à cet angle, de centre Ω. Soit Δ la polaire de O par rapport à (C), coupant ce cercle aux points M et N et $O\Omega$ au point L.

1° Démontrer que les points L et Ω se correspondent dans une homothétie, dont on demande de déterminer le rapport.

2° On suppose que Δ passe par un point fixe donné A. Lieux de Ω, de M et de N. Démontrer que les cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe.

3° On suppose que le cercle (C) passe par un point fixe, B. Trouver les lieux de Ω et de L. Déterminer l'enveloppe des cercles (C).

4° Construire les cercles (C), si l'on donne le point B du cercle et le point A de la polaire. B étant donné, trouver la région du plan dans laquelle doit se trouver A pour que le problème ait au moins une solution.

2054. Soient D_1 et Δ_1 deux droites fixes se coupant en O et telles que

$$\overline{\text{angle}}\,(D_1; \Delta_1) = \alpha, \bmod \pi$$

Deux droites variables D et Δ, situées dans le même plan que D_1 et Δ_1, se coupent en un point fixe donné P non situé sur D_1 ou Δ_1 et sont telles que

$$\overline{\text{angle}}\,(D; \Delta) = \beta, \bmod \pi.$$

On appelle M le point d'intersection de D et D_1, N le point d'intersection de Δ et Δ_1, A, B et I les projections orthogonales de P respectivement sur D_1, Δ_1 et la droite MN.

1° Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles PAI et PBI se coupent sous un angle constant.

2° Calculer $\overline{\text{angle}}$ (IA; IB) et en déduire le lieu géométrique du point I.

3° Trouver l'enveloppe de la droite MN. Montrer que cette courbe est tangente à D_1 et Δ_1. Quel rôle joue P pour cette courbe ?

4° Quelle relation doit exister entre α et β pour que cette enveloppe soit une parabole ?

5° Quelle relation doit exister entre α et β et où doit se trouver P pour que cette enveloppe soit un cercle ?

2055. Dans un plan donné, on considère une parabole fixe (γ) ayant pour foyer F et pour directrice D; on appelle A son sommet, B la projection orthogonale de F sur D; on pose $FB = p$.

Dans tout le problème, la notation Δ désigne une droite de ce plan, passant par le sommet A, distincte de l'axe et de la tangente au sommet de (γ).

1° La droite Δ recoupe (γ) en un point M distinct de A. Donner une construction du point M.

Soient H la projection orthogonale de M sur D, I le milieu du segment BH, K la projection orthogonale de F sur la tangente en M à (γ). Démontrer que les droites IF et Δ sont orthogonales, ainsi que les droites IK et D.

2° On considère la droite Δ' perpendiculaire en A à Δ. Soit M' le point, distinct de A, commun à Δ' et (γ). On désigne par H', I', K' les points définis à partir de M' comme les points H, I, K ont été définis à partir de M.

Démontrer que le produit $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH'}$ est indépendant de la position de la droite Δ.

Supposant la droite Δ variable, démontrer que les cercles circonscrits aux triangles FHH' appartiennent à un faisceau de cercles, que l'on définira; déterminer le lieu géométrique du point de rencontre T des tangentes à (γ) aux points M et M'.

3° Soient (μ) et (μ') les cercles passant par F et ayant respectivement pour centres les points M et M'.

Calculer le rayon R du cercle (μ) en fonction du paramètre p de la parabole et de l'angle aigu θ de l'axe BF et de la droite Δ.

Soit R' le rayon du cercle (μ'). Montrer qu'il existe entre R, R' et p une relation indépendante de la position de Δ; que devient cette relation lorsqu'on pose $R = p.x$, $R' = p.y$? Construire, dans un plan rapporté à des axes de coordonnées orthonormés Ox, Oy, la courbe lieu géométrique des points ayant pour coordonnées ces nombres x et y.

4° On considère l'inversion $\sigma = \text{inv}\,(F; p^2)$. Déterminer les transformés, par σ, de la directrice D, des points H et H', et des cercles (μ) et (μ').

Lorsque la droite Δ varie, démontrer que la droite déterminée par les inverses de

H et H′ passe par un point fixe, que l'on précisera; déterminer le lieu géométrique du point, autre que F, commun aux deux cercles (μ) et (μ'); démontrer que la droite MM′ passe par un point fixe, que l'on définira.

2056. On donne un point F et une droite (Δ) ne passant pas par F et l'on se propose d'étudier les hyperboles (H) admettant F pour foyer et (Δ) pour asymptotes.

1° Rappeler sans démonstration comment, connaissant un foyer et le cercle principal d'une hyperbole, on peut obtenir les différentes tangentes de cette hyperbole, ainsi que ses asymptotes.
Montrer qu'il existe une infinité d'hyperboles (H), en étudiant leurs cercles principaux.

2° Trouver le lieu géométrique du second foyer F′, et l'enveloppe de la deuxième asymptote (Δ') de l'hyperbole (H).

3° (L), (D), (D′) désignant respectivement l'axe non focal de (H) et les directrices associées à F et F′, déterminer les enveloppes de ces trois droites.

4° Montrer que les sommets, A et A′, de l'hyperbole (H) se correspondent dans une inversion fixe, que l'on précisera.
φ désignant la projection orthogonale de F sur (Δ), construire les inverses de la droite AA′ et du cercle de diamètre AA′ dans l'inversion de pôle φ qui laisse F invariant. En déduire, en obtenant son équation dans un système d'axe convenable, que l'inverse du lieu de A et A′ dans cette inversion est porté par l'hyperbole équilatère dont F et φ sont les sommets.

5° Montrer que, par un point M donné du plan, il passe en général deux hyperboles (H) qui ont un deuxième point commun, M′.
Montrer que la droite MM′ passe par un point fixe et que les droites FM et FM′ ont leurs bissectrices fixes. (On pourra utiliser une inversion de centre F).

2057. On considère deux axes orthonormés, $x'Ox$ et $y'Oy$.
Soient C le point de $x'Ox$ d'abscisse $\overline{OC} = 2a$, ($a > 0$), A le milieu de OC et (C) le cercle de centre C et de rayon a.

M étant un point quelconque de (C), on pose :

$$\overline{\text{angle}}\,(Cx;\ CM) = \theta,\ \text{mod}\ 2\pi$$

et

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\ OM) = \alpha,\ \text{mod}\ 2\pi.$$

1° Calculer les coordonnées, x et y, de M en fonction de a et θ. Calculer tg α en fonction de θ. Ecrire l'équation qui détermine θ lorsque α est donné. Résoudre et discuter cette équation. Contrôler sur la figure le résultat de la discussion.

2° La droite OM recoupe (C) en N. On considère le cercle (U) du plan xOy passant par M et N et orthogonal à (C). Construire son centre, U. Déterminer avec précision le lieu géométrique de U lorsque le point M décrit le cercle (C). On appelle P et Q les points où la polaire de O par rapport à (C) coupe le cercle (U). Montrer que P et Q partage harmoniquement un segment fixe, IJ, de cette polaire.

3° Démontrer que le cercle (V) circonscrit au triangle OMC et le cercle (W) circonscrit au triangle ONC sont égaux.

4° On effectue l'inversion de centre A et de puissance a^2. Préciser les transformés, dans cette inversion, des cercles (C), (U), (V) et (W). En déduire que le cercle (U) coupe les cercles (V) et (W) sous le même angle.

2058. A) Dans un plan rapporté à deux axes orthonormés, $x'Ox$, $y'Oy$, on considère l'ellipse de grand axe $2a$ dont les foyers, F et F′ ont pour coordonnées F (c; O) et F′ (— c; O).

M étant un point quelconque de cette ellipse, d'abscisse x, et α l'angle F'MF, montrer que

$$\cos \alpha = \frac{c^2x^2 - 2\,c^2a^2 + a^4}{a^4 - c^2x^2}.$$

En utilisant le résultat précédent, étudier l'intersection de l'ellipse et du cercle de diamètre FF' : existence; abscisses des points d'intersection; dans le cas où le cercle et l'ellipse sont tangents, préciser l'excentricité de l'ellipse et la position de ses directrices.

B) Dans la fraction

$$y = \frac{c^2\,x^2 - 2\,c^2\,a^2 + a^4}{a^4 - c^2\,x^2}$$

on prend $a = 1$, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1° Étudier les variations de y et tracer la courbe représentative (C).

2° Par le point A de (C) d'abscisse 2 on fait passer une droite D, de pente m. Quelle est l'équation de cette droite ?

Discuter le nombre de ses points d'intersection avec (C) suivant les valeurs de m.

3° Quand la droite D recoupe la courbe en deux points M' et M'', on appelle P le conjugué harmonique de A par rapport à M' et M''. Calculer les coordonnées de P et montrer que ce point est sur la courbe d'équation

$$y = \frac{2\,x^2 - 2\,x - 9}{2x - 3}.$$

La tracer et préciser les arcs effectivement décrits par P.

2059. On donne deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, et un point, C, de $y'Oy$ d'ordonnée R ($R > 0$). On désigne par (C) le cercle de centre C et de rayon R, par M un point de l'axe $x'Ox$, d'abscisse $\overrightarrow{OM} = x$, par AB le diamètre du cercle (C) parallèle à $x'Ox$ (l'abscisse de B étant positive).

1° La droite MA recoupe le cercle (C) en un point P. Tracer le cercle (ω) passant par P et tangent en M à l'axe $x'Ox$. Montrer que ce cercle (ω) est orthogonal au cercle (C), qu'il recoupe en un point Q. Montrer que M, B, Q sont alignés.

2° Calculer en fonction de $\overrightarrow{OM} = x$ l'ordonnée du centre, ω, du cercle (ω). En déduire que le lieu de ω est une conique, (Γ), dont on précisera le foyer et la directrice.

3° Montrer que, lorsque M décrit $x'Ox$, le cercle (ω) reste tangent à un cercle fixe, que l'on précisera (centre et rayon). Retrouver, en utilisant cette propriété du cercle (ω), le lieu de ω.

4° *a*) En désignant par I et J les points d'intersection de la droite AB avec les droites PQ et Mω, montrer que A, B, I, J forment un quaterne harmonique.

b) Montrer que la droite PQ et la tangente (Δ) à la courbe (Γ), se coupent en ω sur l'axe $x'Ox$. Lieu de ω.

2060. On considère un cercle (O), de rayon R, et une droite (D), extérieure à ce cercle, à la distance OB = d du centre. Soit A le point du cercle le plus éloigné de la droite.

1° Montrer qu'il existe un cercle (C), de centre A, ayant avec le cercle (O) la droite (D) pour axe radical. Calculer son rayon.

2° Soient P un point quelconque du cercle (C), PH la perpendiculaire menée de ce point à la droite (D).

Montrer que la puissance du point P par rapport au cercle (O) est égale à 2 R.PH.

3° On fait une inversion de centre P. Montrer que les figures inverses de la droite (D) et du cercle (O) sont deux cercles égaux, (D') et (O').

4° Chercher, dans l'inversion précédente, l'inverse du cercle (C) et montrer que c'est la médiatrice du segment qui joint les centres des cercles (D') et (O').

2061. 1° Soient une droite (D) et deux points fixes M et N, H et K leurs projections sur (D).

Trouver le lieu des foyers des coniques (C) de directrice (D) passant par les points M et N. On appellera I et J les points où ce lieu coupe la droite MN.

Déterminer, suivant la position de F sur son lieu, la nature de la conique correspondante.

Examiner les cas particuliers où MN est parallèle ou perpendiculaire à (D).

2° Déterminer les coniques (C) d'excentricité e donnée. Discuter suivant les valeurs de e. On posera MH = l et NK = l', MN = a.

M étant fixe, où doit se trouver N pour qu'il y ait des coniques (C) d'excentricité donnée e ? Montrer que, pour qu'il y ait une seule solution, N doit se trouver sur une conique (Γ). La courbe (Γ) est tangente en N à la conique (C) correspondante.

3° Si N décrit une droite Δ, trouver le lieu des points I et J. Cas particulier où Δ passe par M. Trouver l'enveloppe des polaires de I et J par rapport au cercle de diamètre MN.

Lieu des points I et J quand M et N sont diamétralement opposés sur un cercle (γ) de centre O.

2062. On donne deux cercles (C) et (C') égaux et orthogonaux, de centres O et O', de rayon R, se coupant en A et B. Soit I le milieu de OO'. Une demi-droite Ix coupe (C) en P et (C') en P'; OP et O'P' se coupent en M.

1° Montrer que le produit $\overline{IP}.\overline{IP'}$ reste constant lorsque Ix tourne autour de I. On effectue l'inversion de pôle I et de puissance IA^2; que deviennent les cercles (C) et (C') ? en déduire que le triangle MPP' est isocèle et que le cercle (γ) circonscrit au triangle MPP' est orthogonal à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

2° Lieu géométrique du point M lorsque Ix tourne autour de I; tangente en M à ce lieu. Lieu géométrique du point T diamétralement opposé à M sur le cercle (γ).

3° Un point Q décrit l'axe radical des cercles (C) et (C').

Lieux géométriques des points U et U' respectivement inverses du point Q dans les inversions de pôles O et O' et de même puissance R^2. Montrer que OU' et O'U se coupent en un point S de l'axe radical, conjugué harmonique de Q par rapport à A et B.

2063. On donne dans le plan deux cercles (C) et (C'), de même rayon R, tangents extérieurement entre eux en un point A. On appelle cercle (S) tout cercle du plan tangent au cercle (C) avec contact intérieur ou extérieur, et orthogonal au cercle (C').

1° Construire un cercle (S), connaissant son point de contact M avec le cercle (C).

2° Construire un cercle (S), connaissant l'un de ses points d'intersection P et Q avec le cercle (C').

3° Construire un cercle (S) de rayon donné r; discuter le problème suivant la valeur de r.

4° On suppose qu'un point K décrive la tangente commune (D) aux cercles (C) et (C') en A.

Montrer qu'il passe deux cercles (S) par chaque point K de la droite (D) et que ces deux cercles se coupent sous un angle constant. Quel est le lieu de leur deuxième point d'intersection, K', lorsque K décrit la droite (D) ?

2064. On considère une ellipse (E) d'excentricité e, de foyer F et de directrice associée (D). On désignera par a le demi-grand axe, par b le demi-petit axe, par c la demi-distance focale de cette ellipse. H sera la projection orthogonale de F sur (D).

1° On définit chaque point M de l'ellipse par l'angle $\theta = (\overrightarrow{FH}; \overrightarrow{FM})$ et par la longueur r = FM.

Exprimer r en fonction de e, de θ et du demi-grand axe a de l'ellipse.

2° FM coupe la directrice (D) en un point I et recoupe l'ellipse en un point N. Montrer que la somme

$$\frac{1}{\overline{FM}} + \frac{1}{\overline{FN}}$$

garde une valeur constante, qu'on calculera en fonction de a et b, lorsque M décrit l'ellipse.

On considère les cercles de diamètre MN et de diamètre FI. Que peut-on dire de ces deux cercles ? Comment se transforment-ils dans une inversion de pôle F et de puissance FH^2 ? Déterminer le centre et calculer le rayon du cercle (C′) inverse du cercle (C) de diamètre MN. Quel est le lieu du centre de (C′) lorsque M décrit l'ellipse E ?

3° A chaque point M de l'ellipse on fait correspondre le point M′ du cercle principal situé du même côté de M par rapport au grand axe sur la perpendiculaire menée de M à ce grand axe. O désignant le centre de l'ellipse, on pose :

$$\alpha = (\overrightarrow{OH}; \overrightarrow{OM'})$$

Trouver la relation qui lie α et θ.

Montrer que cette égalité peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

2065. On donne un point fixe F, une droite fixe D ne passant pas par F, et l'on considère les hyperboles (H) qui admettent pour foyer le point F et pour asymptote la droite D.

1° Lieu du deuxième foyer F′. Enveloppes de la deuxième asymptote et de l'axe non focal. Que peut-on dire du cercle directeur relatif au foyer F′ ? de la directrice relative à F ?

2° Construire F′, sachant que (H) satisfait à l'une des conditions supplémentaires suivantes :

a) (H) a une excentricité donnée;

b) (H) est tangente à une droite donnée;

c) (H) passe par un point donné M.

Dans le dernier cas, le problème admet deux solutions. Comment choisir M pour que les deux hyperboles se coupent orthogonalement au point M ?

2066. On donne un cercle (C) de centre O, de rayon R. A tout point A du plan de ce cercle on fait correspondre la droite (α) symétrique par rapport à O de la polaire de A par rapport à (C).

1° Montrer que si un point B décrit (α), le cercle de diamètre AB coupe (C) en deux points diamétralement opposés sur (C). Énoncer et démontrer une réciproque de cette propriété.

2° A décrit maintenant un cercle (Γ) de centre Ω, de rayon ρ. Trouver l'enveloppe de la droite (α) associée à A. Cette enveloppe est une conique dont on précisera les foyers et la longueur de l'axe focal. Discuter la nature de cette conique.

3° Le centre Ω étant ici fixe ($O\Omega = d$) étudier la variation de la longueur de l'axe focal de la conique trouvée dans la seconde question en fonction du rayon ρ du cercle (Γ). Représentation graphique.

2067. Soient (C), (C′) des cercles de rayons R, R′, de centres O, O′, tangents extérieurement en S. Ces cercles coupent la droite OO′ en S et respectivement en A et A′. Une tangente commune autre que la tangente D au point S coupe D au point P et la droite des centres OO′ en S′; M et M′ sont les points de contact. Soit T le milieu de OO′.

1° Montrer que le cercle de diamètre OO′ est tangent en P à MM′. Evaluer SS′ et ST en fonction des rayons.

2° Montrer que A, A′, M, M′ sont sur un même cercle (Ω) dont le centre ω est diamétralement opposé à P sur le cercle de diamètre OO′, et que les droites AM, A′M′ se coupent en P′ sur D.

α et β étant les projections de ω sur OO′ et sur D, montrer que les quatre points S′, P, T, β sont sur un même cercle, ainsi que les quatre points S′, P′, α, β.

3° Les droites SM, SM′ recoupent (Ω) en N, N′. Montrer que la droite NN′ est perpendiculaire à D et que sa distance à S est égale à 2.SP. (On pourra considérer le cercle circonscrit SMP′M′ et utiliser une inversion bien choisie.) Montrer que S′P′ est l'axe radical de (Ω) et du cercle-point S.

4° En supposant la droite OO′ et le point S fixes et les rayons variant de manière que $R - R' = d$, $(d > 0)$, déterminer le lieu de ω, l'enveloppe de MM′ et l'enveloppe de S′P′.

2068. Etant donné un cercle (C) de centre O, de rayon R, et une droite D de son plan, à une distance OH = 2 R du centre, on appelle (γ) tout cercle tangent à D et orthogonal à (C).

1° Construire un cercle (γ) de rayon donné r. Discuter.

2° Construire un cercle (γ) passant par un point A donné de (C). Discuter.

3° Construire un cercle (γ) tangent à D en un point B. Que devient la solution si B s'éloigne indéfiniment sur D ?

4° B décrivant la droite D, trouver l'enveloppe des cercles (γ) et le lieu de leur centre.

5° Construire le cercle (γ') inverse d'un cercle (γ) dans l'une des inversions qui font se correspondre D et (C). Retrouver, grâce à cette inversion, l'enveloppe des cercles (γ) du 4°.

2069. On donne un cercle (C) de centre O, de rayon a, et un point fixe F extérieur au cercle (C); on pose $OF = c$.

1° Soit γ la perpendiculaire en O à OF. Au point ω variable sur γ on associe le cercle (λ) de centre ω qui se déduit de (C) par l'homothétie-rotation de centre F qui transforme O en ω. Construction précise de ce cercle; démontrer que les cercles (λ) sont vus de F sous un angle constant 2α.

2° Soit F′ le symétrique de F par rapport à (γ); le cercle (ωFF′) coupe (λ) en deux points M, M′. Soit I l'intersection de γ et de la droite MM′. Démontrer que le rapport $\frac{\overline{\omega I}}{\overline{\omega O}}$ est constant.

Si P est la projection de F sur la tangente en M au cercle (λ), démontrer que P est sur le cercle (C).

3° On considère l'hyperbole (H) de foyers F et F′ qui passe en M et M′. Démontrer qu'elle est tangente en M et M′ au cercle (λ). Quel est son cercle principal ? Que peut-on dire de cette hyperbole quand (λ) varie ?

4° La droite ωF coupe MM′ en K; montrer que K est le pied de la polaire de F par rapport à (λ); lieu du point K lorsque (λ) varie.

2070. On considère un triangle ABC, ses médianes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et son cercle circonscrit, de centre O, que les médianes recoupent en A′, B′, C′ respectivement.

1° Montrer que les tangentes au cercle circonscrit aux extrémités des cordes AA′, BB′, CC′ se coupent respectivement en trois points P, Q, R alignés.

2° On désigne par A_1, B_1, C_1 respectivement les points d'intersection des tangentes au cercle circonscrit en B et C, C et A, A et B. Montrer que les droites A_1P, B_1Q, C_1R forment un triangle dont les sommets sont respectivement alignés avec O et C_1, O et A_1, O et B_1.

3° Les cercles de diamètres OA, OB, OC se recoupent respectivement deux à deux en C_2, A_2, B_2. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AA_1A_2, AB_1B_2, AC_1C_2 font partie d'un faisceau singulier dont on déterminera la tangente commune et la droite des centres.

2071. On donne deux cercles (Γ) et (Γ'); soient R et R' leurs rayons, d la distance de leurs centres O et O'; (γ) l'inverse de (Γ) dans l'inversion inv $(O'; R'^2)$ et (γ') l'inverse du cercle (Γ') dans l'inversion inv $(O; R^2)$.

1° Calculer en fonction de R, R' et d les rayons r et r' des cercles (γ) et (γ'). Désignant par ω et ω' les centres de ces deux cercles, calculer $\overline{O\omega}$ et $\overline{O'\omega'}$, le sens positif adopté sur la droite OO', étant le sens de O vers O'.

2° Démontrer que si les rayons R et R' sont différents, la relation $r = r'$ entraîne soit :

(1) $$d^2 = R^2 + R'^2 - RR'$$

soit :

(2) $$d^2 = R^2 + R'^2 + RR'$$

Énoncer et établir la réciproque. Montrer que dans chacune de ces deux hypothèses les cercles (Γ) et (Γ') se coupent et, A désignant alors l'un de leurs points communs, calculer, dans chacun de ces deux cas, l'angle AOA'.

3° Montrer que dans l'une des deux hypothèses (1) ou (2) les cercles (γ) et (γ') sont confondus. Calculer alors la valeur du rapport $\dfrac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}$ et dire quelle position remarquable occupe alors le point ω.

2072. On donne, dans un plan, un point fixe O. Soit (C) un cercle variable de ce plan, de centre I et de rayon égal à $\frac{1}{2}$OI. On désigne par (Δ) la polaire de O par rapport à (C), par J le point d'intersection de (Δ) avec OI.

1° Évaluer le rapport $\dfrac{\overline{OJ}}{\overline{OI}}$.

2° On suppose que (Γ) passe par un point fixe A.

a) Montrer que (C) reste orthogonal à un cercle fixe.

b) Trouver le lieu de I.

c) Trouver les lieux des points communs à (Γ) et (C).

3° On suppose que (C) passe par un point fixe B.

a) Trouver les lieux de I et J.

b) Trouver l'enveloppe de (Γ).

4° Construire (C), connaissant un de ses points, B, et un point A de (Γ). Discuter le nombre de solutions suivant la position du point A dans le plan, les points O et B étant supposés fixes; déterminer en particulier la région du plan où doit se trouver A pour que le problème soit possible, c'est-à-dire ait au moins une solution.

LIVRE XI

CINÉMATIQUE

CHAPITRE XCIX

CINÉMATIQUE DU POINT

1317. Définitions.

On considère un repère orthonormé (Ox; Oy; Oz) ou (T).

Un point M est fonction d'un paramètre t, t *est le temps cinématique.*

Si lorsque t croît, M varie, on dit que *M est en mouvement par rapport au repère orthonormé (T)* donné; dans le cas contraire, *M est en repos dans le repère (T).*

Le lieu du point M est la *trajectoire (C) de M.* On dit aussi que *(C) est l'hodographe de la fonction vectorielle*

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$$

Une valeur de t *est une date; c'est la date d'un instant.* On parle donc de la date d'un instant, comme on parle de l'abscisse d'un point sur un axe.

La *cinématique* est l'étude des mouvements.

1318. Relativité du mouvement.

Une mouche à l'intérieur d'un compartiment d'un train en marche est en mouvement ou en repos par rapport au train selon qu'elle vole ou est posée; dans les deux cas elle est en mouvement par rapport au sol.

Le mouvement est donc essentiellement relatif; il faut donc préciser le repère par rapport auquel le mouvement est envisagé.

1319. Définition d'un mouvement.

On définit le mouvement du point M en donnant à chaque date la position du point M dans le repère (T).

1° Dans le repère cartésien (T) on peut donner M par ses coordonnées (x; y; z) en fonction de la date t :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (1319\,;\,1)$$

On suppose que les fonctions x, y, z sont dérivables au moins deux fois.

2° Dans le plan, on peut donner M par ses coordonnées polaires θ et r en fonction de la date t :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} \theta = \theta(t) \\ r = r(t) \end{cases} \quad (1319;\ 2)$$

On a :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{R},$$

$\overrightarrow{R}$ étant le vecteur unitaire tel que $\overline{\text{angle}}\ (Ox;\ \overrightarrow{R}) = \theta$.

On suppose que les fonctions θ, r sont dérivables au moins deux fois.

3° On peut aussi donner la trajectoire du point M, et l'abscisse curviligne s en fonction de la date t :

$$s = s(t). \quad (1319;\ 3)$$

La relation $s = s(t)$ est l'*équation horaire* du mouvement.

Le plus souvent la trajectoire est un axe $x'Ox$; le mouvement est rectiligne; alors l'*équation horaire* est

$$\overline{OM} = x = x(t);$$

elle permet d'étudier le mouvement. La courbe (Γ), d'équation $x = x(t)$, est le *diagramme* du mouvement.

Très souvent la trajectoire est un cercle de centre O et de rayon R; le point est déterminé par son abscisse curviligne $s = R\theta$.

1320. Vitesse par rapport à un repère.

1° ***On appelle vitesse d'un point par rapport à un repère (T), la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la date t :***

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \quad (1320;\ 1)$$

2° ***Soient M et M' les positions du point mobile aux dates t et t + Δt. On appelle vitesse moyenne entre les dates t et t = Δt le vecteur***

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} \quad (1320;\ 2)$$

On sait d'autre part que

$$V = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

autrement dit :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t = 0} \vec{V}_m \qquad (1320; 3)$$

Le vecteur $\vec{V}$ est un vecteur libre; généralement on lui donne le point M comme origine.

1321. Détermination du vecteur vitesse.

1° *En coordonnées cartésiennes*, on a :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

D'où :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k} \qquad (1321; 1)$$

Autrement dit :

Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont les dérivées des coordonnées du point mobile.

2° *En coordonnées polaires planes*, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \vec{R}$$

D'où :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = r' \cdot \vec{R} + r \cdot \frac{\overrightarrow{dR}}{dt}$$

$$= r' \cdot \vec{R} + r \cdot \frac{\overrightarrow{dR}}{d\theta} \cdot \frac{\overrightarrow{d\theta}}{dt}$$

ou

$$\vec{V} = r' \vec{R} + r\theta' \cdot \vec{C} \qquad (1321; 2)$$

On pose :

$$v_r = v_\theta = \frac{dr}{dt} = r' \qquad (1321; 3)$$

$$\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt} \qquad (1321; 4)$$

$$v_p = v_{\theta + \frac{\pi}{2}} = r\theta' \qquad (1321; 5)$$

v_r *est la vitesse radiale.*
θ' *est la vitesse angulaire.*
v_p *est la vitesse de circulation.*

3° *Si le mouvement est donné par la trajectoire (C) et l'abscisse curviligne s = s(t) du mobile*, on a :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Or, $\frac{d\overrightarrow{M}}{ds} = \vec{t}$, *est le vecteur unitaire de la tangente en M à la trajectoire orientée dans le sens des abscisses curvilignes croissantes;* en effet

$$\lim_{\Delta t = 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta s} = \vec{t}.$$

Donc :

$$V = \frac{ds}{dt} t$$

On pose :

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{ds}}{\mathbf{dt}} \qquad (1321\,;\,6)$$

v est la mesure algébrique de la vitesse sur la tangente en M.

Finalement :

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{t}} \qquad (1321\,;\,7)$$

Le vecteur lié $\overrightarrow{MV} = \vec{V}$ est donc porté par la tangente.

4° On pose :

$$\overrightarrow{OH} = \vec{V}$$

Le lieu du point H est l'*hodographe* du vecteur vitesse; lorsqu'on parle de l'hodographe d'un mouvement, il s'agit toujours de l'hodographe du vecteur vitesse.

1322. Accélération par rapport à un repère.

***On appelle accélération du point M par rapport à un repère (T), la dérivée du vecteur vitesse $\vec{V}$ par rapport à la date* t :**

$$\vec{\Gamma} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\boldsymbol{V}}}{\mathbf{dt}} \qquad (1322\,;\,1)$$

Donc :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\mathbf{d}^2\,\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}}{\mathbf{dt}^2} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{d}^2\boldsymbol{M}}}{\mathbf{dt}^2} \qquad (1322\,;\,2)$$

Le vecteur $\vec{\Gamma}$ est un vecteur libre; généralement on lui donne le point M pour origine.

On a aussi :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\,\overrightarrow{OH}}{dt}.$$

Donc, l'*accélération est la vitesse du point H sur l'hodographe.*

1323. Détermination du vecteur accélération.

1° *En coordonnées cartésiennes*, on a :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

donc :

$$\vec{\Gamma} = \mathbf{x}'' \cdot \vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}'' \cdot \vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}'' \cdot \vec{\mathbf{k}} \qquad (1323\,;1)$$

2° *En coordonnées polaire planes*, on a :

$$\vec{V} = r' \cdot \vec{R} + r\theta' \cdot \vec{C}$$

D'où :

$$\vec{\Gamma} = r'' \cdot \vec{R} + r' \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} + r'\theta'\vec{C} + r\theta''\vec{C} + r\theta' \cdot \frac{d\vec{C}}{dt}$$

$$= r''\vec{R} + r' \cdot \frac{d\vec{R}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r'\theta'\vec{C} + r\theta''\vec{C} + r\theta' \cdot \frac{d\vec{C}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r'' \cdot \vec{R} + r'\theta' \cdot \vec{C} + r'\theta'\vec{C} + r\theta''\vec{C} - r\theta'^2\vec{R}$$

et finalement :

$$\vec{\Gamma} = [\mathbf{r}'' - \mathbf{r}\theta'^2] \cdot \vec{\mathbf{R}} + [2\mathbf{r}'\theta' + \mathbf{r}\theta''] \cdot \vec{\mathbf{C}} \qquad (1323\,;2)$$

On pose :

$$\gamma_r = \gamma_\theta = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}\theta'^2 \qquad (1323\,;3)$$

$$\gamma_p = \gamma_{\theta+\frac{\pi}{2}} = 2\mathbf{r}'\theta' + \mathbf{r}\theta'' \qquad (1323\,;4)$$

γ_r *est l'accélération radiale.*

γ_p *est l'accélération de circulation.*

1324. Mouvement accéléré. Mouvement retardé.

Un mouvement est accéléré si la norme du vecteur vitesse, $\|\vec{V}\|$, croît; si cette norme décroît le mouvement est retardé.

Pour étudier la nature d'un mouvement, on doit donc étudier les variations de $\|\vec{V}\|$; cela se fait par l'intermédiaire de $\vec{V}^2 = \|\vec{V}\|^2$.

On a :

$$\frac{d(\vec{V})^2}{dt} = 2 \cdot \|\vec{V}\| \cdot \frac{d(\|\vec{V}\|)}{dt} = 2 \cdot \vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$$

D'où :

$$\frac{d(\|\vec{V}\|)}{dt} = \frac{\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}}{\|\vec{V}\|}$$

Si $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ est positif, le mouvement est accéléré.

Si $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ est négatif, le mouvement est retardé.

Ou encore, puisque $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = \|\vec{V}\| \cdot \|\vec{\Gamma}\| \cdot \cos\theta$ avec $\theta = \text{angle}(\vec{V}; \vec{\Gamma})$:

Si l'angle θ est aigu, le mouvement est accéléré.
Si l'angle θ est obtus, le mouvement est retardé.

Si $\|\vec{V}\|$ reste contante, le mouvement est dit uniforme.

CHAPITRE C

ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS

1325. Mouvement rectiligne uniforme.

1° Un point M se déplace sur un axe $x'Ox$; son abscisse x est donnée en fonction de la date t par l'équation horaire

$$x = at + b \qquad (1325;1)$$

a et b étant des constantes.

La vitesse du point est :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ou

$$v = a \qquad (1325;2)$$

Donc :

Le mouvement rectiligne d'équation horaire* $x = at + b$, *a une vitesse constante.

On lui donne le nom de *mouvement rectiligne uniforme.*

L'accélération est

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

ou

$$\gamma = 0. \qquad (1325;3)$$

Et :

L'accélération d'un mouvement rectiligne uniforme est nulle.

Le diagramme du mouvement, c'est-à-dire la courbe représentative de l'équation horaire, *est une droite.*

2° A la date $t = 0$, le mobile est au point A de l'axe $x'Ox$ ayant pour abscisse $\overline{OA} = x_0 = b$; à cette date la vitesse est évidemment $v_0 = a$, et l'équation horaire du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{x = v_0 \cdot t + x_0} \qquad (1325;\ 4)$$

Cette forme de l'équation donne la signification des coefficients.

3° Soit maintenant un point se déplaçant sur l'axe $x'Ox$ de telle façon que sa vitesse soit une constante a.

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = a.$$

D'où : $x = at + b$.

b est alors l'abscisse du mobile à la date $t = 0$.

Donc :

***Si un mouvement rectiligne est uniforme, son équation horaire est de la forme* $\mathbf{x = at + b}$.**

4° Soit encore un point se déplaçant sur l'axe $x'Ox$ de telle façon que son accélération soit nulle.

On a donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 0.$$

D'où : $v = a$

a étant une constante, et le mouvement est uniforme (cf. 3°).

Donc :

Si l'accélération d'un mouvement rectiligne est nulle, le mouvement est uniforme.

1326. Mouvement rectiligne uniformément varié.

1° Un point M se déplace sur un axe $x'Ox$; son abscisse x est donnée en fonction de la date t par l'équation horaire

$$x = at^2 + bt + c \qquad (1326;\ 1)$$

a, b, c étant des constantes ($a \neq 0$). Un tel mouvement est appelé un mouvement rectiligne uniformément varié.

La vitesse du point est

$$\mathbf{v = \frac{dx}{dt} = 2at + b} \qquad (1326;\ 2)$$

Donc :

La vitesse d'un mouvement rectiligne uniforme varié est une fonction affine de la date.

Le mobile s'arrête si $v = 0$; donc il s'arrête à la date $t = -\frac{b}{2a}$; son abscisse est alors $-\frac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'accélération est

$$\gamma = \frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}} = \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{2a} \qquad (1326;3)$$

Donc :

L'accélération d'un mouvement rectiligne uniformément varié est constante.

Le diagramme du mouvement, c'est-à-dire la courbe représentative de l'équation horaire, est une parabole.

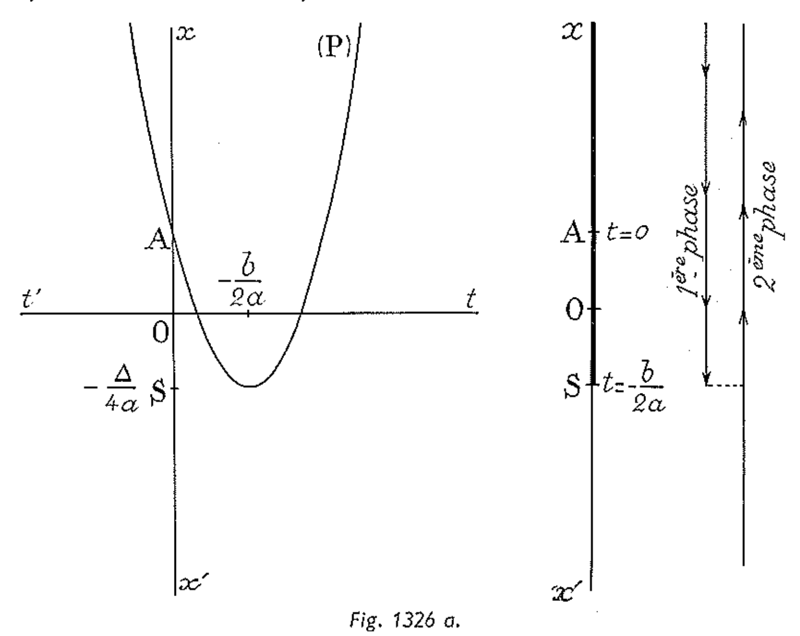


Fig. 1326 a.

Le mouvement se décompose en deux phases; dans la première phase $\left(t < -\frac{b}{2a}\right)$ le mouvement est retardé (fig. 1326 *a*, *b*), dans la seconde phase $\left(t > -\frac{b}{2a}\right)$ le mouvement est accéléré.

2° A la date $t = 0$, le mobile est au point A de l'axe, ayant pour abscisse $\overline{OA} = x_0 = c$; à cette date la vitesse est $v_0 = b$, et l'accélération est évidemment $\gamma = 2a$.

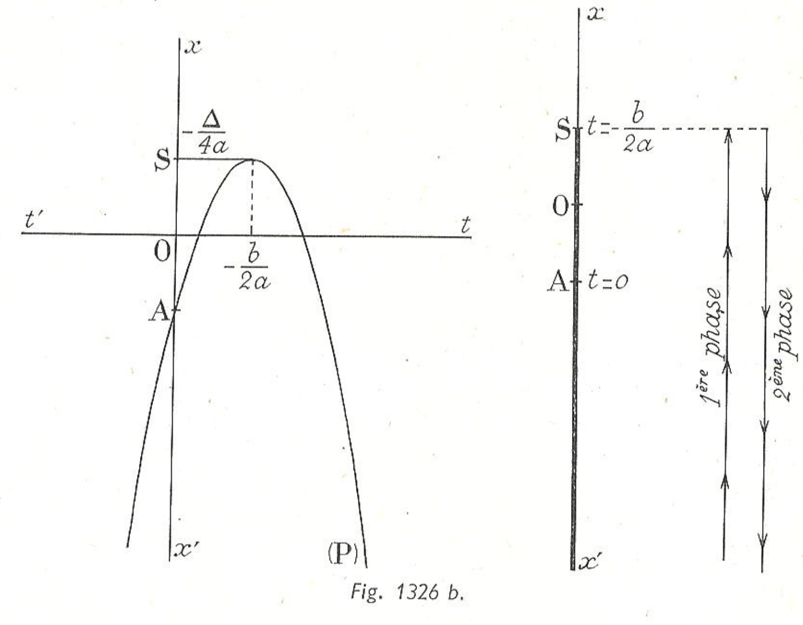


Fig. 1326 b.

L'équation horaire du mouvement s'écrit alors

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\gamma\mathbf{t}^2 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t} + \mathbf{x}_0 \qquad (1326\,;\,4)$$

on a aussi

$$\mathbf{v} = \gamma\mathbf{t} + \mathbf{v}_0 \qquad (1326\,;\,5)$$

Ces équations donnent la signification des coefficients.

3° De ces relations on déduit :

$$x - x_0 = t\left(\frac{1}{2}\gamma t + v_0\right)$$

et

$$v - v_0 = \gamma t$$

D'où :

$$x - x_0 = \frac{v - v_0}{\gamma} \cdot \left[\frac{v - v_0}{2} + v_0\right]$$

$$= \frac{v - v_0}{\gamma} \cdot \frac{v + v_0}{2}$$

D'où la formule

$$\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2 = 2\gamma \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \qquad (1326;6)$$

4° Soit maintenant un point se déplaçant sur l'axe $x'Ox$ de telle façon que sa vitesse soit une fonction affine de la date.

On a donc :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha t + \beta;$$

par suite :

$$x = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

Et :

Si la vitesse d'un mouvement rectiligne est une fonction affine de la date le mouvement est uniformément varié.

5° Soit encore un point se déplaçant sur l'axe $x'Ox$ de telle façon que son accélération soit constante.

On a donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = k;$$

Par suite :

$$v = kt + h.$$

Et, d'après 4°,

Si l'accélération d'un mouvement rectiligne est constante non nulle le mouvement est uniformément varié.

1327. Mouvements circulaires.

1° Soit un cercle (C), de centre O et de rayon R; le demi-axe Ox le coupe au point I pris comme origine des abscisses curvilignes (fig. 1327 *a*).

Un point M de (C) est repéré par son angle polaire

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox; \overrightarrow{OM}) = \theta, \quad \text{mod } 2\pi \qquad (1327;1)$$

et on a :

$$\overline{\textbf{arc}}\, \boldsymbol{IM} = \mathbf{s} = \boldsymbol{R\theta} \qquad (1327;2)$$

Le point M se déplace sur (C); son mouvement est donné par son abscisse curviligne s, ou par son angle polaire θ, en fonction de la date t.

Un tel mouvement est un mouvement circulaire.

2° La vitesse du mouvement est (cf. n° 1321 ; 3°) :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

et

$$\vec{V} = \vec{v} \cdot \mathbf{t}, \qquad (1327;\ 3)$$

$\vec{t}$ étant le vecteur unitaire de la tangente en M au cercle (C).

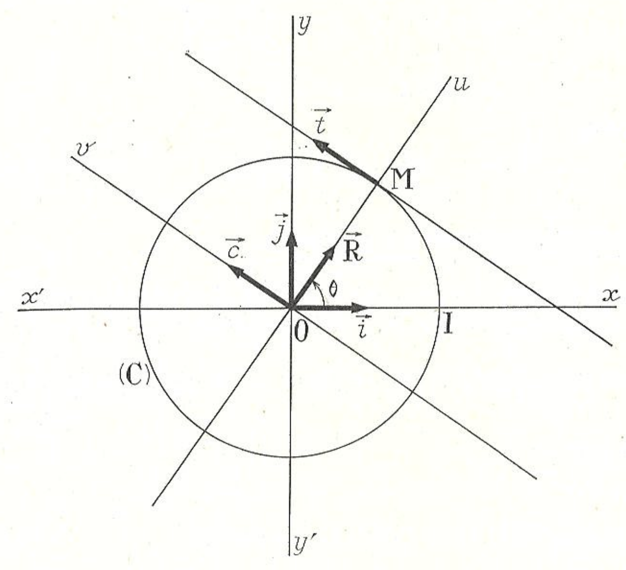


Fig. 1327 a.

3° On a aussi (cf. n° 1321 ; 2°) :

$$\overrightarrow{OM} = R \cdot \vec{R}$$

D'où :

$$V = R \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$= R \cdot \frac{d\vec{R}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

ou

$$\vec{V} = R\omega \cdot \vec{c} \qquad (1327;\ 4)$$

avec

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta'$$

comme $\vec{t} = \vec{c}$; on a donc :

$$v = R\omega \qquad (1327;5)$$

L'accélération est

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(R\theta \cdot \vec{C})}{dt} = R \cdot \frac{d(\theta' \vec{c})}{dt}$$

$$= R\left[\theta'' \cdot \vec{C} + \theta' \cdot \frac{d\vec{C}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= R\left[\theta'' \vec{C} - \theta'^2 \cdot \vec{R}\right]$$

et finalement

$$\vec{\Gamma} = -R\theta'^2 \cdot \vec{R} + R\theta'' \vec{C} \qquad (1327;6)$$

1328. Mouvement circulaire uniforme.

1° Un mouvement circulaire est uniforme si la vitesse v est constante, donc si la vitesse angulaire $\omega = \theta'$ est constante.

Et :

Un mouvement circulaire est uniforme si sa vitesse angulaire est constante.

2° On a alors :

$$\theta' = \omega \quad \text{et} \quad \theta'' = 0.$$

Les formules (1327; 4) et (1327; 6) deviennent

$$\vec{V} = R\omega\vec{t} \qquad (1328;1)$$

ou

$$\vec{V} = R\omega\vec{C} \qquad (1328;2)$$

et

$$\vec{\Gamma} = -R\omega^2\vec{R} \qquad (1328;3)$$

L'angle polaire θ du point M est tel que

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

et par suite

$$\theta = \omega t + \theta_0 \qquad (1328;4)$$

θ_0 *est l'angle polaire à la date* $t = 0$; il donne la position A du mobile à cette date $t = 0$.

3° Lorsque t varie de $\frac{2\pi}{\omega}$, l'angle polaire θ varie de 2π et le mobile

reprend la même position avec le même vecteur-vitesse et le même vecteur-accélération; on dit alors que *le mouvement est périodique* et de période

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \qquad (1328\,;\,5)$$

T est le temps mis par le mobile pour effectuer un tour.

La vitesse angulaire et la période sont donc liées par la relation

$$|\omega| = \frac{2\pi}{T} \qquad (1328\,;\,6)$$

On appelle fréquence N le nombre de tours effectués par le mobile pendant l'unité de temps.

On a donc :

$$N = \frac{1}{T}. \qquad (1328\,;\,7)$$

1329. Mouvement rectiligne sinusoïdal simple.

1° Un point M se déplace sur un axe $x'Ox$; son abscisse x est donnée en fonction de la date t par l'équation horaire :

$$\mathbf{x = a \,.\, \cos(\omega t + \varphi)} \qquad (1329\,;\,1)$$

a et ω étant des constantes positives, et φ une constante réelle quelconque

Un tel mouvement est appelé *mouvement rectiligne sinusoïdal simple*, ou *mouvement rectiligne vibratoire simple*.

Le point M se déplace sur $x'Ox$ entre les points $A'(-a)$ et $A(+a)$ (fig. 1329 *a*). Le point O est le ***centre*** du mouvement. Le nombre positif a est l'***amplitude*** du mouvement; c'est la distance maximum du mobile au centre O. L'abscisse x est l'***élongation*** du mobile.

x' A' O M A x

Fig. 1329 a.

L'expression $\omega t + \varphi$ est la ***phase*** du mouvement; φ est la phase à la date $t = 0$ ou ***phase initiale***.

Le diagramme du mouvement est une courbe sinusoïdale.

La vitesse du point est :

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

ou

$$\mathbf{v = -\,a\omega \sin(\omega t + \varphi)} \qquad (1329\,;\,2)$$

et l'accélération est :

$$\gamma = -\,\mathbf{a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)} \qquad (1329\,;\,3)$$

2° Lorsque la date t varie d'un multiple de $\frac{2\pi}{\omega}$, $\omega t + \varphi$ varie d'un multiple de 2π; et x, v, γ, reprennent les mêmes valeurs. On dit que le mouvement est périodique et de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (1329;4)$$

On a :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (1329;5)$$

On appelle fréquence N le nombre de périodes par unité de temps.

Donc :

$$N = \frac{1}{T}.$$

3° On peut supposer $\varphi = 0$ (changement de l'origine des dates); on a alors :

$$x = a \cos \omega t$$
$$v = - a\omega \sin \omega t$$
$$\gamma = - a\omega^2 \cos \omega t$$

Le mobile s'arrête si $v = 0$, c'est-à-dire si $t = 0$, mod $\frac{\pi}{\omega}$; donc il s'arrête en A et A'. On construit aisément le tableau suivant :

t	0		$\frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2\omega}$		$\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega}$		$\frac{3}{4}T = \frac{3\pi}{2\omega}$		$T = \frac{2\pi}{\omega}$
ωt	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
γ	$-a\omega^2$	$-$	0	$+$	$a\omega^2$	$+$	0	$-$	$-a\omega^2$
v	0	$-$ ↘	$-a\omega$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	$a\omega$	$+$ ↘	0
x	a	↘	0	↘	$-a$	↗	0	↗	a
$v\gamma$		$+$ accéléré		$-$ retardé		$+$ accéléré		$-$ retardé	

4° Le schéma suivant donne la description du mouvement pendant la période [0; T]; cette partie du mouvement est une *oscillation complète.*

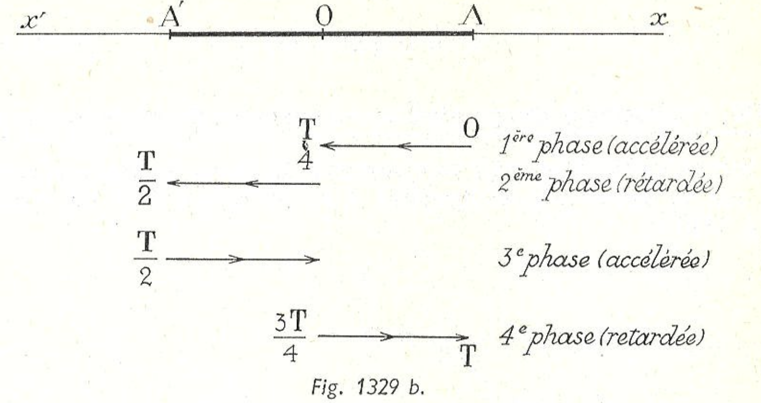


Fig. 1329 b.

5° Des expressions (1329; 3) et (1329;1) de γ et x on déduit :

$$\gamma = -\omega^2 \mathbf{x} \qquad (1329\,;\,6)$$

Cette relation montre que l'accélération $\vec{\Gamma}$ du mouvement est toujours dirigée vers le centre O.

La relation (1329; 6) précédente est caractéristique du mouvement sinusoïdal simple.

En effet :

$$\frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}} + \omega^2\mathbf{x} = 0 \qquad (1329\,;\,7)$$

est une équation différentielle, admettant la solution

$$x = \mathrm{A}\cos\omega t + \mathrm{B}\sin\omega t$$

ou

$$x = a\cos(\omega t + \varphi)$$

6° Des expressions (1329;1) et (1329;2) de x et v, on tire :

$$\cos(\omega t + \varphi) = \frac{x}{a}$$

et

$$\sin(\omega t + \varphi) = -\frac{v}{a\,\omega}.$$

D'où :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(-\frac{v}{a\,\omega}\right)^2 = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2\omega^2} = 1$$

et

$$\mathbf{v}^2 = \omega^2(\mathbf{a}^2 - \mathbf{x}^2) \qquad (1329;\ 8)$$

1330. Projection orthogonale d'un mouvement circulaire uniforme

Soit un mobile M animé d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω sur le cercle (C) de diamètre A'A, de centre O et de rayon a (fig. 1330 a).

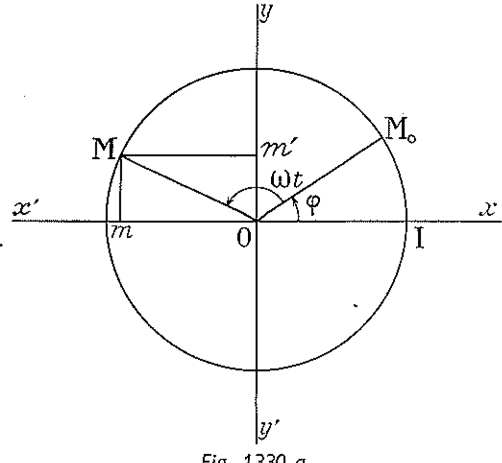


Fig. 1330 a.

M_0 étant la position du mobile à la date $t = 0$, avec

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\ \overrightarrow{OM_0}) = \varphi$$

sa position à la date t est définie par l'angle polaire

$$\theta = \overline{\text{angle}}\,(Ox;\ \overrightarrow{OM})$$
$$= \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{Ox};\ \overrightarrow{OM_0}) + \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{OM_0};\ \overrightarrow{OM})$$

ou

$$\theta = \omega t + \varphi.$$

Le mouvement de la projection m *du point M sur l'axe* x'Ox *est un mouvement dont l'équation horaire est*

$$\overline{Om} = x = a\cos(\omega t + \varphi);$$

c'est donc un mouvement vibratoire simple.

Le mouvement de la projection m' du point M sur l'axe y'Oy est un mouvement dont l'équation horaire est

$$\overline{Om'} = y = a \sin(\omega t + \varphi)$$

c'est aussi un mouvement vibratoire simple.

1331. Mouvement rectiligne d'équation $x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta)$.

1° Un point M se déplace sur l'axe $x'Ox$ et son équation horaire est :

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\omega t + \beta)$$

On a :

$$x = a \cos \omega t \cos \alpha - a \sin \omega t \sin \alpha + b \cos \omega t \cos \beta - b \sin \omega t \sin \beta$$
$$= (a \cos \alpha + b \cos \beta) \cos \omega t - (a \sin \alpha + b \sin \beta) \sin \omega t$$

Ou, en posant $P = a \cos \alpha + b \cos \beta$ et $Q = (a \sin \alpha + b \sin \beta)$:

$$x = P \cos \omega t - Q \sin \omega t$$

Et *le mouvement du point M est un mouvement sinusoïdal simple.*

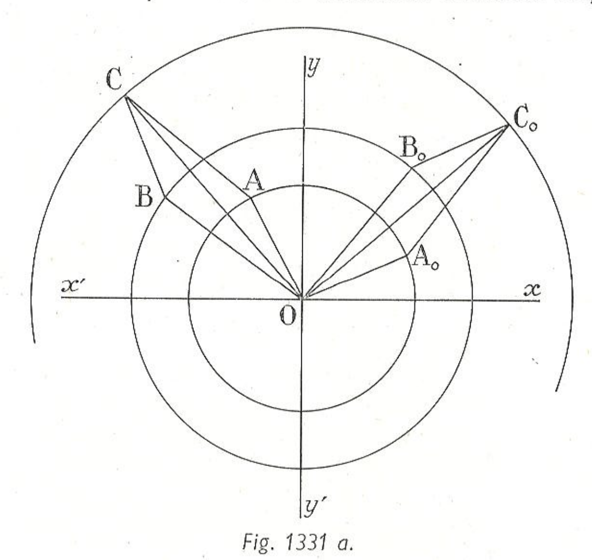


Fig. 1331 a.

2° On peut préciser ce mouvement.

Soient les points A_0 et B_0 donnés en coordonnées polaires par (fig. 1331 *a*) :

$$A_0\,(\alpha;\, a) \qquad B_0\,(\beta;\, b)$$

Soit le point C_0 de coordonnées

$$[P = a \cos \alpha + b \cos \beta ; Q = (a \sin \alpha + b \sin \beta)];$$

en remarquant que les coordonnées cartésiennes de A_0 et B_0 sont :

$$A_0 \begin{vmatrix} a \cos \alpha \\ a \sin \alpha \end{vmatrix} \qquad B_0 \begin{vmatrix} b \cos \beta \\ b \sin \beta \end{vmatrix}$$

on a :

$$\overrightarrow{OC_0} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0}$$

On pose :

$$\gamma = \overline{\text{angle}} \, (\overrightarrow{Ox} ; \overrightarrow{OC_0})$$

et

$$\|\overrightarrow{OC_0}\| = c$$

On a alors :

$$P = c \cdot \cos \gamma$$
$$Q = c \cdot \sin \gamma$$

D'où :

$$x = c \cos \gamma \cos \omega t - c \sin \gamma \sin \omega t$$

ou

$$x = c \cdot \cos (\omega t + \gamma)$$

3° Si A et B sont animés de mouvements circulaires uniformes de vitesse angulaire ω sur les cercles (0; a) et (0; b), on a :

$$\overline{\text{angle}} \, (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = (\omega t + \beta) - (\omega t + \alpha)$$
$$= \beta - \alpha.$$

Cet angle est constant; le parallélogramme, OACB tourne autour de O sans se déformer, et le point C est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω sur le cercle (O; c).

La projection sur $x'Ox$ est le mouvement étudié. La construction du vecteur $\overrightarrow{OC}$ est la *construction de Fresnel.*

1332. Mouvement elliptique.

Le point M se déplace dans le plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ (fig. 1332 a) :

Le mouvement est déterminé par :

$$\overrightarrow{OM} \begin{vmatrix} x = a \cos \omega t \\ y = b \sin \omega t \end{vmatrix} \qquad (\omega > 0)$$

La *trajectoire* est donnée par :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

C'est donc une ellipse (E).

La *vitesse* $\vec{V}$ a pour coordonnées

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = - a\,\omega \sin \omega t \\ \dfrac{dy}{dt} = b\,\omega \cos \omega t \end{array} \right.$$

et *l'accélération* $\vec{\Gamma}$ a pour coordonnées

$$\vec{\Gamma} \left| \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = - a\,\omega^2 \cos \omega t = - \omega^2 x \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = - b\,\omega^2 \sin \omega t = - \omega^2 y \end{array} \right.$$

Par suite :

$$\vec{\Gamma} = - \omega^2 \cdot \overrightarrow{OM}$$

Le mouvement est périodique, de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

1333. Mouvement hélicoïdal uniforme.

Le point M se déplace dans l'espace rapporté à trois axes orthonormés, $x'Ox$, $y'Oy$ et $z'Oz$.

Le mouvement est déterminé par :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = h\,\omega\,t \end{array} \right.$$

La *trajectoire* est donc une hélice circulaire.

Si *m est la projection de* M sur le plan xOy, ce point m est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

Si *H est la projection de* P sur l'axe $z'Oz$, ce point H est animé d'un mouvement uniforme de vitesse $h\,\omega$.

Le *vecteur-vitesse* du point M est :

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t \\ \dfrac{dy}{dt} = a\omega \cos \omega t \\ \dfrac{dz}{dt} = h\omega \end{array} \right.$$

et son *vecteur-accélération* est

$$\vec{\Gamma} \left| \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{array} \right.$$

Par suite : $$\vec{\Gamma} = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{MH}$$

1334. Mouvement à accélération constante.

Soit un point M qui se déplace dans l'espace de telle façon que son vecteur-accélération soit constant :

$$\vec{\Gamma} = \vec{C}$$

De plus à la date $t = 0$, le mobile est en O et son vecteur-vitesse est $\vec{V_0}$.

On rapporte l'espace à trois axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$; l'axe $z'Oz$ est parallèle au vecteur $\vec{C}$; on a $\vec{C} = a\vec{k}$;

L'axe $x'Ox$ est choisi de manière que le vecteur soit dans le plan xOz, avec :

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox\,;\vec{V}) = \alpha \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$\left\|\vec{V_0}\right\| = v_0$$

Pour des raisons de symétrie évidentes le mouvement a lieu dans le plan xOz.

L'égalité

$$\vec{\Gamma} = \vec{C}$$

se traduit par

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = a \end{array} \right.$$

D'où :

$$\vec{V}\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = a_1\\ \dfrac{dz}{dt} = at + b\end{cases}$$

Et

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases}x = a_1 t + b_1\\ z = \dfrac{1}{2}at^2 + bt + c\end{cases}$$

A la date $t = 0$: $x = 0$, donc $b = 0$;
et $y = 0$, donc $c = 0$.

De même à la date $t = 0$, $\dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha$ donc $a_1 = v_0 \cos\alpha$
et

$$\frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha \quad \text{donc} \quad b = v_0 \sin\alpha$$

Finalement :

$$\begin{cases}x = v_0\, t \cos\alpha\\ z = \dfrac{1}{2}a\,t^2 + v_0 t \sin\alpha\end{cases}$$

La projection du mouvement sur l'axe $x'Ox$ est un mouvement uniforme; la projection du mouvement sur l'axe $z'Oz$ est un mouvement uniformément varié.

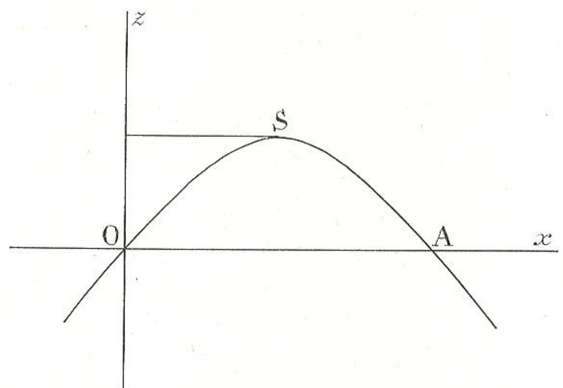


Fig. 1334 a.

La trajectoire est une parabole (fig. 1334 a), d'équation :

$$z = \frac{1}{2}a\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + \frac{v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha}\cdot x$$

ou

$$z = \frac{a}{2v_0^2} \frac{x^2}{\cos^2\alpha} + x \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

ou encore

$$z = \frac{a}{2v_0^2}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) \cdot x^2 + x \operatorname{tg}\alpha.$$

Remarque. Evidemment si $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, le mouvement est un mouvement uniformément varié sur l'axe $z'Oz$.

CHAPITRE CI

CINÉMATIQUE DU SOLIDE

1335. Solide.

On appelle solide un ensemble de points dont les distances mutuelles sont invariantes lorsque la date varie.

Un solide Σ peut être assimilé à un trièdre orthonormé $Oxyz$ ou (T).

La position de ce trièdre (T) par rapport à un trièdre orthonormé fixe $O_1x_1y_1z_1$ ou (T_1) détermine la position du solide Σ.

Donc :

La cinématique du solide Σ se confond avec la cinématique du trièdre (T).

1336. Théorème fondamental de la cinématique du solide.

Soit un solide Σ en mouvement par rapport à un trièdre (T_1).

Soient deux points quelconques A et B de Σ; quelle que soit la date t, on a :

$$\overrightarrow{AB}^2 = C$$

C étant une constante.

En dérivant par rapport à la date t, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\,(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0$$

Or :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

et

$$\frac{d\,(\overrightarrow{AB})}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\,\overrightarrow{OA}}{dt}$$

$$= \overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}$$

Par suite :

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}) = 0$$

ou

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_B} \qquad (1336;\,1)$$

1337. Mouvement de translation d'un solide[1].

1° *Définition.*

On dit que le mouvement d'un solide Σ est un mouvement de translation si pendant le mouvement un vecteur quelconque de l'espace mobile lié à Σ reste équipollent à lui-même.

2° *Trajectoires des points du solide.*

La propriété précédente définit parfaitement le mouvement du solide dès que l'on connaît le mouvement d'un de ses points.

Si M est un point du solide, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ reste équipollent à lui-même; et la trajectoire de M se déduit de la trajectoire de O par la translation $t_{\overrightarrow{OM}}$.

Donc :

Dans un mouvement de translation d'un solide, les trajectoires de tous les points du solide sont des courbes équipollentes.

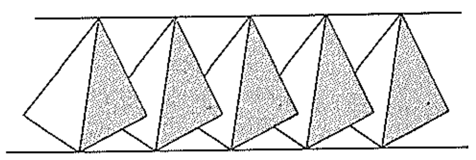


Fig. 1337 a.

Si les trajectoires sont rectilignes (fig. 1337 *a*), le mouvement est un *mouvement de translation rectiligne;* si elles sont circulaires (fig. 1137 *b*), elles sont égales, et le mouvement est un *mouvement de translation circulaire.*

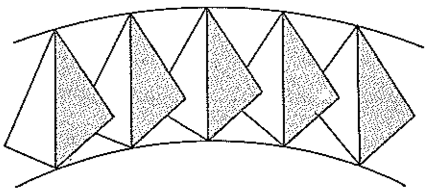


Fig. 1337 b.

3° *Vitesses et accélérations des points du solide.*

De l'égalité :

$$\overrightarrow{AB} = C$$

(1) L'étude des mouvements autre que le mouvement de translation est réservée à une classe ultérieure.

on déduit :

$$\frac{d(\overrightarrow{AB})}{dt} = 0$$

ou

$$\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A} = 0$$

ou

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} \qquad (1337;1)$$

En dérivant une seconde fois, on obtient

$$\vec{\Gamma}_A = \vec{\Gamma}_B \qquad (1337;2)$$

1338. Composition des mouvements.

1° Soient un trièdre orthonormé fixe (T_1) ou $O_1x_1y_1z_1$, les vecteurs unitaires étant $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et un trièdre orthonormé mobile (T) ou Oxyz, les vecteurs unitaires étant $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (fig. 1338 *a*).

On considère un point M en mouvement par rapport à (T); en général M est en mouvement par rapport à (T_1).

On est alors conduit à poser le problème suivant :

Étant donné les mouvements de (T) par rapport à (T_1), et de M par rapport à (T), trouver le mouvement de M par rapport à T_1.

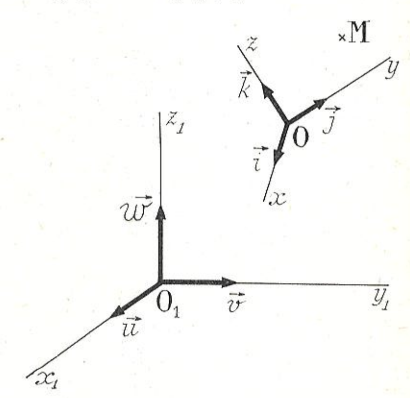


Fig. 1338 a.

2° Le mouvement de M par rapport à (T) est le *mouvement relatif.*

Le mouvement de M par rapport à (T_1) est le *mouvement absolu.*

Le mouvement de T par rapport à (T_1) est le *mouvement d'entraînement.*

3° Le point M est repéré dans le trièdre mobile (T) par

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

La vitesse de M par rapport au trièdre (T) est appelée la *vitesse relative de M*, et on a :

$$\overrightarrow{V_r} = x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k} \qquad (1338;2)$$

De même, l'accélération de M par rapport au trièdre (T) est *l'accélération relative de M*, et on a :

$$\vec{\Gamma_r} = x'' \cdot \vec{i} + y'' \cdot \vec{j} + z'' \cdot \vec{k} \qquad (1338;2)$$

4° La vitesse et l'accélération de M par rapport au trièdre fixe (T_1) sont appelée *vitesse absolue et accélération absolue de M*.

On a :

$$\vec{V_a} = \frac{d\,(\overrightarrow{O_1M})}{dt} \qquad (1338;3)$$

$$\Gamma_a = \frac{d^2\,(\overrightarrow{O_1M})}{dt^2}$$

5° A une date t, le point M occupe dans le trièdre (T) une position P fixée au trièdre (T); le point P de (T) est appelé le point coïncidant avec M dans (T) à la date t.

On a alors :

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O} + x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

x, y, z étant ici des constantes puisque P est fixé à (T).

La vitesse et l'accélération de P par rapport à (T_1) sont la *vitesse et l'accélération d'entraînement.*

On a :

$$\vec{V_e} = \frac{d\,(\overrightarrow{O_1P})}{dt} = \vec{V_o} + x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \qquad (1338;5)$$

et

$$\vec{\Gamma_e} = \frac{d^2\,(\overrightarrow{O_1P})}{dt^2} \qquad (1338;6)$$

1339. Composition des vitesses.

Soit un point M en mouvement par rapport à (T). On a :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

En dérivant on obtient le vecteur-vitesse absolue :

$$\vec{V_a} = \left[\vec{V_0} + x \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\vec{k}}{dt}\right] + \left[x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}\right]$$

Le premier crochet n'est autre que le vecteur vitesse d'entraînement $\vec{V_e}$; le second crochet est le vecteur vitesse relative. Donc :

$$\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r} \qquad (1339;1)$$

Et :

Le vecteur vitesse absolue d'un point mobile à un instant est la somme du vecteur vitesse d'entraînement et du vecteur vitesse relative.

1340. Composition des accélérations.

On suppose maintenant que le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

Les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ restent équipollents à eux-mêmes; donc

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$$

Par suite :

$$\vec{V}_e = \vec{V}_0$$

Et :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_0 + x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} + z' \cdot \vec{k}$$

En dérivant on obtient :

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_0 + x'' \vec{i} + y'' \vec{j} + z'' \vec{k}$$

ou

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_0 + \vec{\Gamma}_r$$

Or $\Gamma_e = \Gamma_0$; d'où finalement :

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r \qquad (1340;1)$$

Il faut insister sur le fait que cette formule n'est vraie que pour un mouvement d'entraînement de translation.

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE XI

Cinématique du point.

Étudier les mouvements rectilignes suivants :

2073. $x = 2t^2 - t - 1.$

2074. $x = t^2 + 2t - 1.$

2075. $x = t^3 (t - 3) (t - 4).$

2076. $x = t^4 - 2t^3 - 8.$

2077. $x = \dfrac{3t - 2}{t^3} \qquad (t > 0).$

2078. $x = - 4t^3 + 3t.$

2079. $x = t^2 (2 - t).$

2080. $x = t - 5 + \dfrac{4}{t} \qquad (t > 0).$

2081. $x = \cos 2t + 2 \cos \left(2t + \dfrac{2\pi}{3}\right).$

2082. $x = a \sin \omega t + a \sin \left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right).$

2083. $x = 2 \cos t + \cos \left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right).$

2084. $x = 3 + 6 \sin^2 t.$

2085. $x = a \cos \left(t + \dfrac{\pi}{4}\right).$

2086. $x = \cos 2t + 2 \cos \left(2t - \dfrac{2\pi}{3}\right).$

2087. $x = 2 + \sin \left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right).$

2088. $x = 1 + \sin^2 \left(t - \dfrac{\pi}{3}\right).$

Mouvements divers.

2089. Étudier le mouvement d'un point M dans le plan orthonormé, défini par :

$$\begin{cases} x = 6 - 2t \\ x = 3 + 8t - 4t^2 \end{cases}$$

2090. Étude du mouvement plan défini par :

$$\begin{cases} x = - 2. \operatorname{Log} t \\ y = t^2 \end{cases}$$

2091. Mouvement plan d'équations :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t^2 - 2t + 1. \end{cases}$$

2092. Mouvement plan défini par :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3t^2 + 2t - 1. \end{cases}$$

2093. Étudier le mouvement plan donné par :

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \\ y = a \cos(\pi t). \end{cases}$$

2094. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération du mouvement donné par :

$$\begin{cases} x = 3(t + \cos 2t) \\ y = 3(t + \sin 2t) \\ z = 6t. \end{cases}$$

2095. Étudier le mouvement défini par :

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$$

Tracer l'hodographe.

2096. Étudier le mouvement suivant :

$$x = 5 - 22 \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right) + 70 \cos 3t.$$

2097. Les coordonnées de M par rapport à deux axes othonormés sont :

$$x = 2t - 3 \cos t$$
$$y = t + 3 \sin t$$

Étudier les vecteurs vitesse et accélération. Hodographe du mouvement.

2098. Montrer par une méthode algébrique ou graphique que le mouvement rectiligne dont l'équation horaire est :

$$x = 3 \cdot \cos \frac{2\pi t}{5} + 4 \cos\left(\frac{2\pi t}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

est un mouvement sinusoïdal simple. Quels en sont les éléments : amplitude, période, fréquence, phase ?

2099. Étudier le mouvement rectiligne d'équation

$$x = 2a \cos(\omega t + \pi) + a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

où a est une constante positive.

2100. Étudier le mouvement rectiligne défini par l'équation horaire :

$$x = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} t - \sin \frac{\pi}{4} t$$

2101. 1° Trouver l'équation horaire d'un mouvement rectiligne dont la vitesse en fonction de la date est :

$$v = 3t^2 - 3$$

sachant que l'abscisse du mobile s'annule à la date $t = 2$.

2° Étudier le mouvement.

2102. Déterminer un mouvement rectiligne uniformément varié sachant que l'abscisse, x, du mobile est égale à 1 à la date $t = 1$, à 2 à la date $t = 2$ et à 4 à la date $t = 3$.

Comparer les vitesses moyennes du mobile entre les dates $t = 1$, $t = 2$, et les dates $t = 0$, $t = 4$.

Quelle relation doit-il y avoir entre deux dates t_1 et t_2 pour que la vitesse moyenne entre ces deux dates soit la même que pour les deux couples ($t = 1$; $t = 2$) et ($t = 0$; $t = 4$).

2103. Étudier le mouvement du point M défini dans le plan par :

$$M \begin{cases} x = \operatorname{Log} t \\ y = t + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Étudier l'hodographe.

2104. Étudier le mouvement plan défini par :

$$M \left| \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3. \end{array} \right.$$

Problèmes.

2105. Soit une parabole (P). On appelle O le sommet, Ox l'axe, Oy la tangente au sommet, p le paramètre, F le foyer, D la directrice, A la projection de O sur D. Un point M se déplace sur (P) de telle manière que sa projection H sur D ait un mouvement uniforme de vitesse p et se trouve en A à la date $t = 0$.

1° Calculer les coordonnées x, y, de M à la date t, les projections de son vecteur vitesse $\overrightarrow{MV}$ et de son vecteur accélération $\overrightarrow{M\Gamma}$ sur les axes.

2° On fait tourner $\overrightarrow{MV}$ d'un angle droit autour de M, dans le sens de Oy vers Ox. Le point V vient en N. Démontrer que N est sur Ox. En déduire une propriété connue de la sous-normale de la parabole.

3° Soit r la distance FM. Démontrer que la vitesse v de M vaut $\sqrt{2pr}$.

4° On appelle $\dfrac{1}{h}$ le temps que mettrait un point pour parcourir le segment AF d'un mouvement uniforme ayant la vitesse v du point M au temps t. On pose :

$$t_1 = t + h, \qquad t_2 = t - h$$

et l'on appelle M_1 et M_2 les positions de M aux dates t_1 et t_2, v_1 et v_2 les vitesses correspondantes. Calculer la distance M_1M_2. En déduire que la corde M_1M_2 passe par F. Démontrer que

$$v_1^2 + v_2^2 = 4v^2$$

et que $\overrightarrow{M_1V_1}$ et $\overrightarrow{M_2V_2}$ sont orthogonaux.

5° Soit I le milieu de M_1M_2. On appelle K la position de M à la date $2t$. Démontrer que I est l'image de K dans une homothétie de centre et de rapport fixes, que l'on déterminera. En déduire la trajectoire de I.

6° On appelle Q le point de rencontre de D avec la tangente en M à (P). Calculer son ordonnée Y et sa vitesse w. Vérifier que $v^2 = 4wx$. Démontrer que les points Q_1 et Q_2 correspondant à M_1 et M_2 sont tous deux en H et que FH est perpendiculaire à M_1M_2.

2106. On considère deux cercles orthonormaux fixes (I) (J) de centres I et J se coupant en A et B. Une sécante mobile passant par B coupe le cercle (I) en P et le cercle (J) en Q. On suppose que le point P est animé d'un mouvement uniforme sur le cercle (I).

1° Comparer les angles (IA; IP) et (JA; JQ) et en déduire la nature du mouvement du point Q.

2° Montrer que le triangle APQ reste semblable à lui-même et que le milieu R du segment PQ est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

3° Montrer que les vitesses respectives u, v, w des points P, Q, R sont liées par la relation :

$$u^2 + v^2 = 4w^2 \qquad (1)$$

4° On suppose dans ce qui suit que u, v, w sont des nombres entiers positifs par la relation (1). Calculer u et w en supposant $v = 6$ ou $v = 30$. On montrera d'abord que u est pair et l'on posera $u = 2u'$.

5° Calculer u et w lorsque v est égal au double d'un nombre premier impair donné p.

2107. 1° On considère la fonction $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$. Étudier ses variations. Tracer la courbe représentative; points et tangente remarquables.

En déduire la résolution et la discussion graphique de l'équation en x :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = a,$$

où a est un nombre donné.

2° On pose $x = \cos t$, en supposant t compris entre 0 et π. Exprimer y en fonction de t. En passant par l'intermédiaire de la variable t, étudier les variations de y en fonction de x et résoudre l'équation du 1°.

3° En supposant que t représente la date, les expressions de x et y en fonction de t définissent le mouvement d'un mobile. Étudier ce mouvement dans l'intervalle de temps $[0; \pi]$: trajectoire, déplacement du mobile sur la trajectoire, vecteur-vitesse, vecteur-accélération, hodographe par rapport à l'origine des coordonnées, nature de cet hodographe.

2108. Les coordonnées d'un point mobile M, par rapport à des axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ sont :

$$x = \cos t - \sin t$$
$$y = \cos t + \sin t$$

a) Former l'équation de la trajectoire. Nature de cette trajectoire.

b) On suppose la trajectoire orientée dans le sens direct, et l'on choisit pour origine des arcs la position du mobile à la date $t = 0$.

Calculer la vitesse v et la vitesse angulaire w.

Former l'équation horaire du mouvement.

Calculer l'accélération et construire le vecteur-accélération à la date t.

2109. 1° On donne deux cercles (C), (C′), de centres C et C′, de rayons R et R′, (C′) étant intérieur à (C).

Soit (K) un cercle, de centre M, tangent à (C) en P et à (C′) en P′. Montrer que la droite PP′ passe par l'un ou l'autre des deux points fixes, S_1 et S_2.

Trouver le lieu géométrique (E_1) des centres des cercles (K_1) pour lesquels PP′ passe par S_1, et le lieu géométrique (E_2) des centres des cercles (K_2) pour lesquels PP′ passe par S_2.

2° On suppose maintenant que les cercles (C) et (C′) sont tangents intérieurement et que $R = 3R'$.

Que deviennent les cercles (K_1) et (K_2), ainsi que les lieux (E_1) et (E_2) ? Montrer que l'un d'eux est une ellipse (E), dont on construira les foyers, les sommets et les directrices.

3° On rapporte le plan aux axes orthonormés Cx, Cy, d'origine C, le point C' ayant, sur l'axe Cx, une abscisse positive. Quelle relation doit lier les coordonnées x, y d'un point M pour qu'il appartienne à la courbe (E) ?

Exprimer les coordonnées x, y en fonction de l'angle u, compris entre $-\pi$ et $+\pi$, des demi-droites Cx et CM :

$$u = \overline{\text{angle}}\ (\overrightarrow{Cx};\ \overrightarrow{CM}).$$

4° Le point M décrit (E) de façon que la demi-droite CM soit animée d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire égale à $+1$. Décrire le mouvement du point m, projection orthogonale de M sur Cx. Tracer le diagramme des abscisses, en supposant que $u = 0$ à l'origine $t = 0$ des temps.

En quels points de Cx la vitesse de m est-elle maximum ? Quel est alors le vecteur vitesse de M ?

2110. On considère, dans le plan rapporté à deux axes de coordonnées orthonormés Ox, Oy, un point M dont les coordonnées x et y sont données en fonction du temps t par les formules

$$x = 6 - 2t$$
$$y = 3 + 8t - 4t^2 \qquad (t \geqslant 0)$$

1° Construire la trajectoire du point mobile M.

2° Calculer les coordonnées du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération du point M. Construire ces deux vecteurs aux dates $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{5}{2}$.

2111. On donne dans un plan les deux axes orthonormés Ox, Oy et sur Ox, les deux points B $(-3h; 0)$ et C $(+3h; 0)$ h étant un nombre positif donné.

Une droite, confondue avec Ox à l'instant $t = 0$, tourne autour de B d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire donnée k positive. Une autre droite confondue avec Ox à l'instant $t = 0$, tourne autour de C d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire $-2k$.

1° Former, à l'instant t, les équations de ces deux droites et calculer les coordonnées de leur point d'intersection, A.

Montrer que ces coordonnées sont liées par une relation $f(x; y) = 0$, indépendante de t et de k.

2° Que devient cette relation lorsqu'on repère le point A dans le système de coordonnées (SX; SY) d'origine S $(-h; 0)$ déduit du système $(Ox; Oy)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OS}$.

En déduire que le lieu de A est une hyperbole (H), dont on placera les sommets, les foyers, les asymptotes et les directrices et dont on donnera la valeur de l'excentricité.

3° Montrer que, pour étudier géométriquement le lieu de A, on peut se borner à faire varier t de 0 à $\frac{\pi}{2k}$.

Examiner, dans cet intervalle, les mesures des angles du triangle ABC, en fonction de t. Pour quelle valeur de t les deux droites issues de B et C sont-elles parallèles ? H désignant la projection de A sur la médiatrice de BC évaluer dans chaque cas de figure le rapport $\frac{AH}{AC}$ et retrouver ainsi les résultats du 2°.

2112. Soient dans le plan deux axes orthonormés Ox, Oy.

Un mobile M se déplace sur Ox d'un mouvement uniformément varié. Son abscisse x est liée à la date t par la relation :

$$x = at^2 + bt + c \qquad (1)$$

Un mobile M′ se déplace sur l'axe parallèle à Ox d'équation $y = y_0$, $y_0 \neq 0$, d'un mouvement uniformément varié. Son abscisse x' est liée au temps t par la relation

$$x' = a't^2 + b't + c' \qquad (2)$$

On suppose, dans toute la suite, $a' \neq 0$.

1° Soit P le point qui partage $\overrightarrow{MM'}$ dans le rapport λ, $\lambda \neq 1$, c'est-à-dire le point P tel que $\overline{PM} = \lambda . \overline{PM'}$.

Démontrer :

a) que le point P se déplace sur la droite Δ d'équation $y = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot y_0$;

b) qu'il décrit en général Δ d'un mouvement uniformément varié, dont on donnera la vitesse et l'accélération.

Pour quelle valeur de λ le mouvement P est-il uniforme ? Donner alors la vitesse de P.

Quelle relation doit-il exister entre les coefficients a, b, a', b' pour que le point P soit fixe ?

2° On suppose $a \neq a'$ et $ab' - ba' \neq 0$ et l'on choisit $\lambda = \frac{a}{a'}$. On pose :

$$\beta = \frac{ab' - ba'}{a - a'} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{ac' - ca'}{a - a'}.$$

Exprimer l'abscisse ξ de P en fonction de t, β, γ.

Montrer qu'il existe une valeur et une seule, t_0, de t pour laquelle les vitesses de P et M′ sont équipollentes.

Soient A et A′ les positions respectives de P et M′ à la date t_0. On désigne par D un axe porté par la droite AA′ et par I le point d'intersection de D et de la droite PM′. Montrer que le produit $\overline{IA} \cdot \overline{AP}$ des mesures algébriques de $\overrightarrow{IA}$ sur D et de $\overrightarrow{AP}$ sur Ox est constant.

Quelle est l'enveloppe de la droite PM′ ?

2113. Un point M, mobile dans le plan, est repéré par ses coordonnées x et y relatives à des axes orthonormés. On donne

$$x = 2 \cdot \operatorname{Log} t$$
$$y = t + \frac{1}{t}.$$

Calculer en fonction du temps t, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ du point M.

Calculer $\|\vec{V}\| = v$.

En déduire la longueur de l'arc parcouru par M entre la date $t_0 = 2$ et la date t.

Quel est l'hodographe du mouvement.

Calculer les coordonnées du vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$.

2114. Étant donné un système d'axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, on considère un triangle isocèle AOB de sommet A, de périmètre constant $2p$, dont le sommet B se déplace sur le demi-axe positif Ox, le sommet A étant à l'intérieur du secteur angulaire $(Ox; Oy)$.

1° Quel est le lieu géométrique (C) du sommet A ? Calculer l'aire de la surface limitée par (C) et les demi-axes Ox et Oy.

2° Quel est le lieu de la projection orthogonale du sommet A sur la bissectrice intérieure de l'angle O du triangle AOB ?

3° Quel est le lieu de la projection orthogonale de A sur la bissectrice extérieure du même angle ? Quelle est l'équation de ce lieu ?

4° On pose $\overline{\text{angle}}(\overrightarrow{Ox}; \overrightarrow{OA}) = \rho$. Démontrer que l'aire du triangle OAB est :

$$S = p^2 \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}.$$

Étudier les variations de S en fonction de ρ et construire la courbe représentative. L'étude de la fonction sera faite en supposant que φ peut prendre toutes les valeurs; la courbe représentative sera construite en supposant $p = 2$ et on limitera à l'intervalle convenable.

5° On pose $\overline{OB} = x$; entre quelles limites peut varier x? On suppose alors que B décrit Ox d'un mouvement d'équation horaire

$$x = p \sin^2 t$$

Quelle est la nature de ce mouvement?

Déterminer l'équation et faire l'étude du mouvement correspondant de la projection orthogonale du point A sur Oy, A étant toujours astreint à rester dans le secteur angulaire (Ox, Oy) : Construire le diagramme avec $p = 2$.

2115. Soient deux cercles (C) et (C'), de centre O et O', de rayons respectifs 2 R et R $\sqrt{3}$, et tels que OO' = 3 R.

Un mobile M, décrit le cercle (C) d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire + 1; il part, à l'instant initial, du point A situé entre O et O', sur la droite OO'.

Un deuxième mobile, M', décrit le cerlcle (C') d'un mouvement uniforme de même vitesse angulaire et part, en même temps que le mobile M, du point A' tel que :

$$\overline{\text{angle}}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{O'A'}) = +\frac{\pi}{6}.$$

1° On prend deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$; l'axe $x'Ox$ contient le point O', le sens positif étant celui de O vers O'.

Calculer les coordonnées des mobiles M et M' à l'instant de date t et en déduire $z = MM'^2$.

Contrôler géométriquement le résultat dans les cas particuliers suivants :

$t = 0$, M et M' sont en A et A';

$t = \frac{\pi}{3}$, M et M' sont en B et B'.

Variation et représentation graphique de z lorsque les deux mobiles font leur premier tour; pour le graphique on pourra prendre R = 1 cm.

Trouver, lorsque R = 1 cm, l'aire S de la surface comprise entre la droite d'équation $z = 7$ et la partie du graphique obtenu située au-dessus de cette droite.

2° M' est l'image de la position M dans une similitude.

Montrer que le point F, centre de cette similitude, est le point d'intersection des supports des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{O'B'}$, B et B' étant les positions respectives de M et M' à la date $t = \frac{\pi}{3}$. Déterminer le rapport et l'angle de similitude.

Soit K le milieu de MM'. Démontrer que K est l'image de M' dans une similitude de centre F. En déduire le lieu de K.

Démontrer que l'enveloppe de la droite MM' est une hyperbole, que l'on déterminera. Quelle est son excentricité?

2116. 1° t étant un paramètre réel, exprimer la quantité

$$\delta = \sin^2 t - 2(1 - \cos t)$$

en fonction de $\sin \frac{t}{2}$. Quels sont les nombres appartenant aux corps des réels ou au corps des complexes, dont le carré est égal à δ ?

2° Discuter et résoudre l'équation

$$2u^2(1 - \cos t) - 2u \sin t + 1 = 0 \qquad (1)$$

où u est l'inconnue, réelle ou complexe. Préciser, suivant la valeur de $\sin \frac{t}{2}$, le module et l'argument de chaque solution de (1).

3° Dans toute la suite du problème, on suppose que t appartient à l'intervalle $[0; 2\pi]$; on appelle u' celle des solutions de (1) dont l'argument est $\frac{t}{2}$. Calculer $z = u'^2$, carré de cette solution : on donnera sa forme normale $z = x + iy$, son module r, son argument θ; établir la relation $r = x + \frac{1}{2}$.

4° Le paramètre t représente le temps et l'on considère le mouvement d'un mobile dont la position à l'instant de date t est le point m $(x; y)$, image du nombre complexe z précédent dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$.

Déterminer la trajectoire (T) du mouvement; indiquer les dates de passage aux points de (T) qui ont pour abscisse $\frac{1}{2}$; former l'équation cartésienne de (T).

5° On associe les positions m et m_1 relatives aux instants de dates $t \in [0; \pi]$ et $t_1 = t + \pi$.

Soient M et M_1 leurs inverses dans l'inversion de pôle O et de puissance 1. Évaluer les mesures algébriques :

$\overline{OM}$, sur l'axe d'angle polaire t;

$\overline{OM_1}$, sur l'axe d'angle polaire $t + \pi$.

Calculer la distance MM_1; trouver, quand t varie, la trajectoire du milieu, I, de MM_1 et la nature de son mouvement.

2117. On considère un point M mobile dans un plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$. Les coordonnées de M en fonction de la date t sont

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t. \end{cases}$$

1° Montrer que la trajectoire du mobile est un arc de parabole. Préciser comment se déplace le mobile sur sa trajectoire lorsque t varie de 0 à 2π.

2° Calculer les coordonnées du mobile M, les coordonnées de son vecteur vitesse $\vec{V}$ et celles de son vecteur accélération $\vec{\Gamma}$. Cas où $t = \frac{\pi}{4}$; placer le point M et tracer les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ correspondants.

3° A quels instants le vecteur vitesse a-t-il pour norme $\|\vec{V}\| = 1$?

2118. Deux points mobiles, P et M, décrivent respectivement, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω un cercle fixe, de centre O, de rayon égal à $\sqrt{3}$, et un cercle mobile, de centre P, de rayon égal à 1. Ces deux cercles sont dans un même plan. A l'origine des temps, les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{PM}$ font avec l'axe fixe $x'Ox$ du plan des angles :

$$\overline{\text{angle}}\left(Ox; \overrightarrow{OP}\right) = +\frac{\pi}{3}$$

$$\overline{\text{angle}}\left(Ox; \overrightarrow{PM}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

1° Calculer, pour une date t quelconque, les angles :

$$\overline{\text{angle}}\,(\text{O}x;\,\overrightarrow{\text{OP}}) \quad \text{et} \quad \overline{\text{angle}}\,(\text{O}x;\,\overrightarrow{\text{PM}})$$

Montrer que l'équation horaire du mouvement du point m, projection orthogonale de M sur $x'\text{O}x$ est :

$$x = \sqrt{3}\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Quelle est la trajectoire du point M ?

2° Mettre cette équation horaire sous la forme :

$$x = \text{R}\cdot\cos(\omega t + \varphi)$$

R et φ étant deux constantes à déterminer par le calcul ou par la construction de Fresnel.

3° Étudier le mouvement du point m pour $\omega = 1$ et construire, sur un même graphique, les diagrammes de l'élongation, de la vitesse et de l'accélération.

2119. On donne deux axes orthonormés $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$ et un cercle fixe (C) de rayon $2a$ dont le centre C est le point de $x'\text{O}x$ d'abscisse a.

Ce cercle coupe $x'\text{O}x$ en E et F, E étant tel que la droite $y'\text{O}y$, qui sera aussi désignée par Δ, soit médiatrice de CE; Δ coupe le cercle (C) en A et B.

On considère tous les cercles (ω) tangents à la fois au cercle (C) et à la droite Δ.

1° Quel est le lieu des centres ω de ces cercles ? Ce lieu est constitué de deux courbes (P_1) et (P_2), distinctes, que l'on définira et que l'on tracera avec soin en précisant leurs points communs et l'angle sous lequel ces courbes se coupent en ces points.

2° Trouver, en utilisant l'inversion de centre A et de puissance AB^2, le lieu des points de contact, situés hors de Δ et de la courbe (C), des cercles (ω) tangents deux à deux. Ce lieu est constitué par deux courbes (U) et (V), dont on déterminera les éléments et que l'on tracera avec soin.

3° On considère le cercle (γ) circonscrit au triangle AOE; montrer au moyen de l'inversion précédente qu'il existe quatre cercles (ω) tangents à (γ). On précisera la forme particulière que présente la figure formée par les inverses de (C), (γ) et Δ.

4° Un point ω décrit celle des courbes (P_1), (P_2) dont le sommet a une abscisse négative; son ordonnée en fonction de la date t est $y = v.t$, où v est une constante positive.

Peut-on déterminer v pour qu'à son passage à l'une ou à l'autre des intersections de sa trajectoire avec $y'\text{O}y$ la vitesse de ω ait pour valeur $2a$?

2120. Deux mobiles se déplacent d'un mouvement uniforme sur un axe $x'x$. Le premier M a une vitesse V; le second P a une vitesse v. A l'instant $t = 0$, le mobile M se trouve en A_1, le mobile P en A_2. On appelle A_3 la position de P quand M passe en A_2; A_4 la position de P quand M passe en A_3, et d'une manière générale A_n la position de P quand M passe en A_{n-1}. On posera $\overline{\text{A}_1\text{A}_2} = a$; on supposera $\overline{\text{A}_1\text{A}_2} > 0$, et $\text{V} > v > 0$.

1° Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{A}_1\text{A}_2}$, $\overrightarrow{\text{A}_2\text{A}_3}$, ..., ont des mesures algébriques qui forment une progression géométrique. On appellera k la raison de cette progression. On donnera la valeur de k en fonction des données.

2° On appelle B le point où se rencontrent les deux mobiles. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{A}_1\text{B}}$, $\overrightarrow{\text{A}_2\text{B}}$, $\overrightarrow{\text{A}_3\text{B}}$, ... ont des mesures algébriques qui sont en progression géométrique.

3° Donner l'expression de $\overline{\text{A}_1\text{A}_2}$, $\overline{\text{A}_1\text{A}_3}$, $\overline{\text{A}_1\text{A}_4}$,...

$$\xi = \lambda\cdot\theta = \alpha\theta - \beta\theta^2 \qquad (2)$$

4° On suppose que $V = 120$, $v = 39$, $a = 14$; calculer la valeur numérique de $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{A_2B}$, $\overrightarrow{A_3B}$. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $A_nB > 0{,}001$.

2121. 1° Un mouvement rectiligne est représenté par l'équation

$$x = \alpha t - \beta t^2 \qquad (1)$$

α et β étant des constantes données. A l'origine des temps, le mobile est donc à l'origine O des abscisses avec une vitesse égale à α.

Calculer la vitesse v du mobile à l'instant t et sa vitesse moyenne w pendant l'intervalle de temps $(0; t)$. Exprimer w au moyen de α et de v. Montrer que w est égale à la vitesse du mobile à l'instant $\frac{t}{2}$.

2° On admet qu'un certain coureur, fournissant à chaque instant le maximum de l'effort dont il est capable, voit sa vitesse diminuer proportionnellement au temps, en sorte que son mouvement est représenté par l'équation (1) avec $\alpha = 10$, $\beta = \frac{1}{20}$, l'unité de longueur étant le mètre et l'unité de temps étant la seconde. La formule (1) reste valable jusqu'à l'instant t_1 auquel la vitesse s'annule; à ce moment, le coureur s'arrête épuisé.

Calculer t_1, la distance parcourue x_1 et la vitesse moyenne w_1 pendant ce parcours.

3° Dans une autre course, le coureur part avec une certaine vitesse λ comprise entre α et w_1. Son mouvement est uniforme jusqu'à l'instant θ où il a parcouru la même distance ξ que s'il avait procédé comme à la question 2°. On a donc :

$$\xi = \lambda \cdot \theta = \alpha\theta - \beta\theta^2 \qquad (2)$$

avec $\alpha = 10$ et $\beta = \frac{1}{20}$. On suppose qu'à cet instant θ la vitesse λ représente le maximum de ce que peut fournir le coureur et que, à partir de cet instant, la vitesse décroît proportionnellement au temps suivant la même loi qu'à la question 2°.

Montrer que, pour $t > \theta$, l'équation du mouvement est :

$$x = \xi + \lambda(t - \theta) - \beta(t - \theta)^2 \qquad (3)$$

et cela jusqu'à ce que la vitesse s'annule. Montrer que la distance x_1 aura été parcourue avant que cette éventualité ne se produise. Calculer le temps t_2 mis à parcourir la distance x_1 dans ces conditions.

4° Déterminer λ de manière que t_2 soit le plus petit possible. Quel est ce minimum de t_2 ?

2122. On donne un cercle de centre O, de rayon R et une droite (D), dans le plan du cercle perpendiculaire à un diamètre AB de ce cercle, à la distance 2R du point O.

1° A étant le point du cercle le plus éloigné de la droite (D), on mène par A une demi-droite Az qui coupe le cercle en P et la droite en Q. Soit M le point d'intersection du rayon OP et de la perpendiculaire en Q à la droite (D). Trouver le lieu (L) de M. Montrer que le point $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ est constant et que le cercle circonscrit au triangle MPQ est orthogonal à un cercle fixe.

2° On suppose que le point Q est animé sur (D) d'un mouvement uniforme de vitesse donnée v.

Déterminer l'hodographe, le vecteur-accélération du mouvement de M sur (L).

2123. Un point M décrit un cercle de centre O et de rayon R d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω. A l'instant $t = 0$, M est en A sur le demi-axe Ox.

1° Écrire les équations du mouvement des projections de M sur l'axe $x'Ox$ et sur l'axe $y'Oy$ directement perpendiculaire à $x'Ox$.

2° A l'instant $t = 0$, part également du point A un mobile P animé sur $x'Ox$ d'un mouvement à accélération constante positive γ, avec la vitesse initiale v_0 négative. Écrire l'équation du mouvement de P.

3° Déterminer v_0 pour que M et P se rencontrent sur le cercle au point B diamétralement opposé de A. Peuvent-ils se rencontrer de nouveau en A ?

4° Étudier la variation de v_0 en fonction de ω lorsque M et P se rencontrent en B avant que M n'ait fait un tour complet sur le cercle.

2124. On donne une sphère de centre O, de rayon $2a$, et trois axes orthonormés Ox, Oy, Oz. La demi-droite Ox coupe la sphère en A, l'axe $z'Oz$ coupe la sphère en C et C'.
Un grand cercle CMC' de la sphère tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante $\omega = 1$. Le point M se déplace sur ce cercle avec une vitesse angulaire constante $\omega = 1$. A l'instant initial, il est en A sur Ox. On appellera m et P les projections de M sur le plan xOy et sur l'axe Oz.

1° Montrer que les coordonnées de M en fonction du temps t sont :

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos 2t) \\ y = a \sin 2t \\ z = 2a \sin t. \end{cases}$$

2° Étudier le mouvement de la projection m de M sur le plan xOy; trajectoire, vitesse, nature du mouvement; préciser le vecteur-accélération.

3° Qu'est le mouvement de P ? Préciser son vecteur-accélération. Des paragraphes 2 et 3 déduire une construction simple du vecteur-accélération de M.

4° La trajectoire (T) décrite par M est l'intersection de la sphère et d'un cylindre de révolution de diamètre OA; montrer que c'est aussi l'intersection de la sphère et d'un cône de révolution de sommet A, ayant un demi-angle au sommet de 45° et dont on précisera l'axe.

LIVRE XII

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

CHAPITRE CII

LES DROITES

1341. Épure d'un point.

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, un point M est déterminé par ses trois coordonnées x, y, z (fig. 1341 *a*).

Le point M se projette en m sur le plan xOy, en m'_0 sur le plan yOz, et en μ sur l'axe $y'Oy$.

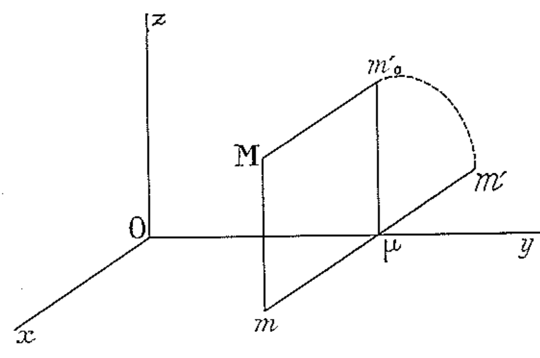


Fig. 1341 a.

Le plan xOy est appelé le **plan horizontal (H)** de projection; et le plan yOz est le **plan frontal (F)** de projection. Le plan xOz est le *plan de profil.*

L'axe $y'Oy$ est appelé la ligne de terre.

En vue d'obtenir une représentation du point M dans le plan (H) on fait subir au plan frontal (F) une rotation d'axe $y'Oy$ et dans $+\dfrac{\pi}{2}$.

Le point m'_0 du plan F a pour image le point m' du plan (H). La figure obtenue dans le plan (H) est l'épure du point M (fig. 1341 *b*).

On a alors :

$$\overline{\mu m} = x$$
$$\overline{O\mu} = y$$
$$\overline{\mu m'} = z$$

x est l'*éloignement du point M*; *y* est l'*ordonnée* de *M*; *z* est la *cote de M*. La droite *mm'*, perpendiculaire à la ligne de terre, est une *droite de rappel*.

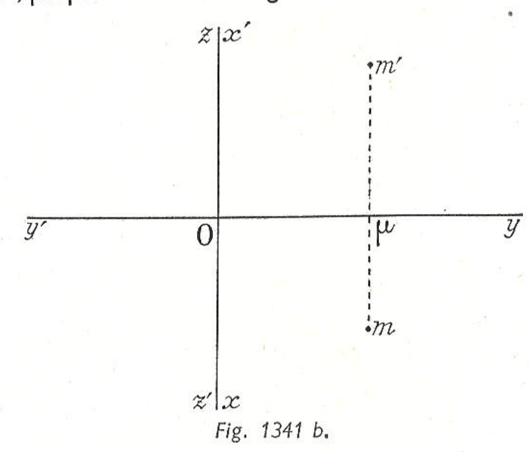


Fig. 1341 b.

Pour donner le point M, il suffit donc finalement de donner son épure (m; m').

La géométrie descriptive est l'étude des épures des ensembles de points de l'espace. Elle permet éventuellement la résolution de certains problèmes sur ces ensembles.

Remarque. — Pratiquement pour donner un point en géométrie descriptive, on fournit :

— ou les trois coordonnées x, y, z; ce qui permet de placer m et m'.
— ou la figure de terre $y'Oy$, et les points m et m'.

1342. Changement de plan frontal.

Il y a souvent intérêt à changer de plan frontal. C'est la *méthode du plan frontal auxiliaire* (fig. 1342 *a*). Le nouveau plan frontal est (F_1).

La ligne de terre est changée; la nouvelle est notée $y'_1\ y_1$; la cote n'est pas changée; on obtient facilement la nouvelle épure (fig. 1342 *b*).

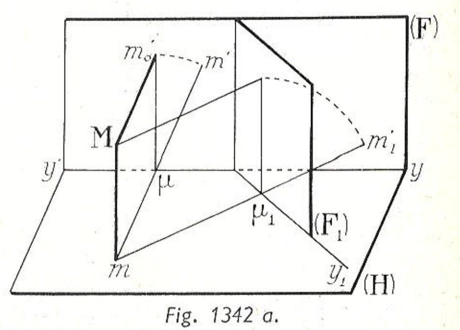


Fig. 1342 a.

m se projette en μ_1 sur $y_1'\ y_1$ et $\overline{\mu_1\, m_1'} = \overline{\mu m'} = z$.

Remarque. Dans les mêmes conditions, il est possible de changer de plan horizontal.

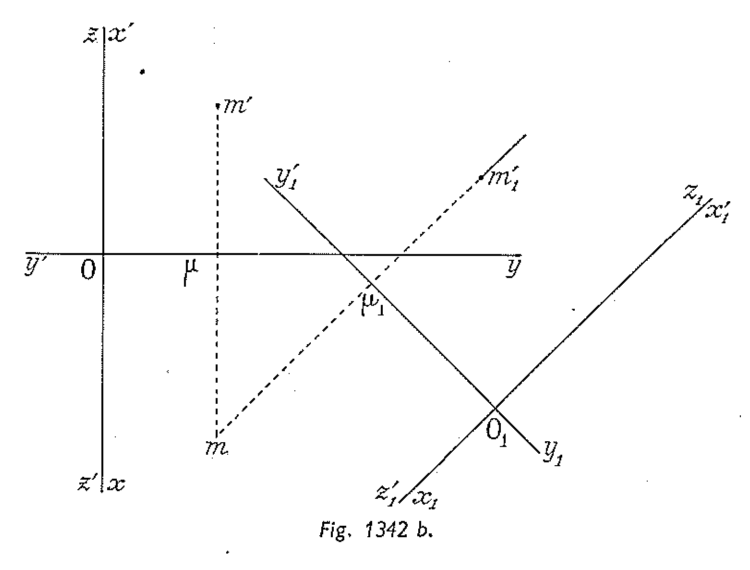


Fig. 1342 b.

1343. Droites verticales.

Les droites perpendiculaires au plan horizontal (H) sont appelées des verticales.

Tous les points d'une telle droite ont pour projection horizontale la trace (v) de la droite sur le plan (H).

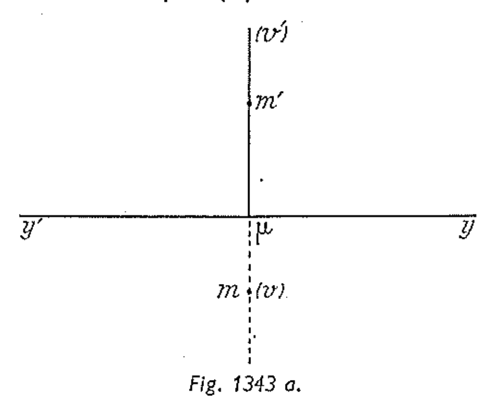


Fig. 1343 a.

L'épure est alors évidente (fig. 1343 *a*).

1344. Droites de bout.

Les droites perpendiculaires au plan frontal (F) sont appelées des droites de bout.

Tous les points d'une telle droite ont pour projection frontale la trace (*b'*) de la droite sur le plan (F).

L'épure est alors évidente (fig. 1344 *a*)

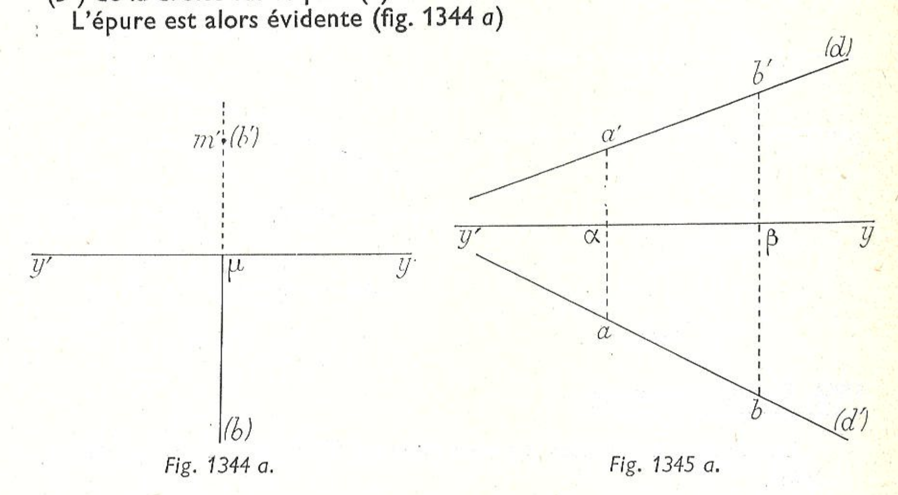


Fig. 1344 a. *Fig. 1345 a.*

1345. Détermination d'une droite.

Une droite (D) est déterminée par ses deux projections, horizontale (*d*) et frontale (*d'*).

On peut aussi la déterminer par deux points A et B (fig. 1345 *a*).

1346. Marquer un point sur une droite.

Soit une droite (D), donnée par son épure (*d*; *d'*) (fig. 1346 *a*).

Un point M de (D) est déterminé par sa projection horizontale *m*; *m'* appartient à (*d*).

La droite de rappel de *m* coupe (*d'*) en *m'*. L'épure de M est (*m*; *m'*). On dit qu'*on a rappelé m en m'*.

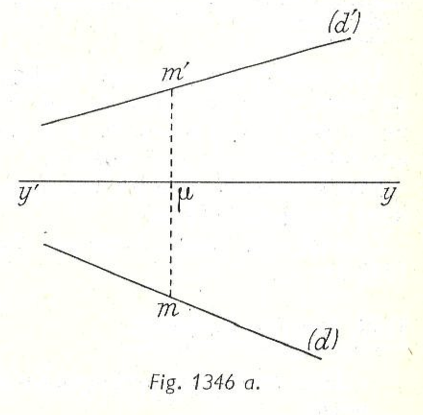


Fig. 1346 a.

Remarque. Si le point M est donné par sa projection frontale *m'* de (*d'*), on rappelle *m'* en *m* sur (*d*).

1347. Droites horizontales.

Les droites parallèles au plan horizontal (H) sont des droites horizontales.

La projection frontale (d') d'une horizontale (D) est parallèle à la ligne de terre. L'épure est alors évidente (fig. 1347 *a*).

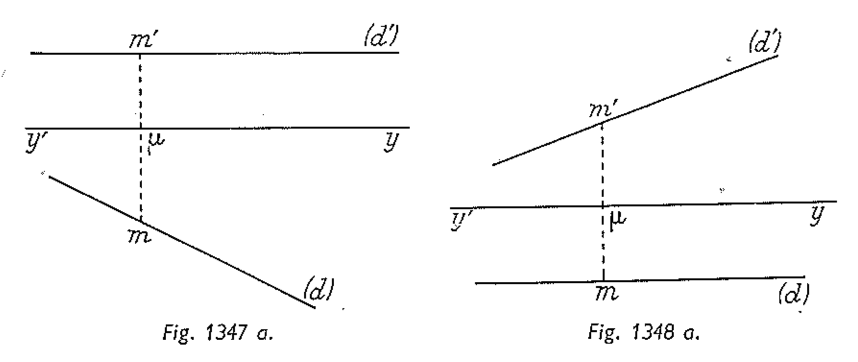


Fig. 1347 a. *Fig. 1348 a.*

1348. Droites frontales.

Les droites parallèles au plan frontal (F) sont des droites frontales.

La projection horizontale (d) d'une frontale (D) est parallèle à la figure de terre. L'épure est alors évidente (fig. 1348 *a*).

1349. Droites parallèles à la ligne de terre.

Une droite (D) parallèle à la ligne de terre $y'y$ est parallèle au plan (H) et au plan (F); c'est donc à la fois une horizontale et une frontale.

Ses projections (d) et (d') sont parallèles à la ligne de terre.

L'épure est alors évidente (fig. 1349 *a*).

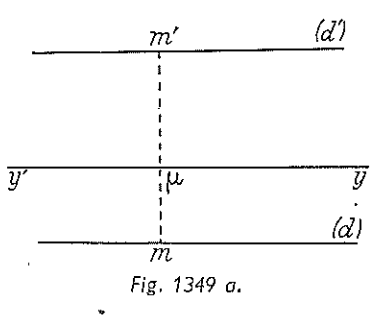


Fig. 1349 a.

1350. Droites de profil.

Une droite (D) orthogonale à la ligne de terre est une droite de profil.

Ses projections (d) et (d') sont confondues et sont orthogonales à la ligne de terre (fig. 1350 *a*).

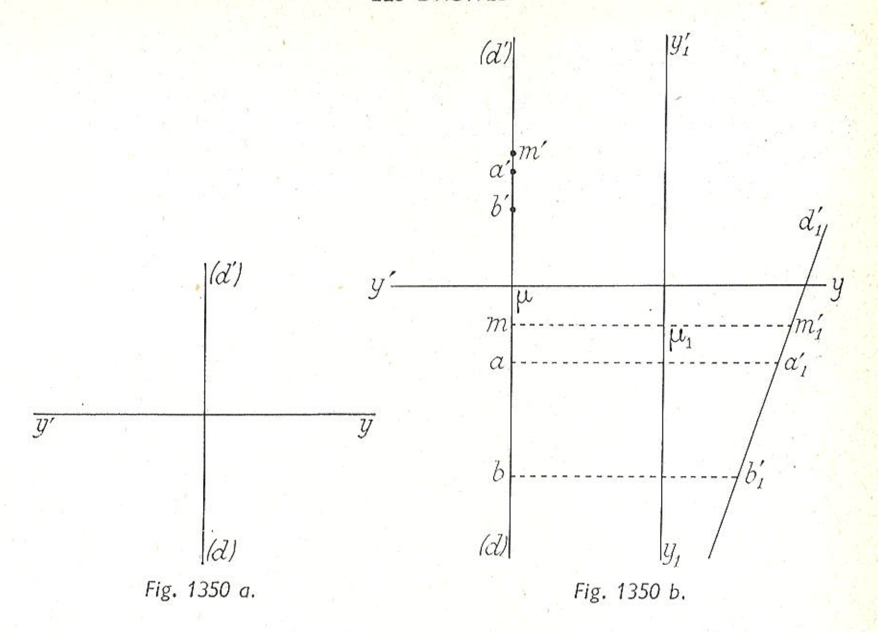


Fig. 1350 a.

Fig. 1350 b.

Pour étudier une droite de profil, il faut prendre un plan frontal auxiliaire, la nouvelle ligne de terre étant parallèle à (d) et (d') (fig. 1350 *b*).

On peut se servir de cette méthode pour marquer un point de la droite de profil connaissant m (fig. 1350 *b*).

1351. Droites concourantes.

Pour que deux droites (D) *et* (Δ), *non de profil, données par* (d; d') *et* (δ, δ') *se coupent, il faut et il suffit que les projections de même nature se coupent sur la même droite de rappel.*

Si (d) et (δ) se coupent en m et si (d') et (δ') se coupent en m', la droite mm' est perpendiculaire à $y'y$ (fig. 1351 *a*).

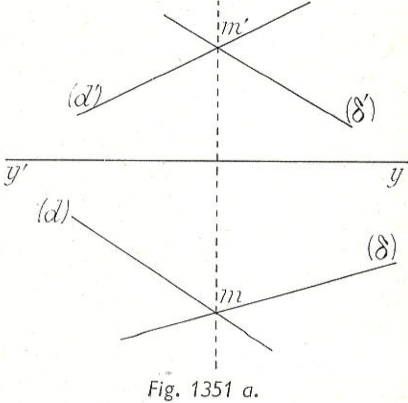


Fig. 1351 a.

1352. Droites parallèles.

Pour que deux droites (D) et (Δ), *non de profil, données par* (d; d′) et (δ;δ′) *soient parallèles il faut et il suffit que les projections de même nature* soient parallèles.

(d) et (δ) sont parallèles; (d′) et (δ′) sont parallèles (fig 1352 a).

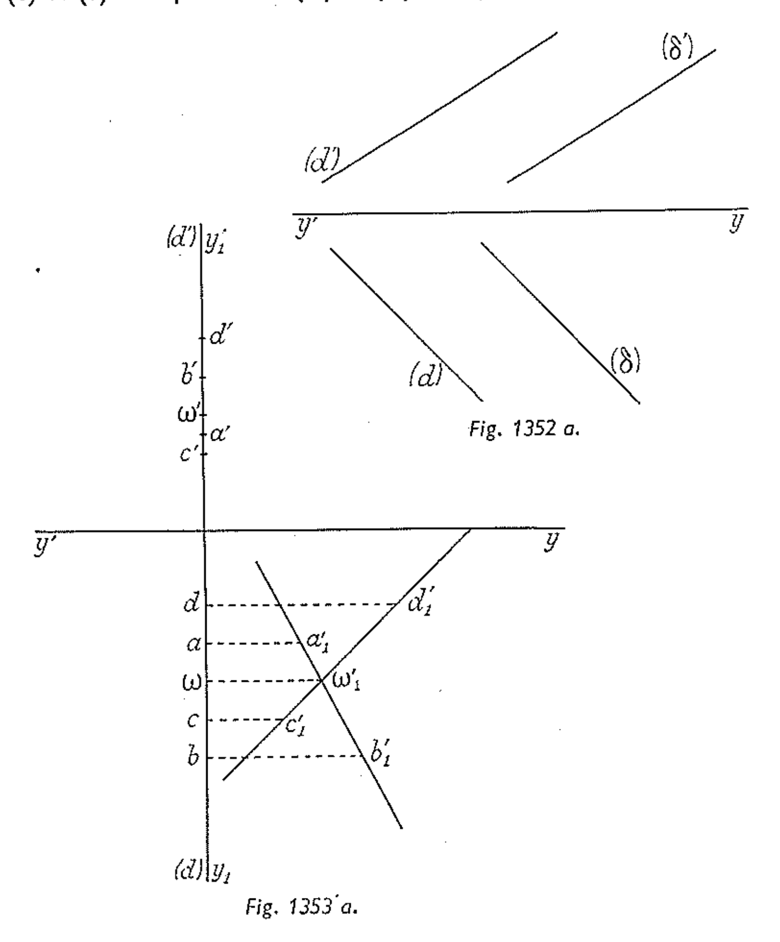


Fig. 1352 a.

Fig. 1353 a.

1353. Remarque.

Si les deux droites (D) et (Δ) sont des droites de profil, on utilise une projection frontale auxiliaire, la nouvelle ligne de terre étant perpendiculaire à la ligne de terre $y'y$ (fig. 1353 a).

L'épure donne la construction du point d'intersection des deux droites.

1354. Trace d'une droite.

Les traces d'une droite (D) sont les points d'intersection I et J avec (H) et (F).

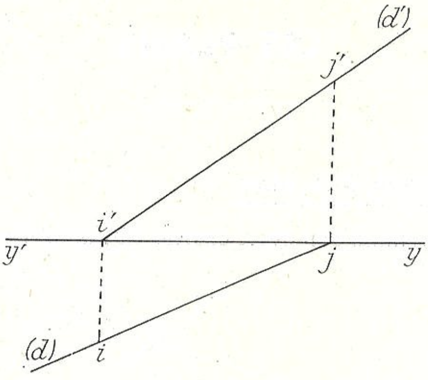


Fig. 1354 a.

La trace horizontale est le point de côte nulle; la trace frontale est le point d'éloignement nul (fig. 1354 *a*).

CHAPITRE CIII

LES PLANS

1355. Détermination d'un plan.

Un plan est déterminé par deux droites (D) et (Δ) concourantes en Ω (fig. 1355 *a*).

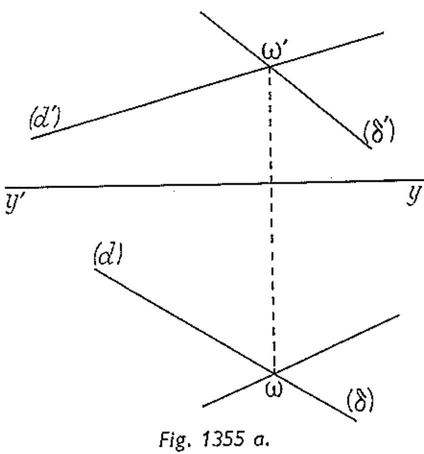


Fig. 1355 a.

1356. Plans verticaux.

Un plan perpendiculaire au plan horizontal (H) est appelé un plan vertical.

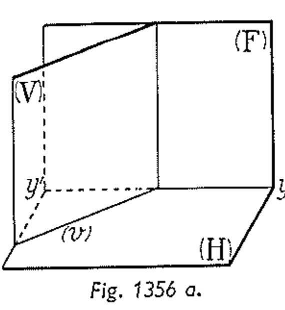


Fig. 1356 a.

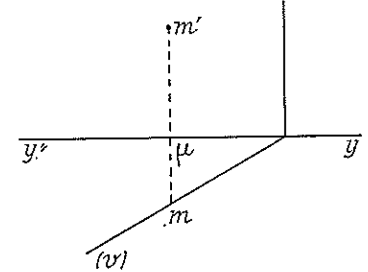


Fig. 1356 b.

Tous les points du plan vertical (V) se projettent horizontalement sur la même droite (*v*) (fig. 1356 *a*, *b*).

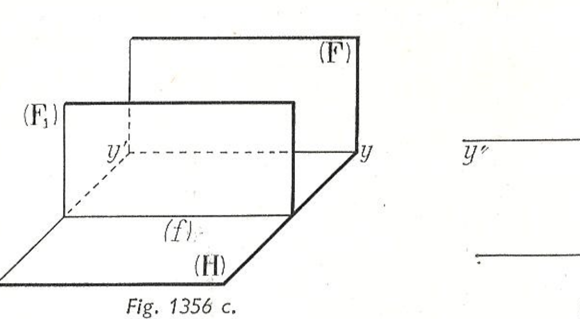


Fig. 1356 c.

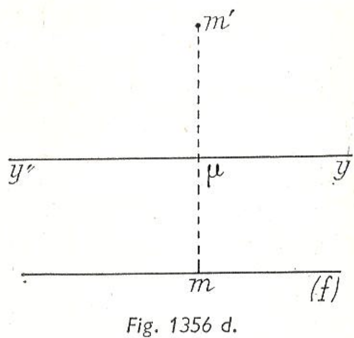
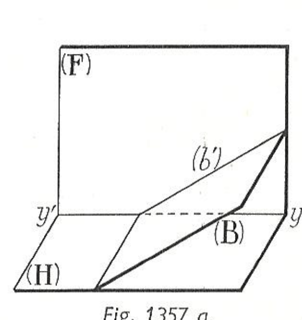


Fig. 1356 d.

Si le plan vertical est parallèle à (F), il s'appelle un plan de front (fig. 1356 *c*, *d*).

1357. Plans de bout.

Un plan perpendiculaire au plan frontal (F) est appelé un plan de bout.



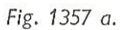


Fig. 1357 a.

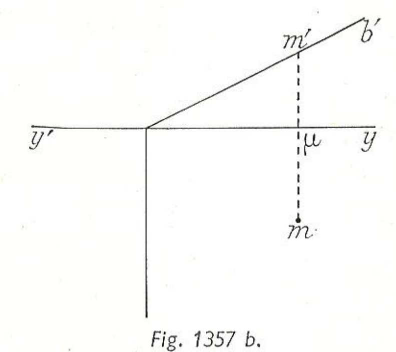


Fig. 1357 b.

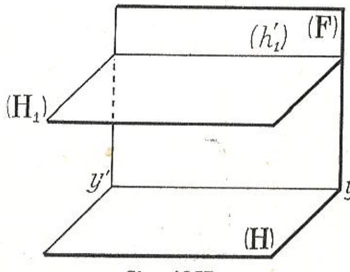


Fig. 1357 c.

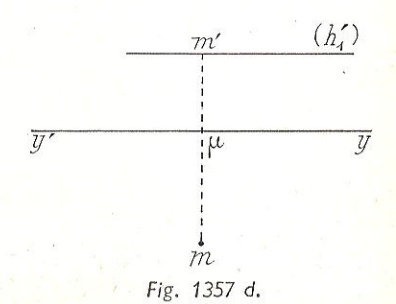


Fig. 1357 d.

Tous les points du plan de bout (B) se projettent frontalement sur la même droite (b') (fig. 1357 *a*, *b*).

Si le plan de bout est parallèle à (H), il s'appelle un plan horizontal (fig. 1357 *c*, *d*).

1358. Plans de profil.

Un plan perpendiculaire à la ligne de terre y'y sont des plans de profil.

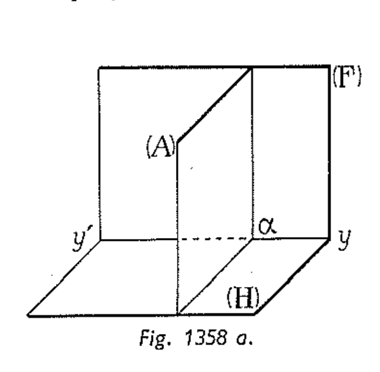


Fig. 1358 a.

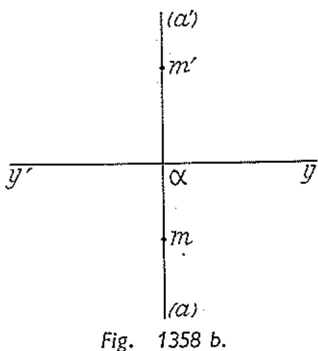


Fig. 1358 b.

Tous les points d'un plan de profil (A) se projettent horizontalement et frontalement sur la même ligne de rappel (fig. 1358 *a*, *b*).

1359. Plans bissecteurs.

Tout point M du premier plan bissecteur est caractérisé par l'égalité de son éloignement et de sa cote; donc m et m' sont symétriques pour $y'y$ (fig. 1359 *a*).

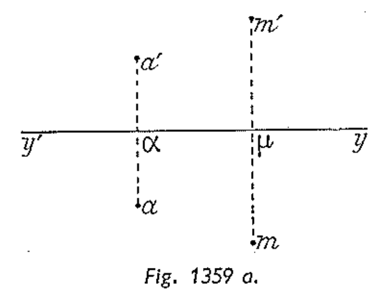


Fig. 1359 a.

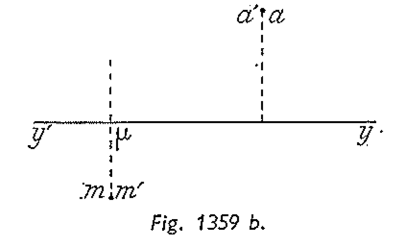


Fig. 1359 b.

Tout point M du second plan bissecteur est caractérisé par le fait que sa cote est l'opposé de son éloignement; donc m et m' sont confondus (fig. 1359 *b*).

Tout point M du second plan bissecteur est caractérisé par le fait que sa cote est l'opposé de son éloignement; donc m et m' sont confondus (fig. 1359 *b*).

1360. Intersection d'une droite et d'un plan vertical.

La droite est donnée par $(d\,;\,d')$. Le plan est donné par (v). (v) et (d) se coupent en m; on rappelle m en m' sur (d') (fig. 1360 *a*).

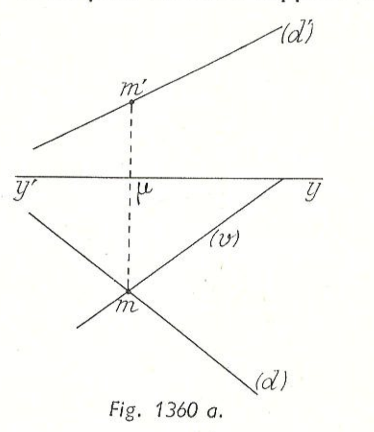


Fig. 1360 a.

Fig. 1361 a.

1361. Intersection d'une droite et d'un plan de bout.

La droite est donnée par $(d\,;\,d')$. Le plan est donné par (b'). (b') et (d') se coupent en m'; on rappelle m' en m sur (d) (fig. 1361 *a*).

1362. Droites d'un plan.

Un plan (P) est déterminé par deux droites (A) et (B) concourantes en Ω.

Une droite (D) est dans le plan (P) si elle coupe (A) et (B) (ou éventuellement si elle coupe l'une des deux droites et est parallèle à l'autre). Elle est donc déterminée par ses points d'intersection M et N avec (A) et (B).

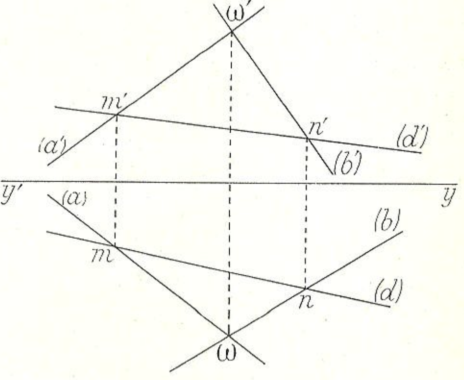


Fig. 1362 a.

Si la droite (D) est donnée par sa projection horizontale (d), on coupe (A) et (B) par le plan vertical (V) de projection horizontale (d) (fig. 1362 *a*).

Si la droite (D) est donnée par sa projection frontale (d'), on coupe (A) et (B) par le plan de bout de projection frontale (d').

1363. Horizontales et frontales d'un plan.

Les *horizontales d'un plan* sont les droites du plan dont les projections frontales sont parallèles à la ligne de terre (fig. 1363 *a*).

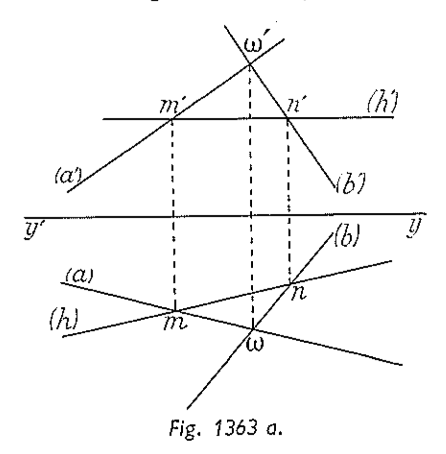


Fig. 1363 a.

La *trace horizontale d'un plan* est l'horizontale de ce plan située dans le plan (H) (fig. 1363 *b*).

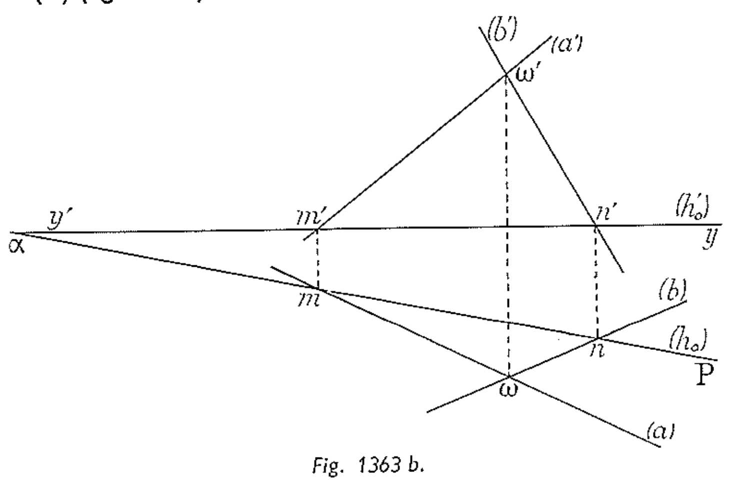


Fig. 1363 b.

Les *frontales d'un plan* sont les droites du plan dont les projections horizontales sont parallèles à la ligne de terre (fig. 1363 *c*).

La *trace frontale d'un plan* est la frontale de ce plan située dans le plan (F) (fig. 1363 *d*).

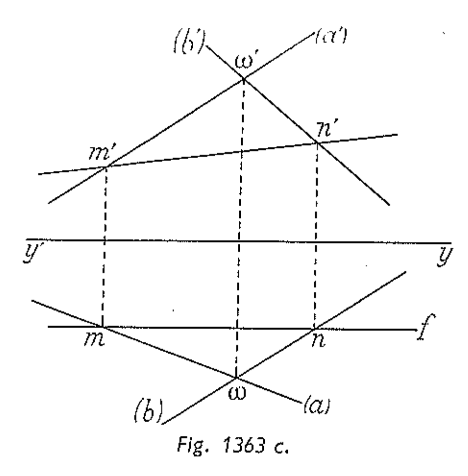


Fig. 1363 c.

Un plan peut être déterminé par ses deux traces (αP; $\alpha P'$); (αQ; $\alpha Q'$); $\alpha P'$ et αQ sur $y'y$ et souvent ne sont pas notées (fig. 1363 e).

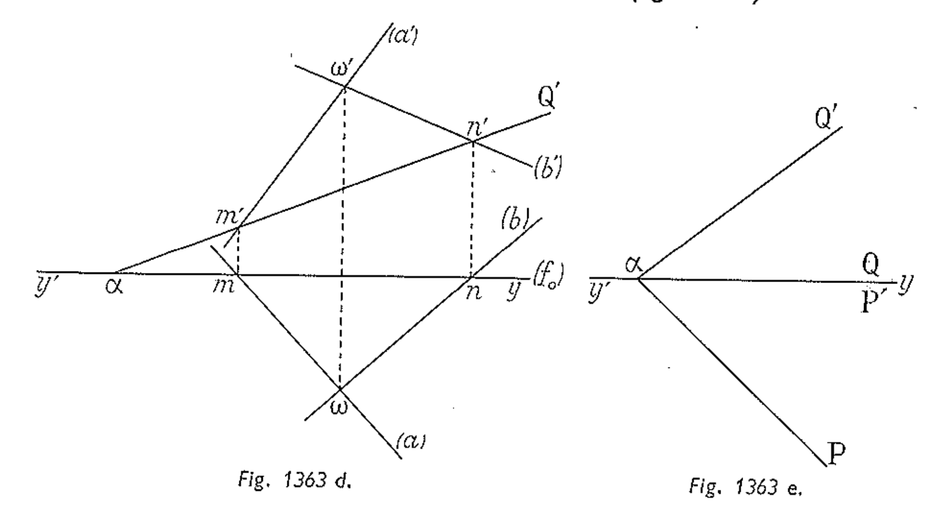


Fig. 1363 d.

Fig. 1363 e.

1364. Lignes de pente.

Les lignes de pente d'un plan sont les droites du plan perpendiculaires aux horizontales de ce plan; elles se projettent donc horizontalement suivant les perpendiculaires aux projections horizontales des horizontales

du plan (fig. 1364 *a*). L'épure donne la construction de la ligne de pente passant par le point Ω.

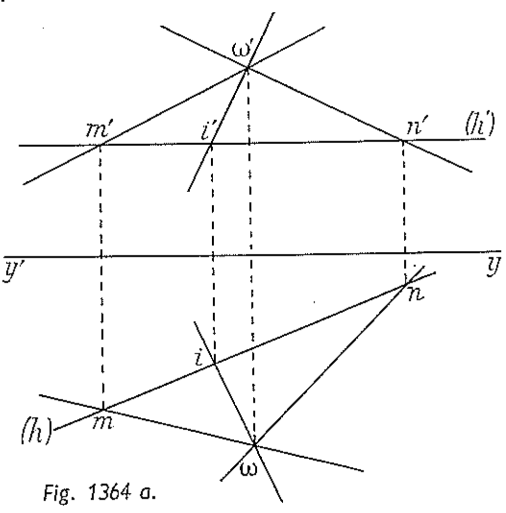


Fig. 1364 a.

1365. Intersection d'un plan et d'un plan vertical.

On donne deux plans (P) et (V), le plan (V) étant vertical. Le plan (P)

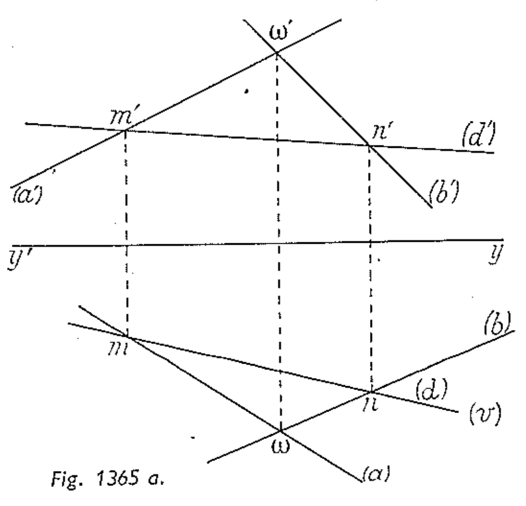


Fig. 1365 a.

est déterminé par deux droites concourantes. On coupe ces deux droites par le plan vertical (V) (cf. nº 1360). Les deux points d'intersection M et N déterminent l'intersection de (P) et (V) (fig. 1365 *a*).

La même méthode est applicable à l'intersection d'un plan (P) et d'un plan de bout (B) (fig. 1365 *b*).

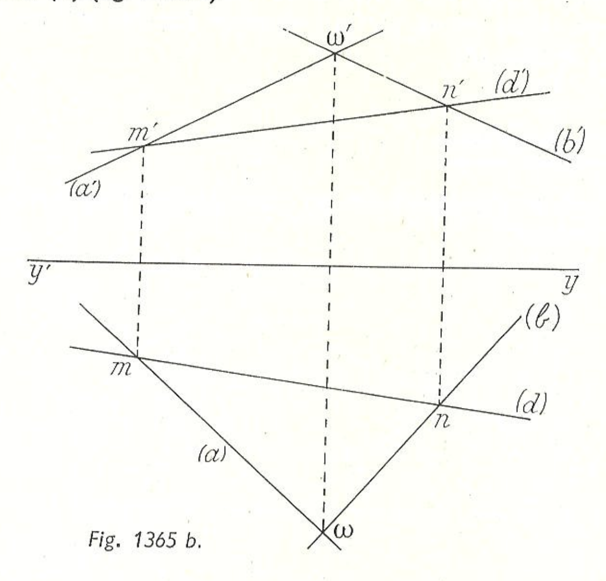


Fig. 1365 b.

1366. Marquer un point d'un plan.

On donne un plan (P), et un point M de (P); (P) est donné par deux

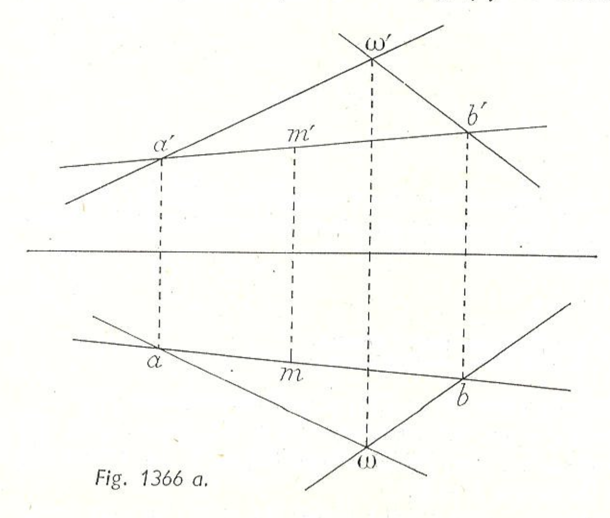


Fig. 1366 a.

droites concourantes, et M est donnée par sa projection horizontale *m*. On se propose de construire la projection frontale *m′* du point M.

On mène par M un plan vertical (V); soit (D) l'intersection de (P) et (V). Le point M appartient à (D). D'où l'épure (fig. 1366 *a*).

Si le point M est donné par sa projection frontale m', on coupe (P) par un plan de bout (B).

1367. Plans parallèles.

Soient un plan (P) déterminé par deux droites concourantes (D) et (Δ), et un point A.

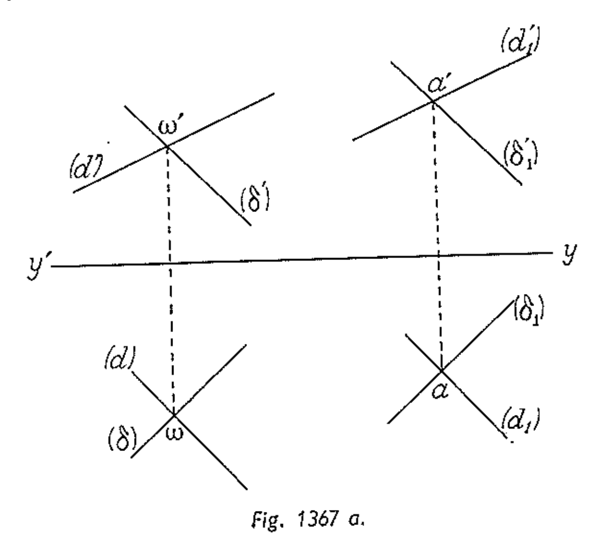


Fig. 1367 a.

Le plan (Q) passant par A et parallèle à (P) est déterminé par les droites (D_1) et (Δ_1) passant par A et respectivement parallèles à (D) et (Δ) (fig. 1367 *a*).

1368. Intersection de deux plans.

Soient deux plans (P) et (Q), et leur intersection (D).

Pour déterminer (D) on coupe (P) et (Q) par un plan (R) qui coupe (D) en A, et par un plan (S) qui coupe (D) en B. La droite (D) est déterminée par les points A et B.

Très souvent on prend pour plans (R) et (S) un plan horizontal et un plan de bout.

L'épure est faite lorsque les deux plans (P) et (Q) sont donnés par des

couples de droites concourantes (fig. 1368 *a*) et lorsque les deux plans (P) et (Q) sont donnés par leurs traces (fig. 1368 *b*).

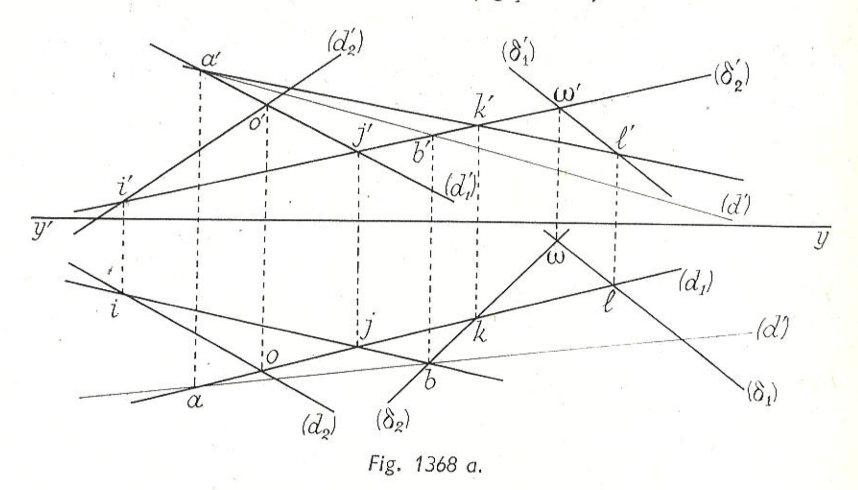


Fig. 1368 *a*.

Épure 1368 a.

Plan (R) : plan vertical de trace horizontale (d_1); coupe (Q) suivant $(kl;\, k'l')$ et (P) suivant $(d_1;\, d_1')$. On en déduit $(a;\, a')$.

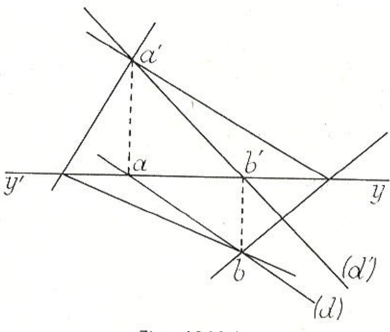


Fig. 1368 *b*.

Plan (S) : plan de bout de trace frontale (δ') ; coupe (Q) suivant $(\delta_2;\, \delta_2')$ et (P) suivant $(ij;\, i'j')$. On en déduit $(b;\, b')$.
La droite (D) est la droite $(ab;\, a'b')$.

Épure 1368 b.

Plan (R) : plan horizontal (H).
Plan (S) : plan frontal (F).

1369. Intersection d'une droite et d'un plan.

Soient un plan (P) et une droite (Δ).

Si (Q) est un plan passant par la droite (D), on cherche l'intersection (D) des plans (P) et (Q). Le point d'intersection A de (P) et (Δ) est le point d'intersection de (D) et (Δ) (fig. 1369 *a*).

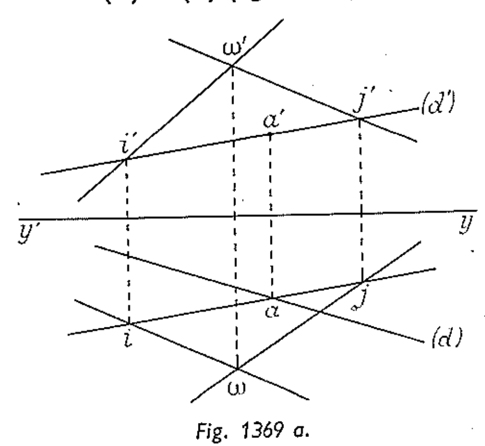


Fig. 1369 a.

Sur la figure (1369 *a*) le plan auxiliaire est le plan de bout dont la projection frontale est (*d'*).

CHAPITRE CIV

ORTHOGONALITÉ

1370. Horizontales orthogonales à une droite.

Soit une droite (d; d'), non verticale. Si une droite (h; h') horizontale est orthogonale à (D) les projections horizontales (d) et (h) de ces deux droites sont perpendiculaires.

Cela permet de résoudre le problème : mener par un point A une horizontale orthogonale à la droite (D) (fig. 1370 *a*).

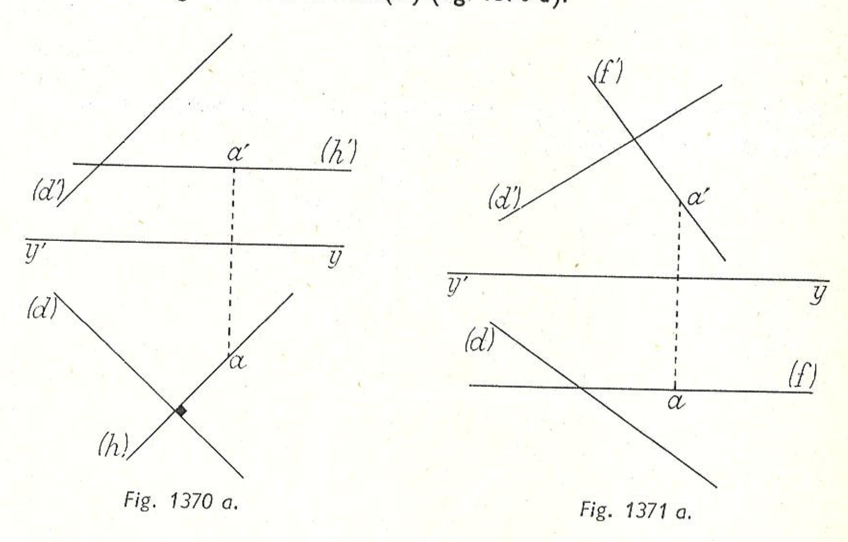


Fig. 1370 a.

Fig. 1371 a.

1371. Frontales orthogonales à une droite.

Soit une droite (d; d'), non de bout. Si une droite de front (f; f') est orthogonale à (D) les projections frontales (d') et (f') de ces deux droites sont perpendiculaires.

Cela permet de résoudre le problème : mener par un point A une frontale orthogonale à la droite (D) (fig. 1371 *a*).

1372. Droite perpendiculaire à un plan.

Soient un plan (P), non parallèle à la ligne de terre, et un point A. La droite (D) passant par A et perpendiculaire au plan est orthogonale aux horizontales et aux frontales de (P).

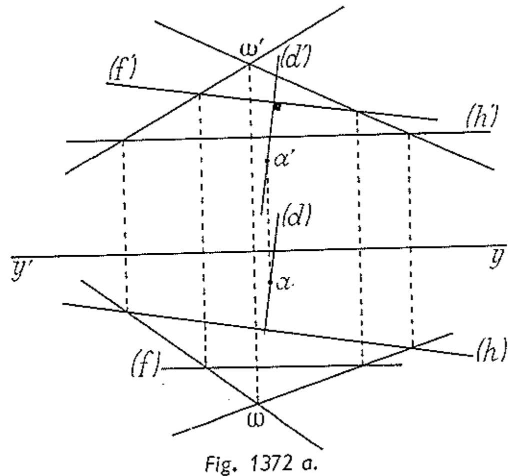


Fig. 1372 a.

Par A on mène une droite orthogonale à une horizontale et à une frontale de (P) (fig. 1372 *a*).

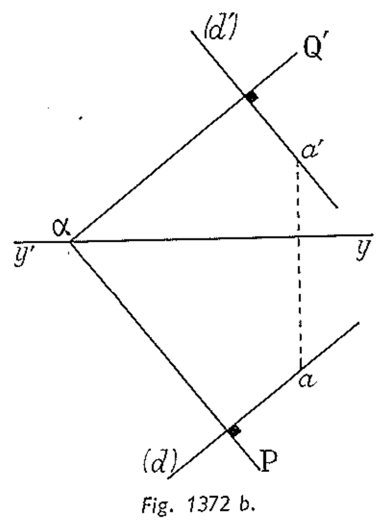


Fig. 1372 b.

Lorsque le plan est donné par ses traces la construction est plus simple (fig. 1372 *b*).

Remarque. Lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre $y'y$, on prend un plan frontal auxiliaire perpendiculaire à $y'y$.

1373. Plan perpendiculaire à une droite.

Soient une droite (D) et un point A. Le plan (P) passant par A et perpendiculaire à (D) est déterminé par une horizontale et par une frontale perpendiculaires à (D) (fig. 1373 *a*).

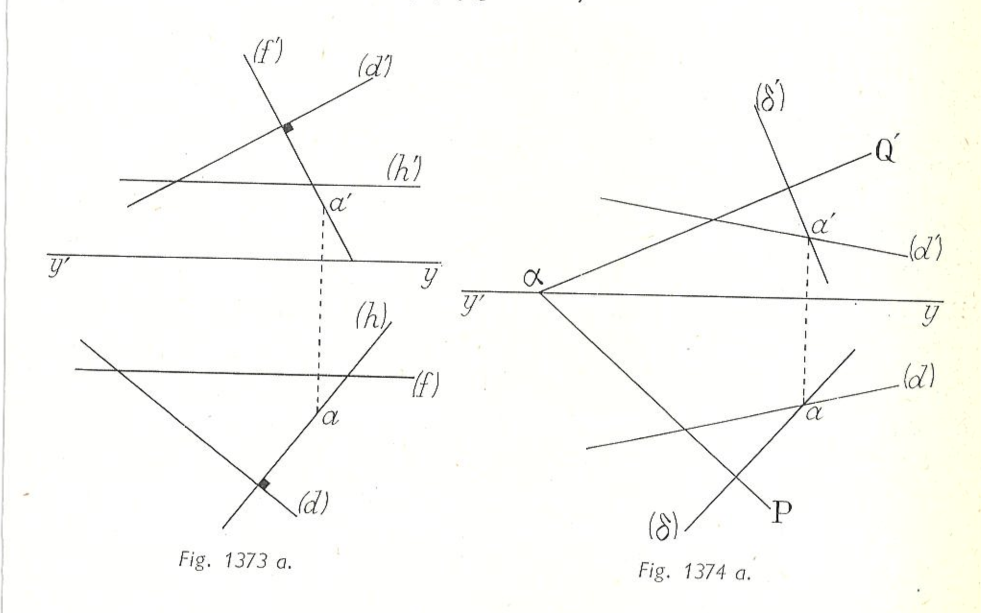


Fig. 1373 a.

Fig. 1374 a.

1374. Plan perpendiculaire à un plan.

Soient un plan (P) et une droite (D), non perpendiculaire à (P). Le plan (Q) passant par (D) et perpendiculaire à (P) est déterminé par la droite (D) et par la droite (Δ) passant par un point A de (D) et perpendiculaire à (P) (fig. 1374 *a*).

1375. Perpendiculaire commune à deux droites.

1° *Les deux droites* (D) *et* (Δ) *sont horizontales.*

La perpendiculaire commune cherchée est verticale. Elle se projette horizontalement au point d'intersection de (*d*) et (δ).

La plus courte distance de deux droites est la différence des côtés des droites (D) et (Δ) (fig. 1375 *a*).

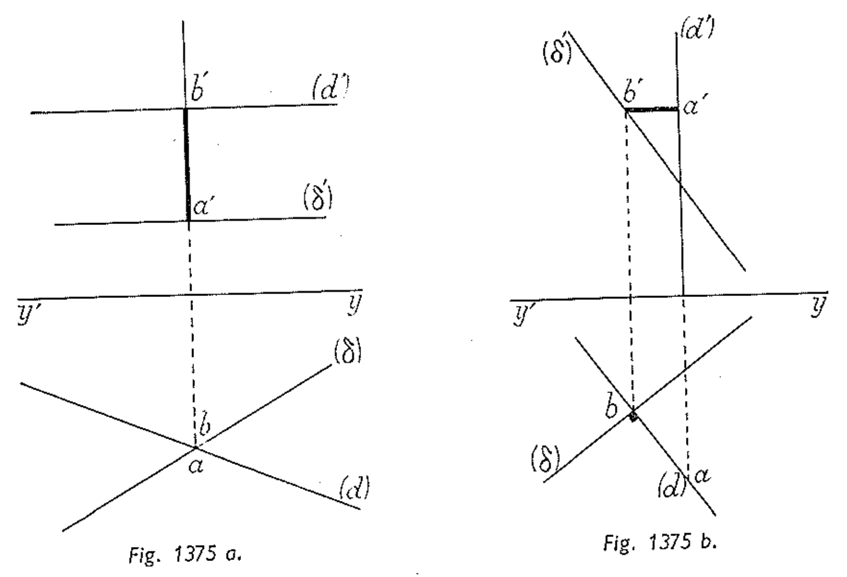


Fig. 1375 a.

Fig. 1375 b.

La même méthode est applicable si les deux droites sont frontales.

2° *La droite (D) est verticale.*

La perpendiculaire commune est horizontale. Sa projection horizontale et la projection horizontale δ de la droite (Δ) sont perpendiculaires. d'où l'épure (fig. 1375 *b*).

CHAPITRE CV

ANGLES ET DISTANCES

1376. Rotation ayant pour axe une verticale.

Soit un axe vertical $(\vec{D})$, perpendiculaire en ω au plan (H). On envisage la rotation rot $(\vec{D}; \theta)$.

Le point M a pour image le point M_1; la projection horizontale m_1 est l'image de m, dans le plan (H), par la rotation rot $(\omega; \theta)$. De plus les cotes de M et de M_1 sont égales. D'où l'épure (fig. 1376 *a*).

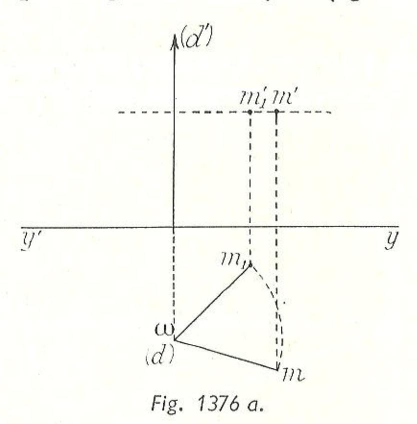


Fig. 1376 a.

La même méthode peut être utilisée pour une rotation ayant pour axe une droite de bout.

1377. Rabattement d'un plan autour d'une horizontale.

Soit un plan (P) passant par la droite horizontale UV. Rabattre le plan (P) autour de UV, c'est effectuer sur (P) une rotation d'axe UV telle que l'image de (P) soit le plan horizontal (P″) passant par UV. (fig. 1377 *a*):

Soit un point A de (P) se projetant en C sur UV; le rabattement de A est le point A″ et on a CA″ = CA. (Il y a deux rabattements possibles.)

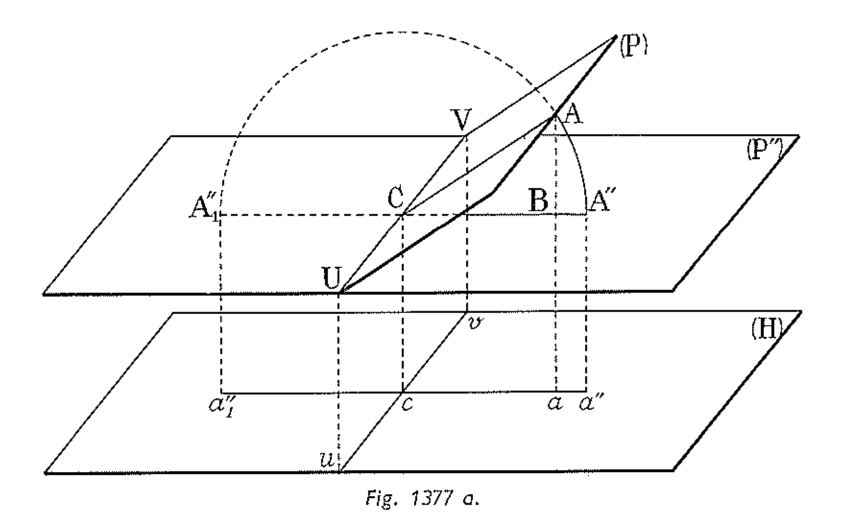


Fig. 1377 a.

Si A se projette en B sur CA″, $\overline{BA}$ est la différence des cotes de A et de la droite UV. Ces résultats permettent de construire la projection horizontale a'' du point A″.

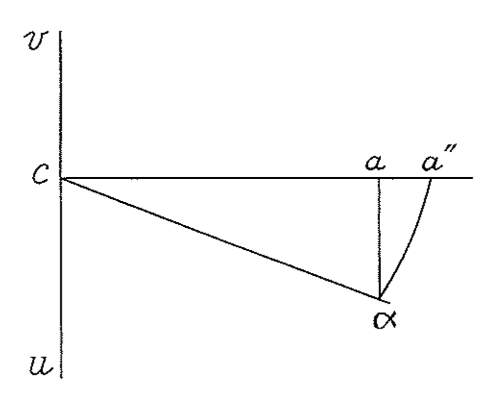


Fig. 1377 b.

On projette a en c sur uv, on a ca = CB. Sur la perpendiculaire en a à ca on marque le point α tel que $a\alpha$ = BA. Les triangles BAC et $a\alpha c$ sont isométriques; a'' étant sur la droite ca, on a :

$$ca'' = c\alpha = \text{CA}$$

ce qui termine la construction. Cette construction est la *règle du triangle rectangle* (fig. 1377 *b*).

L'horizontale UV est la *charnière du rabattement.*

Les points de UV sont leurs propres rabattements.

1378. Relation avec une affinité.

Le point a'' est l'image de a par l'affinité orthogonale d'axe uv et de rapport

$$\frac{ca''}{ca} = \frac{ca'}{ca} = \frac{CA}{CB} = \operatorname{tg}\theta$$

θ étant l'angle des plans (H) et (P).

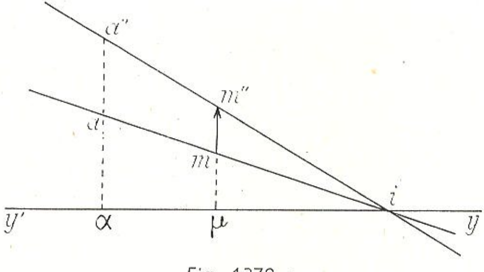


Fig. 1378 a.

Par suite le rabattement d'une droite de (P), ou d'une figure de (P), peut s'obtenir par affinité.

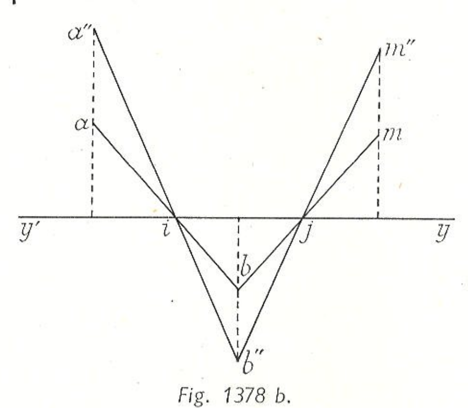


Fig. 1378 b.

En particulier, lorsqu'on a construit le rabattement a'' de a par la règle du triangle, on obtient le rabattement d'un point quelconque m par la *méthode de l'alignement*. En effet si la droite am coupe uv en i, on a immédiatement le rabattement m'' de m (fig. 1378 *a*).

Si le point *i* est en dehors de l'épure on peut passer par l'intermédiaire d'un point auxiliaire *b* (fig. 1378 *b*).

1379. Relèvement d'un point.

La méthode de l'alignement permet, réciproquement, de construire *m* connaissant *m''*, m est *le relèvement de* m''.

1380. Distance de deux points.

Soient deux points A et B. Pour trouver la distance AB, on peut prendre un plan frontal auxiliaire, par exemple le plan vertical projetant AB (fig. 1380 *a*).

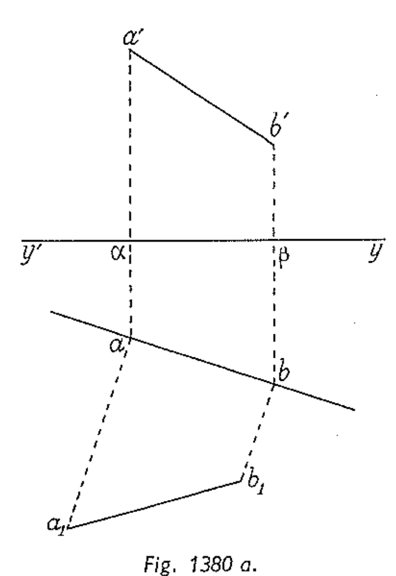


Fig. 1380 a.

On a :

$$AB = a_1b_1$$

1381. Distance d'un point à une droite.

Soient la droite (D) et le point A. Ils déterminent un plan (P). Pour obtenir la distance AB de A à (D) on rabat ce plan (P) autour de l'horizontale UV passant par A et situé dans (P).

Pour rabattre (*d*) on rabat un point *m* quelconque de (*d*) en *m″*. La distance cherchée est *ab″*, *ab″* étant perpendiculaire à (*d″*). *ab* est l'épure du segment AB (fig. 1381 *a*).

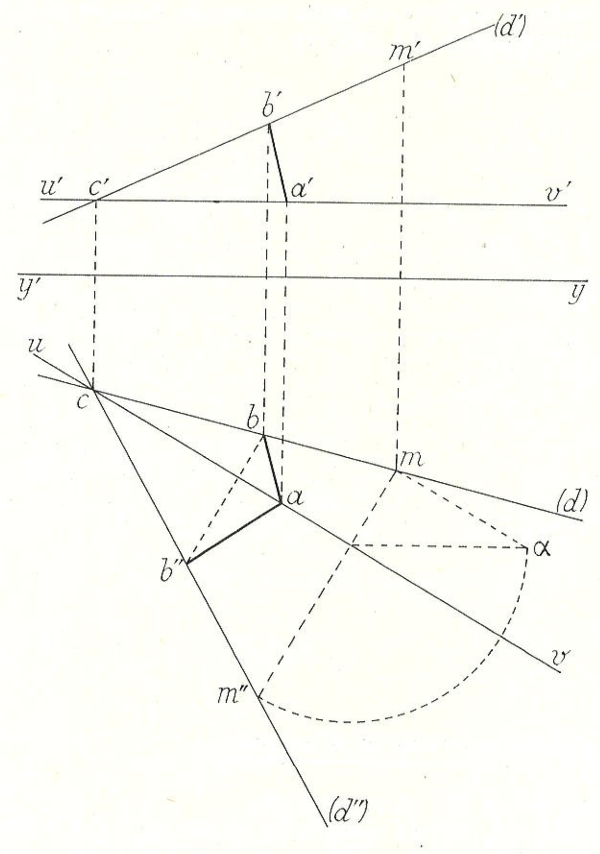


Fig. 1381 a.

1382. Distance d'un point à un plan.

Soient un plan (P) et un point A. La perpendiculaire menée de A à (P) coupe (P) en B.

On construit l'épure de la perpendiculaire (Δ) menée de A à (D) (cf. n° 1372). Ensuite on cherche l'intersection de (Δ) et de (P) (cf. n° 1369), et enfin on construit la vraie grandeur du segment AB (cf. n° 1380).

1383. Angle de deux droites.

On peut supposer que les deux droites (D) et (Δ) se coupent en A. Elles déterminent un plan (P).

Pour construire l'angle de ces deux droites on rabat le plan (P) autour d'une de ses horizontales (fig. 1383 *a*).

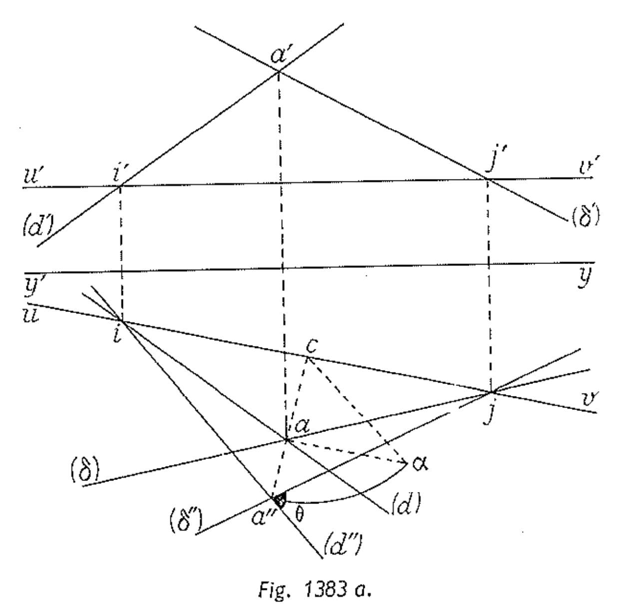


Fig. 1383 a.

1384. Angle d'une droite et d'un plan.

Soient une droite (D) et un plan (P).

Par un point A de (D) on mène la perpendiculaire (Δ) à (P). On construit ensuite l'angle de (D) et (Δ).

L'angle cherché est le complément de cet angle.

1385. Angle de deux plans.

Soient deux plans (P) et (Q). On coupe par un plan (R) perpendiculaire à l'intersection des deux plans. Soient (D) et (Δ) les deux droites obtenues.

L'angle des deux plans est l'angle de ces deux droites.

1386. Quelques épures.

◇ *Exemple 1.* — *Un prisme droit ayant pour base un triangle équilatéral est posé sur le plan (H). On coupe ce prisme par un plan de bout. Épure et vraie grandeur de la section.*

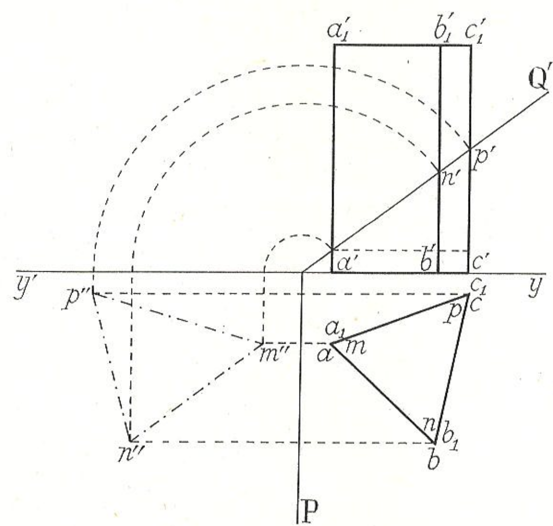


Fig. 1386 a.

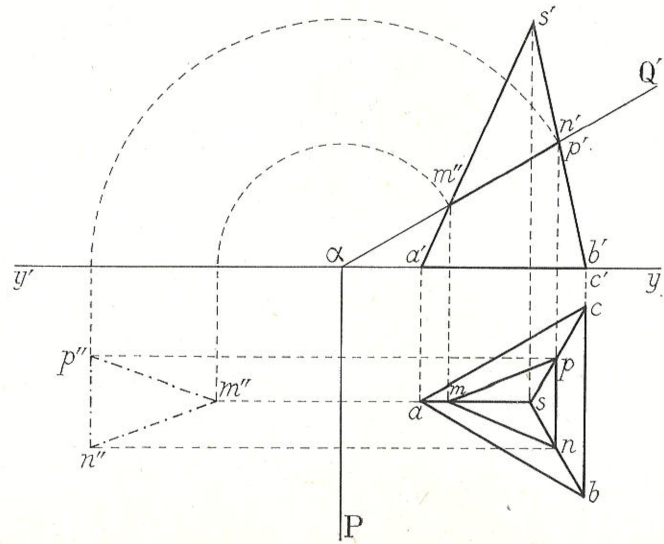


Fig. 1386 b.

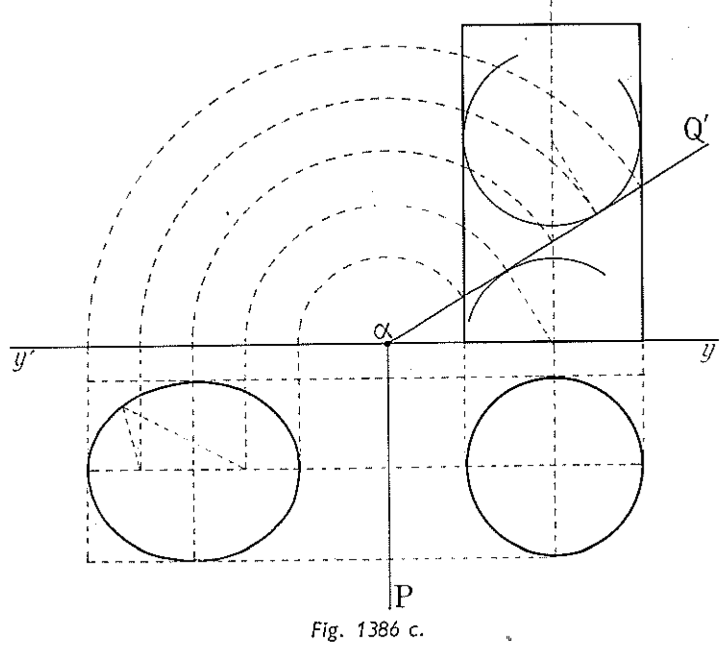


Fig. 1386 c.

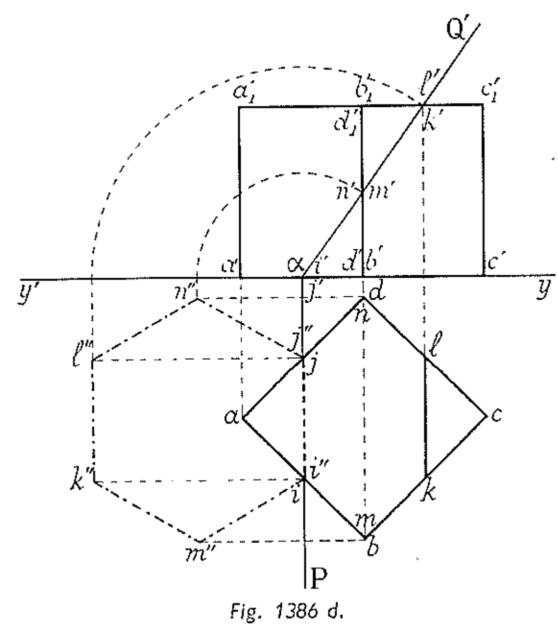


Fig. 1386 d.

La figure (1386 *a*) donne la solution du problème. On a rabattu la section MNP autour de la trace horizontale αP du plan de bout, en $m''n''p''$.

◇ *Exemple 2. — Une pyramide régulière ayant pour base un triangle équilatéral est posée sur le plan (H). On coupe cette pyramide par un plan de bout. Épure et vraie grandeur de la section.*

On rabat la section sur (H) autour de la trace horizontale αP du plan de bout (fig. 1386 *b*).

◇ *Exemple 3. — Un cylindre de révolution est posé sur le plan (H). On coupe ce cylindre par un plan de bout. Épure et vraie grandeur de la section.*

L'ellipse de section est rabattue sur (H) autour de αP (fig. 1386 *c*).

◇ *Exemple 4. — Soit un cube $ABCDA_1B_1C_1D_1$; I,J,K,L sont les milieux des arêtes AB, AD, B_1C_1, D_1C_1. Étudier la section du cube par le plan (IJKL).*

Le plan IJKL est supposé de front; le cube étant posé sur (H), on rabat sur (H) autour de αP. La section est un hexagone régulier (fig.1386 *d*).

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE XI

Exercices.

2125. La ligne de terre est appelée $y'y$ (fig. ex. 2125).
Les traces d'un plan sont :
trace horizontale αu; $(\alpha x; \alpha u) = 45°$;
trace verticale $\alpha v'$; $(\alpha x; \alpha v') = 45°$.
Construire l'angle de ces traces.

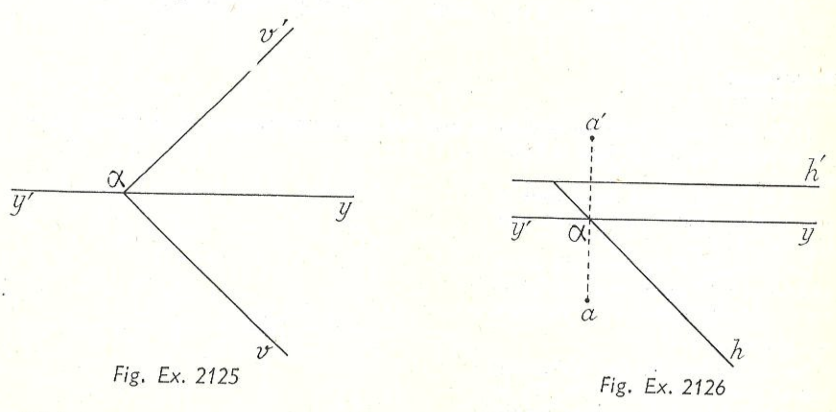


Fig. Ex. 2125

Fig. Ex. 2126

2126. La ligne de terre est appelée $y'y$ (fig. ex. 2126).
Un point $(a; a')$ a pour éloignement + 3 cm et pour cote + 4 cm. Une droite horizontale $(h; h')$ a pour cote + 2 cm et a pour projection horizontale αh; α est situé sur $y'y$ et sur la ligne de rappel aa'; $(\alpha x; \alpha h) = 45°$.
Construire l'angle de $y'y$ avec le plan défini par le point et la droite.

2127. La ligne de terre est appelée $y'y$ (fig. ex. 2127).

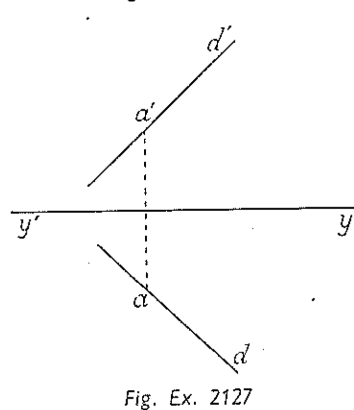


Fig. Ex. 2127

Une droite (d; d') passe par le point (a; a') d'éloignement + 3 cm et de cote + 4 cm. Ses projections font avec $y'y$ des angles de 45°.

Construire les angles qu'elle fait avec les plans de projection.

2128. On donne les points :

A (2; 0; 4) B (3; − 4; 6) C (0; 4; 5).

Construire le triangle ABC en vraie grandeur.

2129. On donne les points :

S (− 3; 0; 4) A (4; 1; 2)

B (+ 3; − 4; 6) C (4; − 2; 5)

Mener par S la perpendiculaire (Δ) au plan ABC, et construire la distance de S à ce plan.

2130. Soient les deux plans (P) et (Q);
(P) est déterminé par les points A (+ 5; − 3; 4) B (− 1; 1; − 1) C (4; − 2; 0);
(Q) est déterminé par les points D (− 1; 4; 1) E (3; 3; 4) F (0; − 1, 0).
Construire l'intersection de ces deux plans.

2131. On donne les points

A (1; 3; 6) B (− 6; 3; 0) C (− 3; 3; 5) D (4; 3; 2).

Construire le point d'intersection des droites AB et CD s'il existe, ainsi que l'angle de ces deux droites.

2132. On donne le plan ABC et la droite CD. Mener le plan passant par CD et perpendiculaire au plan ABC.

A (− 1; 4; 2) B (4; − 2; 0) C (2; 1; 4) D (0; 0; 7).

Problèmes.

2133. Soit M un point situé dans le plan horizontal de projection. Soient m et m' ses projections horizontale et frontale.

Soient N un point situé dans le plan frontal, n et n' ses projections (fig. ex. 2133).

On choisit sur la ligne de terre une origine O, un sens positif pour mesurer algébriquement les vecteurs tels que $\overrightarrow{m'n}$.

On rapportera le plan horizontal à deux axes orthonormés Ox, Oy, et le plan frontal à deux axes orthonormés Ox; Oz.

On appellera k la distance MN dans l'espace, et p une longueur constante donnée. (k et p sont donc des nombres positifs.)

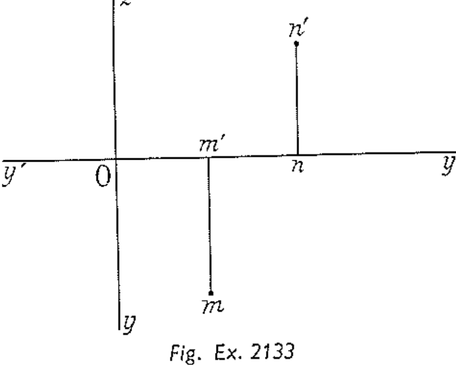


Fig. Ex. 2133

On assujettit les points M′ et N à vérifier constamment la relation

$$\overline{m'n} = k - p \qquad (1)$$

1° On place le point N en O. Lieu du point M vérifiant la relation (1). C'est une courbe Γ, que l'on caractérisera par son équation. Vérifier géométriquement le résultat, et mettre en évidence foyer et directrice de la courbe Γ.

2° M étant un point fixe pris sur la courbe Γ, déterminer dans le plan frontal le lieu du point N satisfaisant à la relation (1). On appellera (X; Z) les coordonnées du point N dans le plan frontal.

Ce lieu Δ du point N dépend-il de la position de M sur la courbe Γ ?

3° Montrer que si M et M_1 sont deux points fixes sur la courbe Γ, la différence $NM_1 - NM$ reste constante lorsque le point N décrit la courbe Δ.

2134. On considère en géométrie descriptive une ligne de terre xy et deux demi-droites αP, $\alpha Q'$ situées de part et d'autre de xy et faisant avec xy des angles aigus a et b (fig. ex. 2134).

La droite αP est la projection horizontale de la trace horizontale d'un plan. La droite $\alpha Q'$ est la projection frontale de la trace frontale de ce même plan.

1° Soit M un point de la trace frontale. Construire le rabattement de ce point autour de αP sur le plan horizontal de projection et en déduire l'angle aigu θ des traces dans l'espace.

2° On trouve la relation

$$\cos \theta = \cos a \,.\, \cos b \qquad (1)$$

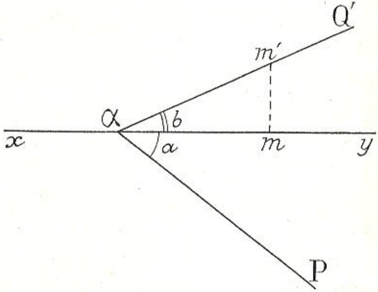


Fig. Ex. 2134

démontrer que réciproquement si dans un trièdre les angles supposés aigus des faces sont liés par la relation (1), le dièdre opposé à la face θ est droit. (On pourra construire un rectiligne de ce dièdre.)

3° Calculer en fonction de a et de b par une de leurs fonctions circulaires les angles aigus D et D′ que fait le plan PαQ′ avec les deux plans de projection.

Calculer l'expression $y = \text{tg}\,(D + D')$; on suppose les angles a et b complémentaires, exprimer y en fonction de $\dfrac{a-b}{2} = x$.

Étudier les variations de la fonction :

$$y = -\,2\sqrt{2}\,\frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

4° Un triangle EFG du plan PαQ′ se projette sur le plan horizontal suivant un triangle isocèle efg, $ge = gf$, ef est porté par αP. Déterminer l'angle $egf = 2\varphi$ pour que l'angle EFG soit droit.

2135. Il est recommandé de représenter la pyramide par les procédés de la géométrie descriptive; on prendra le plan ABCD comme plan horizontal de projection et AB perpendiculaire au plan frontal.

Une pyramide SABCD régulière, de hauteur a, a pour base un carré ABCD de cote $2a$.

1° Le cercle inscrit dans le triangle SAB se projette orthogonalement sur le plan ABCD suivant une ellipse, dont on demande de calculer les axes.

2° Un plan variable tourne autour de AB; il est repéré par l'angle φ de ce plan avec le plan ABCD $\left(\text{on supposera } 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\right)$. Ce plan coupe la pyramide suivant un quadrilatère ABMN qui se projette orthogonalement sur le plan ABCD suivant le quadrilatère AB*mn*. Quelle est la nature de ce quadrilatère AB*mn* ? Montrer que son aire peut s'écrire :

$$S = 2a^2 \frac{1 + \cos 2\varphi}{1 + \sin 2\varphi}.$$

Déterminer φ pour que $S = 1{,}4\, a^2$. (Tables de logarithmes.)

3° Évaluer le volume V de la pyramide SABMN en fonction de $t = \operatorname{tg} \varphi$. Variation et courbe représentative. (On calculera V en se plaçant dans le cas de figure de la seconde partie.)

2136. Deux points A et B sont sur une même horizontale de cote 2. La droite AB fait un angle de 45° avec le plan frontal et AB = 5 cm; l'éloignement de B est supérieur à celui de A.
Un carré ABCD a pour sommets consécutifs A et B et son plan fait un angle de 45° avec le plan horizontal de projection; la cote du point C est supérieure à 2.

1° Déterminer les projections du carré ABCD.

2° Construire un point S de cote supérieure à 2, situé à une distance de 10 cm du plan du carré sur la perpendiculaire à son plan menée par son centre.

3° Tracer, avec la ponctuation, les projections de la pyramide SACD.

2137. Représenter l'ensemble de deux plaques opaques ayant la forme de parallélogrammes dont les sommets A, B, C, D et E, F, G, H, sont définis par leurs coordonnées (x, y, z) en centimètres.
x est l'abscisse de la ligne de rappel, comptée à partir du milieu de la feuille, sur la ligne de terre; y est l'éloignement et z la cote.

A(− 7; 0; 0)	E(8; 0; 0)
B(− 3; 7; 0)	F(2; 0; 10)
C(2; 7; 7)	G(− 7; 4; 10)
D(− 2; 0; 7)	H(− 1; 4; 0)

2138. Un plan est défini par ses traces. Si $y'y$ est la ligne de terre, on prendra le plan $P\alpha Q'$ tel que

$$(\alpha y;\ \alpha P) = -45° \qquad (\alpha y;\ \alpha Q') = +30°$$

A 6 cm à droite de α, on placera la ligne de rappel du point A, cote 7 cm, éloignement 8 cm.
Distance du point A au plan.

2139. On considère un système d'axes orthonormés $Oxyz$; ainsi pour un point donné $(x;\ y;\ z)$ x est son éloignement, y son abscisse sur la ligne de terre et z sa cote.

On donne :

A (20; − 20; 60)	C (20; 20; 20)
B (60; − 20; 20)	D (60; 20; 60)

1° Représenter par une épure le tétraèdre opaque ABCD dont les sommets ont pour coordonnées les nombres précédents en millimètres.

2° A l'aide d'un rabattement sur le plan horizontal qui passe par AD, montrer que la face ACD est un triangle équilatéral. Que conclure, au sujet du tétraèdre ABCD.

3° Déterminer les traces du plan BCD. Construire l'épure du tétraèdre après rotation de + 45° autour de l'axe de bout du point A.
Quelle est, alors, la position du plan BCD ? Évaluer la distance de A à ce plan, en utilisant la figure obtenue.

Épures diverses [1].

2140. La base ABC d'un tétraèdre ABCD repose sur le plan (H).
On a AB = AC = 14 cm; BC = AD = 12 cm; BD = CD = 13 cm.
Construire les angles plans des dièdres qui ont pour arêtes respectives BC et AD.

2141. On donne un hexagone régulier de côté 3 cm. Le centre de l'hexagone est sur le grand axe, son éloignement est + 5, sa cote 0; le milieu de l'un des côtés de l'hexagone est dans (H). Le plan de l'hexagone fait 39° avec (H) et sa trace horizontale fait 53° avec $y'y$. Cet hexagone est la base d'une pyramide régulière, dont la hauteur est 15 cm et le sommet dans le second dièdre.
Trouver les projections de la pyramide et de sa section par le premier bissecteur.

2142. On donne le point A (4; 0; 0).
Construire un point B de (F) de cote 6 et tel que AB = 10,7.

2143. Construire une pyramide régulière à base carrée SABCD, connaissant $S\left(6; -\frac{9}{2}; 2\right)$, $C\left(8; \frac{9}{2}; 8\right)$ sachant que l'arête SA est verticale et dirigée vers le haut, et que l'éloignement de B est supérieur à celui de D.
Construire la section de la pyramide par le plan mené par D perpendiculairement à SB.

2144. On donne les points A (2,2; 0; 1,9), G (4,8; 5,2; 5,3). AG est la diagonale d'un parallélépipède rectangle dont une face est horizontale et une autre frontale.
Trouver les projections du parallélépipède ABDCEFGH.
Trouver sa section par le plan contenant les milieux des arêtes DH, BC et EF.

2145. On donne un point A (— 3; 0; 4). Mener par A une droite faisant avec (H) un angle de 35°, avec (F) un angle de 41°.
Parmi les droites possibles on considère celle (D) qui a sa trace frontale la plus éloignée de (H) et qui est à gauche du grand axe de la feuille.
Déterminer la plus courte distance de la droite (D) et de $y'y$.

(1) Ces épures sont faites sur une feuille 27 × 36; $y'y$ est le petit axe, et O est le centre de la feuille.

LIVRE XIII

CALCULS NUMÉRIQUES

CHAPITRE CVI

TABLES ET CALCULS NUMÉRIQUES

1387. Tables numériques.

Afin de faciliter les calculs et d'accroître leur rapidité, on a construit des tables donnant les valeurs de certaines fonctions f, continues et monotones dans l'intervalle utilisé.

Ce sont :

1° ***les tables de puissances,*** qui correspondent aux fonctions x^2, x^3, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{x}$.

L'intervalle est soit de 0 à 100, soit 0 à 1 000, pour les nombres entiers.

2° ***les tables d'exponentielles et de logarithmes népériens,*** qui correspondent aux fonctions e^x, e^{-x}, $\operatorname{Log} x$.

3° ***les tables de fonctions trigonométriques,*** qui correspondent aux fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

L'unité utilisée pour la variable x est :

— le radian (de 0 à 1,600);
— le grade (de 0 à 100);
— le degré sexagésimal (de 0 à 90);
— le degré décimal (de 0 à 90).

4° ***les tables de logarithmes décimaux des nombres*** de 0 à 10 000.

5° ***les tables de logarithmes décimaux des fonctions trigonométriques.***

L'unité utilisée pour x est souvent le grade ou le degré sexagésimal; quelques tables utilisent aussi le radian et le degré décimal.

1388. Les deux problèmes fondamentaux.

Une table numérique de la fonction f étant donnée, on peut se poser les deux problèmes suivants :

1° **Problème direct.** — *On donne $x = \alpha$, trouver une valeur approchée de $f(\alpha)$.*

Si α est dans la table, on a immédiatement $\beta = f(\alpha)$, avec la précision de la table.

Si α n'est pas dans la table, il existe deux valeurs consécutives de x telles que $a < \alpha < b$. On prend pour valeur approchée de $\beta = f(\alpha)$ un nombre β' compris entre $f(a)$ et $f(b)$; α' se calcule par une interpolation linéaire.

2° ***Problème inverse.*** — *On donne un nombre* β; *trouver* α *tel que* $f(\alpha) = \beta$.

Si le nombre β figure dans la table des valeurs de $f(x)$, on a immédiatement α.

Si le nombre β ne figure pas dans la table des valeurs de $f(x)$, il existe deux valeurs consécutives de x, a et b, telles que β est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On prend pour valeur approchée de α un nombre α' compris entre a et b; α' se calcule par une interpolation linéaire.

1389. Interpolation linéaire.

La méthode d'interpolation linéaire consiste à remplacer l'arc AB de la courbe représentative de la fonction $f(x)$ entre a et b par la corde AB (fig. 1389 a et b).

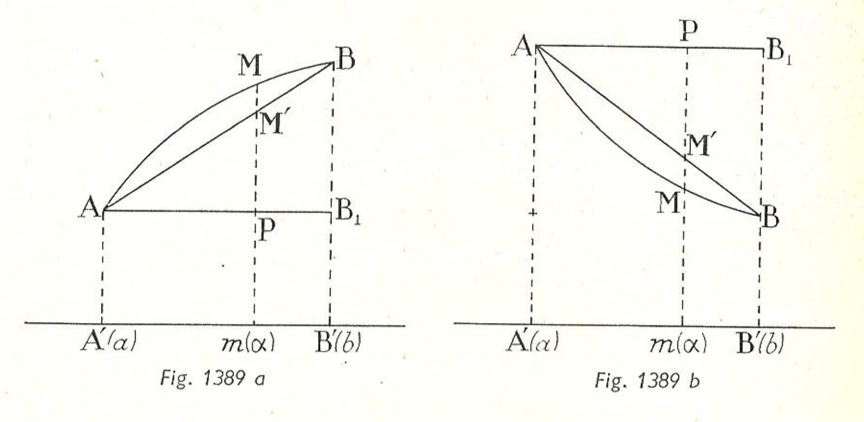


Fig. 1389 a *Fig. 1389 b*

Si M est le point d'abscisse α sur l'arc AB, on a :

$$\beta = \overline{mM}$$

L'interpolation linéaire consiste donc à remplacer β par :

$$\beta' = \overline{mM'}$$

M' étant sur la corde AB.

La parallèle à l'axe $x'Ox$ menée par A coupe mM en P, B'B en B_1; dans les triangles homothétiques APM' et AB_1B, on a :

$$\frac{\overline{PM'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{B_1B}}{\overline{AB_1}}$$

ou

$$PM' = (\alpha - a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et par suite

$$\overline{mM'} = \beta' = f(a) + \frac{\alpha - a}{b - a} \cdot [f(b) - f(a)]$$

On pose :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \mathbf{f(b) - f(a)} \\ \mathbf{h} &= \alpha - \mathbf{a} \\ \mathbf{i} &= \mathbf{b - a} \end{aligned}$$

D est la différence tabulaire;
h est l'accroissement de la variable;
i est l'intervalle.

La formule s'écrit donc :

$$\beta' = \mathbf{f(a)} + \mathbf{h} \cdot \frac{\boldsymbol{D}}{\mathbf{i}} \qquad (1389;\ 1)$$

Cette formule donne la solution du problème direct envisagé au n° 1388.
Elle donne aussi la solution du second problème; en effet, en posant $h' = \alpha' - a$, on a :

$$\beta = f(a) + h' \cdot \frac{D}{i}$$

D'où :

$$h' = [\beta - f(a)] \cdot \frac{i}{D}$$

On pose :

$$\delta = \beta - \mathbf{f(a)}$$

δ est l'accroissement de la fonction. D'où :

$$\alpha' = \mathbf{a} + \mathbf{i} \cdot \frac{\delta}{\boldsymbol{D}} \qquad (1389;\ 2)$$

Ces formules (1389, 1) et (1389, 2) sont utilisées dans les exercices suivants.

1390. Tables de puissances.

◇ *Exemple 1.* — Calculer $\beta = (12,6)^2$.

La table donne :

$$a = 12 \qquad f(a) = 12^2 = 144$$
$$b = 13 \qquad f(b) = 13^2 = 169$$

Donc :

$$D = 169 - 144 = 25$$
$$h = \alpha - a = 0,6$$
$$i = 1$$

D'où :

$$\beta' = f(a) + h \cdot \frac{D}{i}$$
$$= 144 + 0,6 \times 25$$

ou

$$\beta' = 159.$$

On a trouvé $\beta' = 159$ au lieu de $\beta = 158,76$.

◇ *Exemple 2.* — *Calculer* $\beta = (7,25)^3$.

La table donne :

$$a = 7 \qquad f(a) = 343$$
$$b = 8 \qquad f(b) = 512$$

Donc :

$$D = 512 - 343 = 169$$
$$h = 0,25$$
$$i = 1$$

D'où :

$$\beta' = f(a) + h \cdot \frac{D}{i}$$
$$= 343 + 0,25 \times 169$$

ou

$$\beta' = 385,25.$$

Un calcul plus précis donne 381,078.

1391. Tables d'exponentielles et de logarithmes népériens.

◇ *Exemple 1.* — *Calculer* $e^{0,323}$.

Les tables donnent :

$$a = 0,32 \qquad f(a) = e^{0,32} = 1,377\,1$$
$$b = 0,33 \qquad f(b) = e^{0,33} = 1,391\,0.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D &= 1{,}391\,0 - 1{,}377\,1 = 0{,}013\,9 \\ h &= 0{,}003 \\ i &= 0{,}01. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \beta' &= f(a) + h \cdot \frac{D}{i} \\ &= 1{,}377\,1 + \frac{3}{10} \times 0{,}013\,9 \\ &= 1{,}377\,1 + 0{,}0042 \end{aligned}$$

ou

$$\beta' = 1{,}381\,3.$$

Des tables plus précises donnent $e^{0{,}323} = 1{,}381\,265$.

◇ *Exemple 2. — Calculer* $e^{-0{,}323}$.

Les tables de la fonction $f(x) = e^{-x}$ donnent :

$$\begin{aligned} a &= 0{,}32 \qquad & f(a) &= e^{-0{,}32} = 0{,}726\,1 \\ b &= 0{,}33 \qquad & f(b) &= e^{-0{,}33} = 0{,}718\,9. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D &= f(b) - f(a) = 0{,}718\,9 - 0{,}726\,1 = -\,0{,}007\,2 \\ h &= \alpha - a = 0{,}003 \\ i &= 0{,}01. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \beta' &= f(a) + h \cdot \frac{D}{i} \\ &= 0{,}726\,1 - \frac{3}{10} \cdot 0{,}007\,2 \\ &= 0{,}726\,1 - 0{,}002\,2 \end{aligned}$$

ou :

$$\beta' = 0{,}723\,9.$$

Une table plus précise donne 0,723 974.

◇ *Exemple 3. — Calculer* Log 12,7.

Les tables donnent :

$$\begin{aligned} a &= 12 \qquad & f(a) &= \text{Log } 12 = 2{,}484\,9 \\ b &= 13 \qquad & f(b) &= \text{Log } 13 = 2{,}564\,9. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} D &= 2{,}564\,9 - 2{,}484\,9 = 0{,}080\,0 \\ h &= 0{,}7 \\ i &= 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\beta' = f(a) + h \cdot \frac{D}{i}$$
$$= 2{,}484\,9 + 0{,}7 \times 0{,}080$$
$$= 2{,}484\,9 + 0{,}056\,0$$

ou

$$\beta' = 2{,}540\,9$$

◇ *Exemple 4. — Sachant que* Log 120 = 4,787 5 *et* Log 125 = 4,828 3, *résoudre l'équation*

$$\text{Log}\, x = 4{,}804\,0$$

On a :

$$D = 4{,}828\,3 - 4{,}787\,5 = 0{,}040\,8$$
$$i = 5$$
$$\delta = \beta - f(a) = 4{,}843\,5 - 4{,}787\,5 = 0{,}016\,5$$

Par suite :

$$\alpha' = a + i \cdot \frac{\delta}{D}$$
$$= 120 + 2{,}022\,0$$

ou

$$\alpha' = 122{,}022.$$

En réalité Log 122 = 4,804 0.

◇ *Exemple 5. — Calculer* x *si* $e^x = 14{,}296$. *On donne* $e^{2,60} = 13{,}464$ et $e^{2,70} = 14{,}880$.

On a :

$$D = 14{,}880 - 13{,}464 = 1{,}416$$
$$\delta = \beta - f(a) = 14{,}296 - 13{,}464 = 0{,}832$$
$$i = 0{,}1$$

Par suite :

$$\alpha' = a + i\,\frac{\delta}{D}$$
$$= 2{,}60 + 0{,}059$$

ou

$$\alpha' = 2{,}659$$

En réalité

$$e^{2,66} = 14{,}296$$

◇ *Exemple 6. — Calculer x si* $e^{-x} = 0,2276$. *On donne :*

$$e^{-1,45} = 0,2346 \quad \text{et} \quad e^{-1,50} = 0,2231$$

On a :

$$D = 0,2231 - 0,2346 = -0,0115$$
$$\delta = \beta - f(a) = 0,2276 - 0,2346 = -0,007$$
$$i = 0,05$$

Par suite :

$$\alpha' = a + i \cdot \frac{\delta}{D}$$
$$= 1,45 + 0,0304.$$

ou

$$\alpha' = 1,4804$$

1392. Tables de fonctions trigonométriques.

◇ *Exemple 1. — Calculer le sinus d'un arc de 33,6 grades.*

Les tables donnent :

$$a = 33 \qquad f(a) = 0,4955$$
$$b = 34 \qquad f(b) = 0,5090$$

On a :

$$D = f(b) - f(a) = 0,5090 - 0,4955 = 0,0135$$
$$h = 0,6$$
$$i = 1$$

Par suite :

$$\beta' = f(a) + h \cdot \frac{D}{i}$$
$$= 0,4955 + 0,6 \times 0,0135$$
$$= 0,4955 + 0,0081$$

ou

$$\beta' = 0,5036$$

De façon plus précise on aurait :

$$\beta' = 0,503623$$

◇ *Exemple 2. — Calculer* $\cos 40°24'$.

La table donne :

$$a = 40 \qquad f(40) = 0,7660$$
$$b = 41 \qquad f(41) = 0,7547$$

On a :

$$D = f(b) - f(a) = 0{,}754\,7 - 0{,}766\,0 = -0{,}011\,3$$
$$h = \frac{24}{60} = 0{,}4$$
$$i = 1$$

Par suite :

$$\beta' = f(a) + h \cdot \frac{D}{i}$$
$$= 0{,}766\,0 - 0{,}4 \times 0{,}011\,3$$
$$= 0{,}766\,0 - 0{,}004\,5$$

ou

$$\beta' = 0{,}761\,5$$

De façon plus précise on aurait $\beta' = 0{,}761\,538$.

◇ *Exemple 3. — Calculer* x $(0 < x < 90^o)$ *en degrés sexagésimaux si sin* $x = 0{,}592\,5$.

On donne :

$$\sin 36^o = 0{,}587\,8$$
$$\sin 36^o 30' = 0{,}594\,8$$

D'où :

$$D = f(b) - f(a) = 0{,}594\,8 - 0{,}587\,8 = 0{,}007\,0$$
$$\delta = \beta - f(a) = 0{,}592\,5 - 0{,}587\,8 = 0{,}004\,7$$
$$i = 30'$$

Par suite :

$$\alpha' = a + i\,\frac{\delta}{D}$$
$$= 36^o + 20'$$

ou

$$\alpha' = 36^o 20'$$

◇ *Exemple 4. — Calculer* x *sachant que* cos $x = 0{,}631\,6$ $(0 < x < 90^o)$.

On a :

$$\cos 50^o 30' = 0{,}636\,1$$
$$\cos 51^o = 0{,}629\,3$$

D'où :

$$D = f(b) - f(a) = 0{,}629\,3 - 0{,}636\,1 = -0{,}006\,8$$
$$\delta = \beta - f(a) = 0{,}631\,6 - 0{,}636\,1 = -0{,}004\,5$$
$$i = 30'$$

Par suite :

$$\alpha' = a + i\,\frac{\delta}{D}$$
$$= 50^{o}30' + 20'$$

ou

$$\alpha' = 50^{o}50'$$

1393. Tables de logarithmes décimaux des nombres.

Les logarithmes décimaux s'écrivent en écriture normalisée (cf. n°s 720 à 729).

L'opposé du logarithme de x s'appelle le cologarithme de x (cf. nº 725) :

$$\text{colog}\, x = -\log x$$

La table donne les mantisses des nombres de 1 à 10 000.

◇ *Exemple 1. — Calculer log 234,75.*

La caractéristique est 2, car $10^2 < a < 10^3$.

On a :

$$\log 234{,}7 = 2{,}370\,51$$
$$\log 234{,}8 = 2{,}370\,70$$

D'où :

$$D = f(b) - f(a) = 2{,}370\,70 - 2{,}370\,51 = 19.10^{-5}$$
$$h = 0{,}05$$
$$i = 0{,}1$$

Par suite :

$$\beta' = f(a) + h \cdot \frac{D}{i}$$
$$= 2{,}370\,51 + 0{,}05 \times \frac{19 \times 10^{-5}}{0{,}1}$$
$$= 2{,}370\,51 + 9{,}5 \times 10^{-5}$$

ou

$$\beta' = 2{,}370\,605$$

ou

$$\beta' = 2{,}370\,61$$

En pratique, les calculs se disposent comme suit, afin de gagner du temps :

$$\begin{array}{rcl} \log 234{,}7 & = & 2{,}370\ 51 \\ 5 \rightarrow & & 9\ 5 \\ \hline \log 234{,}75 & = & 2{,}370\ 60\ 5 \\ & = & 2{,}370\ 61 \end{array} \qquad D = 19$$

La correction $\frac{5}{10}$ D est obtenue facilement en utilisant la table de parties proportionnelles ;

1	1,9
2	3,8
3	5,7
4	7,6
5	9,5
6	11,4
7	13,3
8	15,2
9	17,1

◇ *Exemple 2. — Calculer log* 328,233.

On a :

$$\begin{array}{rll} \log 328{,}2 & = 2{,}516\ 14 & \quad D = 13 \\ 3 \longrightarrow & \quad\ \ 3\ 9 & \\ 3 \longrightarrow & \quad\ \ 0\ 39 & \\ \hline \log 328{,}233 & = 2{,}516\ 18\ 29 & \\ & = 2{,}516\ 18 & \end{array}$$

◇ *Exemple 3. —* Calculer log 0,185 269.

On a :

$$\begin{array}{rll} \log 0{,}6185\ 2 & = \bar{1}{,}267\ 64 & \quad D = 24 \\ 6 \longrightarrow & \quad\ \ 14\ 4 & \\ 9 \longrightarrow & \quad\ \ 2\ 16 & \\ \hline \log 0{,}185\ 269 & = \bar{1}{,}267\ 80\ 56 & \\ & = \bar{1}{,}267\ 81 & \end{array}$$

◇ *Exemple 4. — Calculer* x *sachant que log* x = 2,128 44.

La caractéristique de log x est 2; la mantisse est 12844. Dans la table on trouve :

$$\log 134{,}4 = 2{,}128\ 40$$
$$\log 134{,}5 = 2{,}128\ 72$$

D'où :

$$D = 2{,}128\ 72 - 2{,}128\ 40 = 32 \times 10^{-5}$$
$$\delta = \beta - f(a) = 2{,}128\ 44 - 2{,}128\ 40 = 4 \times 10^{-5}$$
$$i = 0{,}1$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \alpha' &= a + i \cdot \frac{\delta}{D} \\ &= 134{,}4 + 0{,}1 \times \frac{4 \times 10^{-5}}{32 \times 10^{-5}} \\ &= 134{,}4 + 0{,}012\ 5 \end{aligned}$$

ou

$$\alpha' = 134{,}412\,5$$

et

$$x \simeq 134{,}413$$

En pratique on dispose les calculs de la façon suivante, et on utilise les tables de parties proportionnelles.

$$\begin{array}{lcr} 2{,}128\ 40 & = & \log 134{,}4 \\ 3\ 2 & \rightarrow & 1 \\ 0\ 96 & \rightarrow & 3 \\ \hline 2{,}128\ 44 & = & \log 134{,}413 \end{array} \qquad D = 32 \quad \delta = 4$$

et

$$x = 134{,}413$$

1394. Tables de logarithmes décimaux des fonctions trigonométriques.

Les logarithmes sont donnés dans la table, caractéristiques et mantisses. Les différences D sont dans la table.

◇ *Exemple 1. — On donne* $\theta = 45{,}928\,3$ *grades. Calculer* $\log \sin \theta$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} \log \sin 45{,}92 & = & \bar{1},819\ 79 \\ 8 & \rightarrow & 5\ 6 \\ 3 & \rightarrow & 0\ 21 \\ \hline \log \sin 45{,}928\ 3 & = & \bar{1},819\ 84\ 81 \\ & = & \bar{1},819\ 85 \end{array} \qquad D = 7$$

◇ *Exemple 2. — On donne* $\theta = 27{,}831\,7$ *grades. Calculer* $\log \cos \theta$.

On a :

$$\begin{array}{rcl} \log \cos 27{,}83 & = & \bar{1},957\ 11 \\ 1 & \rightarrow & -\ 0\ 3 \\ 7 & \rightarrow & -\ 0\ 21 \\ \hline \log \cos 27{,}831\ 7 & = & \bar{1},957\ 10\ 49 \\ & = & \bar{1},957\ 10 \end{array} \qquad D = -\ 3$$

◇ *Exemple 3. — On donne* $\theta = 29°17'27''$. *Calculer log tg* θ.

On a :

$$\begin{array}{lrl} \log \text{tg } 29°17' & = \bar{1},747\ 80 & \qquad D = 30 \\ 20'' \rightarrow & 10 & \\ 7'' \rightarrow & 3\ 5 & \\ \hline \log \text{tg } 29°17'27'' & = \bar{1},747\ 93\ 5 & \\ & = \bar{1},747\ 94 & \end{array}$$

◇ *Exemple 4. — On donne* $\theta = 54°28'51''$. *Calculer log cotg* θ.

On a :

$$\begin{array}{lrl} \log \text{cotg } 54°28' & = \bar{1},853\ 80 & \qquad D = -26 \\ 50'' \rightarrow & -21\ 7 & \\ 1'' \rightarrow & -\ 0\ 43 & \\ \hline \log \text{cotg } 54°28'51'' & = \bar{1},853\ 57\ 87 & \\ & = \bar{1},853\ 58 & \end{array}$$

◇ *Exemple 5. — Calculer x en grades* $(0 < x < 100)$ *si log sin* $x = \bar{1},816\ 10$.

On a :

$$\begin{array}{lrl} \bar{1},816\ 03 & = \log \sin 45,44 & \qquad D = 8 \quad \delta = 7 \\ 6.4 \rightarrow & 8 & \\ 0.64 \rightarrow & 8 & \\ \hline \bar{1},816\ 10\ 04 & = \log \sin 45,4488 & \end{array}$$

$$x = 45,4488 \text{ grades}$$

◇ *Exemple 6. — Calculer x en degrés sexagésimaux* $(0 < x < 90°)$ *si log tgx* $= \bar{1},812\ 95$.

On a :

$$\begin{array}{lrl} \bar{1},812\ 79 & = \log \text{tg } 30°1' & \qquad D = 28 \quad \delta = 16 \\ 14.0 \rightarrow & 30'' & \\ 2.3 \rightarrow & 5'' & \\ \hline \bar{1},812\ 95.3 & = \log \text{tg } 30°1'35'' & \end{array}$$

$$x = 30°1'35''$$

◇ *Exemple 7. — Calculer x en degrés sexagésimaux* $(0 < x < 90°)$ *si log cos* $x = \bar{1},912\ 08$.

On a :

$$\begin{array}{lrl} \bar{1},912\ 08 & = \log \cos 35°15' & \qquad D = -9 \quad \delta = 5 \\ 4.5 \rightarrow & -\ 30'' & \\ 0.45 \rightarrow & -\ 3'' & \\ \hline \bar{1},912\ 08 & = \log \cos 35°14'27'' & \end{array}$$

$$x = 35°14'27''$$

◇ *Exemple 8. — Calculer x en grades* ($0 < x < 100$) *si log cotg* $x = 0{,}073\,00$.

On a :

$$\begin{array}{lll} 0{,}072\ 93 & = \log \operatorname{cotg} 44{,}68 & D = 13 \quad \delta = 7 \\ \quad 6.5 \rightarrow & \quad -5 & \\ \quad 0.52 \rightarrow & \quad -4 & \\ \hline 0{,}072\ 00 & = \log \operatorname{cotg} 44{,}67\,4\,6 & \end{array}$$

$$x = 44{,}6746 \text{ grades}$$

1395. Programmation d'un calcul.

Avant d'effectuer un calcul numérique, il est indispensable de prévoir le déroulement des calculs partiels; il est même utile de préparer sur la feuille de papier la disposition de ces calculs partiels. C'est la programmation du calcul.

◇ *Exemple.* — Calculer $x = \dfrac{a^2\sqrt{b}}{c^3}$ avec

$$a = 23{,}41$$
$$b = 0{,}3422$$
$$c = 1{,}438.$$

Les nombres ne contiennent que quatre chiffres significatifs; les mantisses sont donc dans la table.

On a : $\log x = 2 \log a + \dfrac{1}{2} \log b + 3 \operatorname{colog} c$

On établit d'abord le programme suivant :

$$\begin{array}{rl} \log c = & \\ \operatorname{colog} c = & 3.\operatorname{colog} c = \\ \log a = & 2 \quad \log a = \\ \log b = & \frac{1}{2} \quad \log b = \\ \hline & \log x = \end{array}$$

Les calculs partiels permettent de remplir ce programme.

$$\begin{array}{rl} \log c = 0{,}157\ 76 & \\ \operatorname{colog} c = \bar{1}{,}842\ 24 & 3.\ \operatorname{colog} c = \bar{1}{,}526\ 72 \\ \log a = 1{,}369\ 40 & 2 \quad \log a = 2{,}738\ 80 \\ \log b = \bar{1}{,}534\ 28 & \frac{1}{2} \quad \log b = \bar{1}{,}767\ 14 \\ \hline & \log x = 2{,}032\ 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2{,}032\ 62 = \log 107{,}8 & & D = 40 \quad \delta = 4 \\ \qquad\quad 4 \qquad\qquad\quad 1 & & \\ \hline 2{,}032\ 66 = \log 107{,}81 & & \end{array}$$

Et : $x = 107{,}81$

1396. Quelques calculs numériques.

◇ *Exemple 1.* — Calculer $x = \sqrt[3]{1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{11}}$

On pose :

$$A = \frac{\pi\sqrt{3}}{11}$$

et

$$x = \sqrt[3]{1 + A}$$

Le calcul est alors facile à programmer.

$$\begin{array}{rl}
\log 11 &= 1{,}041\ 39 \\
\text{colog } 11 &= \bar{2}{,}958\ 61 \\
\log \pi &= 0{,}497\ 15 \\
\log \sqrt{3} &= 0{,}238\ 56 \\
\hline
\log A &= \bar{1}{,}694\ 32
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\bar{1}{,}694\ 25 & = \log 0{,}4946 & & \\
\quad 6.3 \rightarrow & \quad 7 \rightarrow & & \\
\quad 0.72 \rightarrow & \quad 8 \rightarrow & & \\
\hline
\bar{1}{,}694\ 32 & = \log 0{,}494\ 678 & &
\end{array}$$

$$A = 0{,}494\,678$$

$$1 + A = 1{,}494\,678$$

$$\begin{array}{llll}
\log(1 + A) = \log 1{,}494 & = 0{,}174\ 35 & & D = 29 \\
\qquad 6 \rightarrow & \quad 17\ 4 & & \\
\qquad 8 \rightarrow & \quad 2\ 32 & & \\
\hline
\log(1 + A) & = 0{,}174\ 55 & & \\
\frac{1}{3}\log(1 + A) & = 0{,}058\,10 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
0{,}058\ 05 & = \log 1{,}143 & D = 38 & \delta = 13 \\
\quad 11.4 \rightarrow & \quad 3 & & \\
\quad 1.52 \rightarrow & \quad 4 & & \\
\hline
0{,}058\ 18 & = \log 1{,}143\,34 & &
\end{array}$$

$$x = 1{,}143\ 34$$

◇ *Exemple 2.* — x *étant la mesure d'un angle résoudre l'équation :*

$$2{,}315 \cos x + 1{,}732 \sin x = 1{,}601.$$

On pose :

$$a = 2{,}315 = \rho.\ \cos\varphi$$
$$b = 1{,}732 = \rho.\ \sin\varphi.$$

L'équation devient

$$\rho\ (\cos x \cos\varphi + \sin x \sin\varphi) = 1{,}601$$

ou

$$\cos(x - \varphi) = \frac{1{,}601}{\rho} = \frac{1{,}601 \times \sin\varphi}{b}$$

D'où :

$$\log\cos(x - \varphi) = \log 1{,}601 + \text{colog}\ b + \log\sin\varphi.$$

On a :

$$0 < \varphi < 100$$

avec :

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{1{,}732}{2{,}315}$$

Et :

$$\log \text{tg}\ \varphi = \log 1{,}732 \quad + \text{colog}\ 2{,}315.$$
$$\log a = \log 2{,}315 \quad = 0{,}364\ 55$$
$$\begin{cases} \text{colog}\ a = \text{colog}\ 2{,}315 = \bar{1}{,}635\ 45 \\ \log b = \log 1{,}732 \quad = 0{,}238\ 55 \end{cases}$$
$$\log \text{tg}\ \varphi = \bar{1}{,}874\ 00$$

$$\bar{1}{,}873\ 97 = \log \text{tg}\ 40{,}89 \qquad D = 15 \quad \delta = 3$$
$$3 \qquad\qquad 2$$
$$\bar{1}{,}874\ 00 = \log \text{tg}\ 40{,}892$$
$$\varphi = 40{,}892 \text{ grades}$$

$$\begin{cases} \log\sin 40{,}892 = \bar{1}{,}777\ 47 \\ \log\ 1{,}601 = 0{,}204\ 39 \\ \text{colog}\ b = \bar{1}{,}761\ 45 \end{cases}$$
$$\log\cos(x - \varphi) = \bar{1}{,}743\ 31$$

$$\bar{1}{,}743\ 31 = \log\cos 62{,}6400$$

$$x - \varphi = 62{,}6400 \quad \text{mod } 400$$
ou
$$x - \varphi = -\ 62{,}6400 \quad \text{mod } 400$$

et

$$x = \varphi \pm 62{,}6400 \quad \text{mod } 400$$
$$= 40{,}892 \pm 62{,}640 \quad \text{mod } 400$$

et

$$x = 103{,}532 \quad \text{mod } 400$$
$$x = -\ 21{,}748 \quad \text{mod } 400$$

◇ *Exemple 3. — Calculer X, Y, r, θ tels que*

$$X + iY = r(\cos\theta + i\sin\theta) = a + c + \frac{ac}{b}$$

avec

$$a = 249{,}1 + i.\,90{,}63$$
$$b = 1836 + i.\,2938$$
$$c = 206 + i.\,128{,}8$$

On a :

$$a = \rho_a(\cos\theta_a + i\sin\theta_a)$$
$$b = \rho_b(\cos\theta_b + i\sin\theta_b)$$
$$c = \rho_c(\cos\theta_c + i\sin\theta_c)$$

$$\operatorname{tg}\theta_a = \frac{90{,}63}{249{,}1} \qquad \operatorname{tg}\theta_b = \frac{2938}{1836} \qquad \operatorname{tg}\theta_c = \frac{128{,}8}{206}$$

$$\rho_a = \frac{90{,}63}{\sin\theta_a} \qquad \rho_b = \frac{2938}{\sin\theta_b} \qquad \rho_c = \frac{128{,}8}{\sin\theta_c}$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{\rho_a\rho_c}{\rho_b}\left[\cos(\theta_a + \theta_c - \theta_b) + i\cdot\sin(\theta_a + \theta_c - \theta_b)\right]$$
$$= \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$
$$= x + iy$$

D'où les calculs suivants :

$$\log 249{,}1 = 2{,}396\,37$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{colog } 249{,}1 = \bar{3}{,}603\,63\\ \log 90{,}63 = 1{,}957\,27\end{array}\right.$$
$$\log\operatorname{tg}\theta_a = \bar{1}{,}560\,90$$
$$\theta_a = 22{,}2143 \text{ gr}$$

$$\log\sin\theta_a = \bar{1}{,}533\,90$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{colog}\sin\theta_a = 0{,}466\,10\\ \log 90{,}63 = 1{,}957\,27\end{array}\right.$$
$$\log\rho_a = 2{,}423\,37$$

$$\log 1836 = 3{,}263\,87$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{colog } 1836 = \bar{4}{,}736\,13\\ \log 2938 = 3{,}468\,05\end{array}\right.$$
$$\log\operatorname{tg}\theta_b = 0{,}204\,18$$
$$\theta_b = 64{,}442\,5 \text{ gr}$$

$$\log\sin\theta_b = \bar{1}{,}928\,41$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{colog}\sin\theta_b = 0{,}071\,59\\ \log 2938 = 3{,}468\,05\end{array}\right.$$
$$\log\rho_b = 3{,}539\,64$$

$$\log 206 = 2{,}313\,87$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{colog } 206 = \bar{3}{,}686\,13\\ \log 128{,}8 = 2{,}109\,92\end{array}\right.$$
$$\log\operatorname{tg}\theta_c = \bar{1}.796\,05$$
$$\theta_c = 35{,}572\,7 \text{ gr}$$

$$\log\sin\theta_c = \bar{1}{,}724\,40$$
$$\left\{\begin{array}{l}\text{colog}\sin\theta_c = 0{,}275\,60\\ \log 128{,}8 = 2{,}109\,92\end{array}\right.$$
$$\log\rho_c = 2{,}385\,52$$

$$\begin{aligned} \theta_a + \theta_c &= 57{,}787\,0 \\ -\theta_b &= -64{,}442\,5 \\ \hline \omega &= -6{,}655\,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \rho_a &= 2{,}423\,37 \\ \log \rho_c &= 2{,}385\,52 \\ \operatorname{colog} \rho_b &= \bar{4}{,}460\,36 \\ \hline \log \rho &= 1{,}269\,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos 6{,}655\,5 &= \bar{1}{,}997\,62 \\ \log \rho &= 1{,}269\,25 \\ \hline \log x &= 1{,}266\,87 \\ x &= 18{,}487\,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 6{,}655\,5 &= \bar{1}{,}018\,51 \\ \log \rho &= 1{,}269\,24 \\ \hline \log |y| &= 0{,}287\,76 \\ y &= -1{,}939\,82 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} X &= 249{,}1 + 206 \quad + 18{,}49 = 473{,}59 \\ Y &= 90{,}63 + 128{,}8 - 1{,}94 \ = 217{,}49 \end{aligned}$$

De plus :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{Y}{X} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{Y}{\sin \theta}$$

Et :

$$\begin{aligned} \log X &= 2{,}675\,40 \\ \left\{ \begin{aligned} \operatorname{colog} X &= 3{,}324\,60 \\ \log Y &= 2{,}337\,44 \end{aligned} \right. \\ \hline \log \operatorname{tg} \theta &= \bar{1}.662\,04 \\ \theta &= 27{,}407\,2 \text{ gr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin \theta &= \bar{1}{,}620\,49 \\ \operatorname{colog} \sin \theta &= 0{,}379\,51 \\ \log Y &= 2{,}337\,44 \\ \hline \log r &= 2{,}716\,95 \\ r &= 521{,}14 \end{aligned}$$

En résumé :

$$\left\{ \begin{aligned} X &= 473{,}59 \\ Y &= 217{,}49 \\ \theta &= 27{,}407\,2 \text{ grades} \\ r &= 521{,}15 \end{aligned} \right.$$

CHAPITRE CVII

PROBLÈMES

1397. Problème 1.

On considère la fonction f_m :

$$f_m : \quad x \in R \longrightarrow f_m(x) = y = \frac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3} \in R.$$

1° Étudier les variations de la fonction f_4, obtenue pour $m = 4$. Construire la courbe représentative (C_n) en axes orthonormés; montrer que cette courbe admet un axe de symétrie.

2° Quelles sont les valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m,

a) n'admet ni maximum, ni minimum;

b) admet un maximum et un minimum;

c) admet seulement un minimum?

Étudier les cas particuliers $m = 1$ ou $m = 3$.

3° Calculer, en fonction de m, les coordonnées du point A d'intersection de la courbe (C_m) représentative de la fonction f_m et de son asymptote parallèle à $x'Ox$.

Calculer les coordonnées du point B, autre que O et A, intersection de la courbe (C_m) et de la droite OA.

4° Calculer les coordonnées du point M, conjugué harmonique de O par rapport aux points A et B. Quel est le lieu géométrique du point M?

En supposant connus les résultats du 3°, retrouver géométriquement le lieu du point M.

1° Pour $m = 4$, on obtient la fonction f_m :

$$f_4 : \quad x \in R \longrightarrow y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3} \in R.$$

Le dénominateur s'annule pour $x = 1$ et $x = 3$; ces valeurs sont les pôles de la fonction f_4. La fonction est définie dans $R - \{1; 3\}$.

Lorsque x tend vers $\pm \infty$, la fonction tend vers 1; $y = 1$ est la valeur asymptotique de la fonction.

La dérivée est :

$$y' = \frac{(x^2 - 4x + 3)(2x - 4) - (x^2 - 4x)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$= \frac{2(x-2)(x^2 - 4x + 3 - x^2 + 4x)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

ou

$$y' = \frac{6(x-2)}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

La dérivée y' change de signe, en s'annulant, pour $x = 2$; pour $x = 2$ on a $y(2) = 4$. On peut alors construire la tableau de variation :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

La courbe (C_4) est représentée sur la figure (1397 *a*) elle a trois asymptotes d'équations $x = 1$, $x = 3$ et $y = 1$.

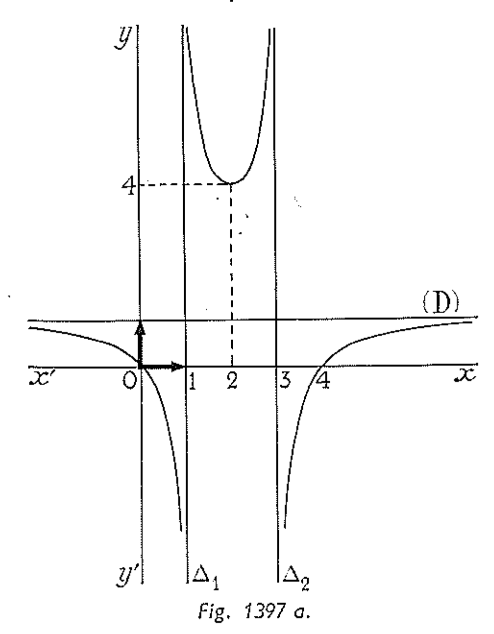


Fig. 1397 a.

Cette courbe montre que seule la droite d'équation $x = 2$ peut être un axe de symétrie. Pour le vérifier on calcule $f_4\,(4 - x)$; on a :

$$f_4\,(4 - x) = \frac{(4 - x)^2 - 4\,(4 - x)}{(4 - x)^2 - 4\,(4 - x) + 3}$$
$$= \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Donc :

$$(\forall x) : f_4\,(4 - x) = f_4\,(x)$$

ce qui prouve que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie (fig. 1397 *b*).

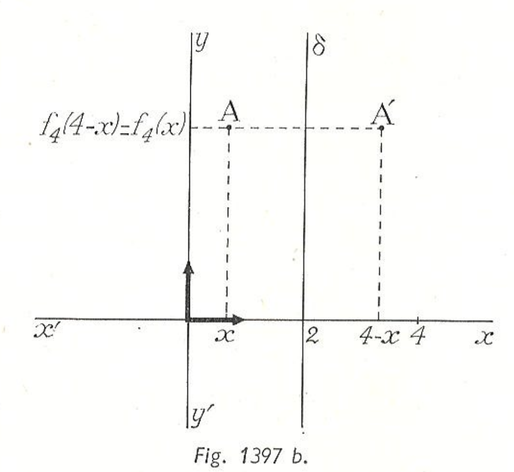


Fig. 1397 b.

2º Pour étudier les extrémums de la fonction f_m, on calcule la dérivée :

$$y' = \frac{(x^2 - 4x + 3)\,(2x - m) - (x^2 - mx)\,(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$
$$= \frac{(m - 4)\,x^2 + 6x - 3m}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Les extrémums sont donnés par les solutions de $y' = 0$ appartenant à $R - \{1; 3\}$, ou

$$N\,(x) = (m - 4)\,x^2 + 6\,x - 3\,m = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\begin{aligned}\Delta' &= 9 + 3\,m\,(m - 4)\\ &= 3\,m^2 - 12\,m + 9\\ &= 3\,(m^2 - 4\,m + 3)\\ &= 3\,(m - 1)\,(m + 3)\end{aligned}$$

Si $m \in]1; 3[$, Δ' est négatif; le trinôme N (x) n'a pas de solution et a le signe de $m - 4$, c'est-à-dire que N (x) est négatif: il n'y a pas d'extrémum.

Si $m \notin [1; 3]$, Δ' est positif; le trinôme N (x) a deux solutions distinctes et il y a deux extrémums.

Si $m = 1$, on a $f_1(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$. Cette fonction f_1 n'est pas définie pour $x = 1$ et $x = 3$; l'ensemble de définition est R $- \{1; 3\}$.

Mais on a dans R $- \{1; 3\}$:

$$f_1(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x}{x-1}.$$

On peut donc prolonger la fonction par continuité pour $x = 1$, en prenant pour valeur $f_1(1) = -\frac{1}{2}$. La courbe représentative (C_1) est alors une hyperbole équilatère. (Revoir à ce sujet le n° 741.)

Si $m = 3$, on a $f_3(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 3}$. L'ensemble de définition est encore R $- \{1; 3\}$. Mais on a, dans cet ensemble :

$$f_3(x) = \frac{x(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x}{x-1}.$$

On peut encore prolonger la fonction par continuité pour $x = 3$ en prenant $f_3(3) = \frac{3}{2}$. La courbe représentative (C_3) est une hyperbole équilatère.

3° Le point A est l'intersection de la courbe (C_m) et de l'asymptote de cette courbe, d'équation $y = 1$. Les coordonnées de A sont donc solutions du système

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3} \\ y = 1. \end{cases}$$

L'équation donnant l'abscisse de A est :

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - mx$$

ou

$$(m - 4)x + 3 = 0$$

D'où ; si $m \neq 4$

$$A \begin{cases} x = \dfrac{3}{4 - m} \\ y = 1. \end{cases}$$

Si $m = 4$, il n'y a pas de solution; le point A n'existe pas.

La droite OA a pour équation

$$y = \frac{4 - m}{3} \cdot x$$

Les coordonnées des points d'intersection de (C_m) et de OA sont données par le système

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3} \\ y = \dfrac{4 - m}{3} \cdot x. \end{cases}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection est

$$\frac{x^2 - mx}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(4 - m)\,x}{3}$$

ou

$$3\,x\,(x - m) = x\,(x - 1)\,(x - 3)\,(4 - m)$$

ou

$$x.\,[-\,3\,(x - m) + (x - 1)\,(x - 3)\,(4 - m)] = 0$$

Cette équation admet les solutions $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{4 - m}$, qui correspondent aux points O et A. On a :

$$\begin{aligned}(x - 1)\,(x - 3)\,(4 - m) - 3\,x + 3\,m &= (4 - m)\,x^2 + (4\,m - 19)x + 12 \\ &= [(4 - m)\,x - 3].[x - 4]\end{aligned}$$

Donc l'abscisse du point B est $x = 4$.

Ainsi les coordonnées de B sont :

$$B \left| \begin{array}{l} x = 4 \\ y = \dfrac{4\,(4 - m)}{3} \end{array} \right.$$

4° Le quaterne harmonique (O, M; A, B) se projette sur $x'Ox$ suivant un quaterne harmonique (O, M'; A'; B'). Si $(x; y)$ sont les coordonnées de M, la condition de Descartes donne

$$\frac{2}{\overline{OM'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OB'}}$$

ou

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x_A} + \frac{1}{x_B} = \frac{x_A + x_B}{x_A x_B}$$

Or :

$$x_A + x_B = \frac{3}{4 - m} + 4 = \frac{19 - 4m}{4 - m}$$

et

$$x_A x_B = \frac{12}{4 - m}$$

Par suite :

$$\frac{x_A + x_B}{x_A \cdot x_B} = \frac{19 - 4m}{12}$$

et

$$\frac{x}{2} = \frac{12}{19 - 4m}$$

ou

$$x = \frac{24}{19 - 4m}$$

On en déduit :

$$y = \frac{4 - m}{3} \cdot x = \frac{4 - m}{3} \times \frac{24}{19 - 4m} = \frac{8(4 - m)}{19 - 4m}$$

D'où :

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{24}{19 - 4m} \\ y = \dfrac{8(4 - m)}{19 - 4m} \end{array} \right.$$

Ce sont là les équations paramétriques du lieu de M. En éliminant m on obtient l'équation implicite de ce lieu.

$$(19 - 4m)\,x = 24$$

D'où

$$m = \frac{19x - 24}{4x} \qquad 4 - m = \frac{24 - 3x}{4x}$$

et

$$y = 8 \cdot \frac{24 - 3x}{4x} \cdot \frac{x}{24}$$
$$= \frac{24 - 3x}{12}$$

ou

$$y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

C'est une droite, en totalité.

Remarque géométrique.

Le lieu de A est la droite D d'équation $y = 1$; le lieu de B est la droite (D') d'équation $x = 4$. Le lieu de M est donc la polaire du point O par rapport à ces deux droites; c'est donc une droite passant par le point $\Omega = D \cap D'$.

Si la droite OM est confondue avec Ox, le point A est à l'infini sur $x'Ox$, et son conjugué est le point d'abscisse 4; le point M a pour abscisse 8 sur $x'Ox$. Un raisonnement analogue montre que la polaire coupe $y'Oy$ au point d'ordonnée 2. D'où l'équation

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1$$

ou

$$y = -\frac{1}{4}x + 2.$$

1398. Problème 2.

On considère tous les cercles (C) du plan caractérisés par la propriété suivante : O désignant un point fixe donné et T, T' les points de contact des tangentes menées de O au cercle (C), le triangle OTT' est équilatéral.

1º Lieu des centres des cercles (C) qui passent par un point donné A.

2° Lieu des centres des cercles (C) qui sont tangents à une droite donnée (D) ne passant pas par O.

3° On considère les cercles (C) qui sont centrés sur une droite donnée (Δ) ne passant pas par O. Trouver le lieu géométrique des points T, T′ relatifs à ces cercles, ainsi que l'enveloppe de la droite TT′.

4° Construire les cercles (C) centrés sur la droite (Δ) et passant par le point A. Discussion.

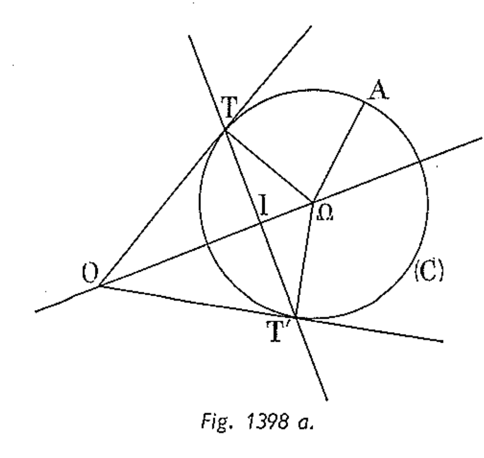


Fig. 1398 a.

1° Le triangle OTT′ étant équilatéral, et Ω étant le centre du cercle (C), on a (fig. 1398 *a*) :

$$\Omega T = \frac{O\Omega}{2}$$

ou

$$O\Omega = 2 \cdot \Omega T$$

D'où

$$O\Omega = 2 \cdot \Omega A$$

ou

$$\frac{\Omega O}{\Omega A} = 2.$$

Le lieu de Ω est le cercle d'Apollonius (Γ) relatif aux points O, A et au nombre 2 (fig. 1398 *b*).

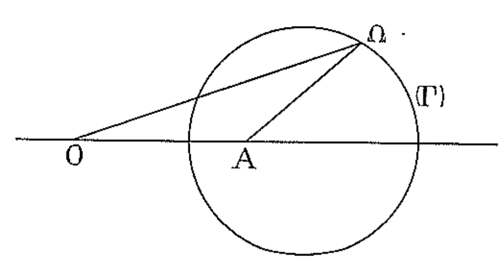


Fig. 1398 b.

2° Si le point de contact de (D) et (C) est H (fig. 1398 c) on a :

$$\Omega O = 2 \cdot \Omega H$$

Le lieu de Ω est donc l'hyperbole de foyer O, de directrice (D) et d'excentricité e = 2. (Les deux branches conviennent.)

3° On a :

$$\overline{\text{angle}}\,(O\Omega\,;OT) = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{\text{angle}}\,(O\Omega\,;OT') = -\frac{\pi}{6}$$

et

$$\frac{OT}{O\Omega} = \frac{OT'}{O\Omega} = \frac{O\Omega \cdot \cos\frac{\pi}{6}}{O\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Par suite T est l'image de Ω dans la similitude sim $\left(0\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{\pi}{6}\right)$ et T′ est l'image de Ω dans la similitude sim $\left(0\,;\frac{\sqrt{3}}{2}\,;-\frac{\pi}{6}\right)$.

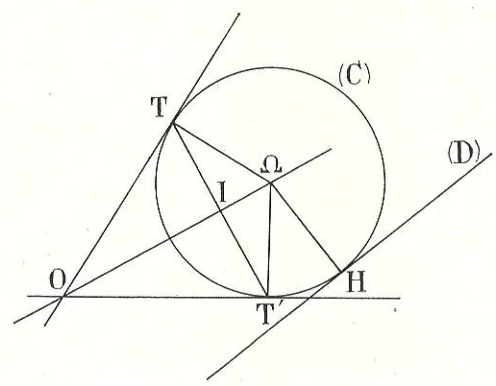


Fig. 1398 c.

Le lieu de T est donc une droite δ et le lieu de T′ une droite δ', qui se construisent facilement (fig. 1398 *d*.)

D'autre part, on a :

$$OI = OT\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \left(O\Omega \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{4}\,O\Omega$$

Et :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{O\Omega}$$

I est l'image de Ω dans l'homothétie hom $\left(0; \frac{3}{4}\right)$. Le lieu de I est donc une droite (d) image de (Δ) dans cette homothétie (fig. 1398 d).

Le point I décrivant (d), la droite TT' enveloppe une parabole de foyer Ω_0 et de tangente au sommet (d).

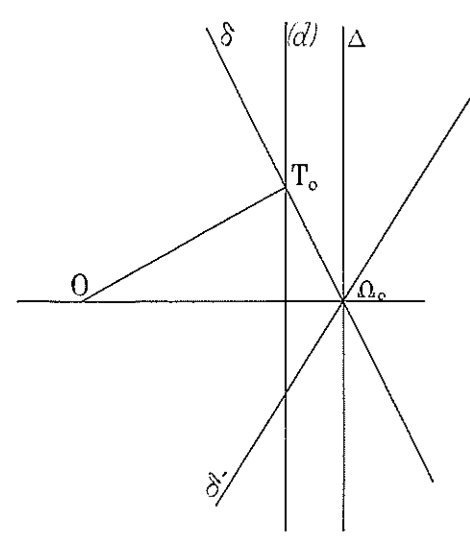


Fig. 1398 d.

4° Si un cercle (C) est centré sur (Δ) et passe par A, son centre Ω appartient à (Δ) et au cercle d'Apollonius (Γ) étudié au 1°.

Si (Δ) coupe (Γ) en deux points il y a deux cercles (C); si (Δ) est tangente à (Γ), il y a un cercle (C); si (Δ) ne coupe pas (Γ), il n'y a pas de solution.

1399. Problème 3.

Le plan est rapporté à deux axes x'Ox et y'Oy normés avec angle (Ox; Oy) = θ; M est un point de x'Ox avec $\overline{OM} = x$, et P est un point de y'Oy avec $\overline{OP} = y$. Ces points sont animés de mouvements uniformes de vitesses respectives v et w. On désigne par x_0 et y_0 les abscisses de M et P à la date t = 0.

1° Calculer $u = \|\overrightarrow{MP}\|$ en fonction de la date t; étudier les variations de u et calculer la valeur de son minimum.

2° Examiner le cas particulier $x_0 = y_0 = 0$. Lieu du milieu Q de MP. Vitesse de Q.

3° On suppose désormais que x_0 et y_0 ne sont pas tous deux nuls. Montrer qu'il existe dans le plan des axes un point Ω tel que le triangle ΩMP reste constamment semblable à un triangle déterminé; quel est le lieu de la projection de Ω sur MP? Que peut-on en déduire pour l'enveloppe de la droite MP?

4° Lieu du milieu Q de MP; vitesse de ce point.

1° L'équation du mouvement de M est

$$x = vt + x_0$$

et celle du mouvement de P est :

$$y = wt + y_0$$

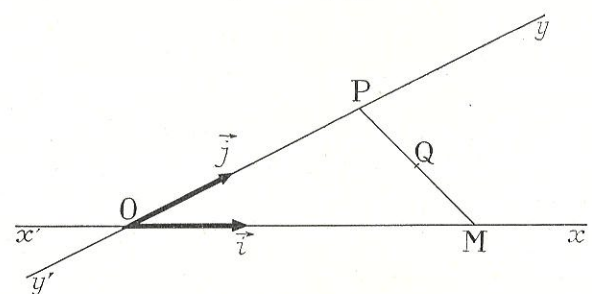


Fig. 1399 a.

D'autre part :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$$
$$= y \cdot \vec{j} - x \cdot \vec{i}$$

D'où :

$$u^2 = \left\|\overrightarrow{MP}\right\|^2 = \overrightarrow{MP}^2 = \left(y\vec{j} - x\vec{i}\right)$$
$$= x^2 + y^2 - 2xy \cdot \vec{i} \cdot \vec{j}$$

ou

$$u^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta.$$

En fonction de t, on a

$$u^2 = (vt + x_0)^2 + (wt + y_0)^2 - 2\ (vt + x_0)\ (wt + y_0)\ \cos\ \theta$$
$$= (v^2 + w^2 - 2\ v\ w\ \cos\ \theta)t^2 + 2\ [vx_0 + wy_0 - (wx_0 + vy_0)\cos\theta]\,t + $$
$$+ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 y_0 \cos\ \theta$$

u étant positif varie comme u^2. Le coefficient $a = v^2 + w^2 - 2vw \cos\theta$ est toujours positif; en effet, on a :

$$a = v^2 \left(1 + \frac{w^2}{v^2} - 2\frac{w}{v}\cos\theta\right)$$
$$= v^2\,(z^2 - 2\,z\cos\theta + 1)$$

en posant $z = \frac{w}{v}$; et le trinôme $z^2 - 2z\cos\theta + 1$ a un discriminant $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$ qui est toujours négatif; ainsi a est positif et u^2, donc u passe toujours par un minimum.

Ce minimum a lieu à la date

$$t_m = -\frac{vx_0 + wy_0 - (wx_0 + vy_0)\cos\theta}{v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta}$$

Le minimum de u^2 est donc :

$$\mu = \frac{ac - b'^2}{a}$$

On a :

$$\begin{aligned} ac - b'^2 &= (v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta)(x_0^2 + y_0^2 - 2x_0y_0\cos\theta) - [vx_0 + wy_0 \\ &\qquad - (wx_0 + vy_0)\cos\theta]^2 \\ &= [(v^2 + w^2)(x_0^2 + y_0^2) - (vx_0 + wy_0)^2] \\ &\quad + 2[(v^2 + w^2)x_0y_0 - (x_0^2 + y_0^2)vw + (vx_0 + wy_0)(wx_0 + vy_0)]\cos\theta \\ &\quad + [4vwx_0y_0 - (wx_0 + vy_0)]\cos^2\theta \\ &= (vy_0 - wx_0)^2 - (vy_0 - wx_0)^2\cos^2\theta \\ &= (vy_0 - wx_0)^2\sin^2\theta \end{aligned}$$

et

$$u_m = \frac{|wx_0 - vy_0| \cdot \sin\theta}{\sqrt{v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta}}$$

2° Si $x_0 = y_0 = 0$, on a :

$$x = vt$$
$$y = wt$$

et

$$MP^2 = (v^2 + w^2 - 2vw\cos\theta)t^2$$

et on a par suite :

$$t_m = 0$$

et

$$u_m = 0.$$

Le point Q milieu de MP est défini par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}) \\ &= \frac{1}{2}[x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}] \\ &= \frac{1}{2}[v \cdot \vec{i} + w\vec{j}]t \end{aligned}$$

Le lieu de Q est donc la droite passant par O et ayant pour vecteur directeur $\vec{u}\,(v\,;\,w)$; son équation est donc :

$$y = \frac{w}{v}\,x.$$

On a encore :

$$\overrightarrow{V_Q} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{V_M} + \overrightarrow{V_P}\right]$$

ou

$$\overrightarrow{V_Q} = \frac{v}{2}\cdot\vec{i} + \frac{w}{2}\cdot\vec{j}.$$

3° On a :

$$x - x_0 = vt$$
$$y - y_0 = wt.$$

D'où :

$$y - y_0 = \frac{w}{v}\cdot(x - x_0)$$

Si M_0 et P_0 sont les positions des points M et P à la date $t = 0$, on a :

$$\overline{M_0M} = x - x_0$$
$$\overline{P_0P} = y - y_0$$

On a donc :

$$\overline{P_0P} = \frac{w}{v}\cdot\overline{M_0M}$$

M et P décrivent donc des divisions semblables; il existe une similitude d'angle θ et de rapport $k = \frac{w}{v}$. Son centre Ω est donc l'intersection du lieu des points R tels que $\overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{RM_0};\,\overrightarrow{RP_0}) = \theta$ et du lieu des points R tels que $\frac{RM_0}{RP_0} = \frac{v}{w}$. Le triangle ΩMP reste donc constamment semblable au triangle ΩM_0P_0.

Le point Ω se projette en H_0 sur M_0P_0 et en H sur MP. Le triangle ΩMH reste constamment semblable au triangle ΩM_0H_0; le lieu de H est donc l'image de $x'Ox$ dans la similitude de centre Ω, de rapport $h = \frac{\Omega H_0}{\Omega M_0}$, et d'angle $\alpha = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{\Omega M_0};\,\overrightarrow{\Omega H_0})$.

Le lieu de H est une droite; l'angle OHM a un côté qui passe par O; l'enveloppe de la droite MP est donc une parabole.

4° Comme au 2° on a :

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}\right]$$

Les coordonnées de Q sont donc :

$$Q \begin{cases} x = \frac{1}{2}[vt + x_0] \\ y = \frac{1}{2}[wt + y_0] \end{cases}$$

Ce sont les équations paramétriques d'une droite, dont l'équation implicite, obtenue en éliminant t, est :

$$2(wx - vy) = wx_0 - vy_0.$$

La vitesse du point Q est :

$$\overrightarrow{V_Q} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V_M} + \overrightarrow{V_P}\right)$$

ou

$$\overrightarrow{V_Q} = \frac{1}{2}\left(v\cdot\vec{i} + w\cdot\vec{j}\right)$$

1400. Problème 4.

1° Déterminer α et β pour que la fonction $y = \frac{2x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 5x + 4}$ admette pour $x = 0$ un maximum ou un minimum égal à 3.

Étudier les variations de la fonction y ainsi déterminée, et construire la courbe représentative (Γ) dans un plan rapporté aux axes orthonormés x'Ox et y'Oy.

2° On coupe la courbe (Γ) par une parallèle à x'Ox, d'équation $y = m$; on obtient en général deux points P et Q. Discuter suivant m l'existence de ces points. Chercher le lieu du milieu I du segment PQ. Construire ce lieu.

3° La courbe (Γ) possède deux points A et B à tangente parallèle à x'Ox, qui se projettent sur x'Ox respectivement en O et C; les points P et Q se projettent sur x'Ox en M et N. Montrer que le quaterne (O; C; M; N) est harmonique.

4° Quand m varie les cercles de diamètre MN forment une famille de cercles (C). Construire le centre Ω de celui de ces cercles qui passe par un point donné R de la droite BC, et trouver l'enveloppe de la droite ΩR quand R varie.

5° En utilisant une inversion de centre O et de puissance p = OC^2, construire ceux des cercles (C) qui sont tangents au cercle de diamètre OA.

Trouver, en utilisant la même inversion le lieu des points de contact des cercles (C) avec les cercles (C_1) tangents en O à x′Ox.

1° Si $x = 0$, on a $y = 3 = \frac{\beta}{4}$. Donc $\beta = 12$. La fonction s'écrit :

$$y = \frac{2x^2 + \alpha x + 12}{x^2 - 5x + 4}\cdot \text{ Sa dérivée est :}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 5x + 4)(4x + \alpha) - (2x^2 + \alpha x + 12)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2}.$$

Si $x = 0$, on a $y' = \frac{4\alpha + 60}{16}$. Comme y' doit être nulle pour $x = 0$, on en déduit $\alpha = -15$.

La fonction est :

$$y = \frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4}$$

Cette fonction est définie dans R $- \{1; 4\}$. Sa dérivée est :

$$y' = \frac{(x^2 - 5x + 4)(4x - 15) - (2x^2 - 15x + 12)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$= \frac{5x^2 - 8x}{(x^2 - 5x + 4)^2}.$$

Elle s'annule pour $x = 0$ et pour $x = \frac{8}{5}$.

Les variations sont résumées dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	0		1		$\frac{8}{5}$		4		$+\infty$
y'	+	0	−	‖	−	0	+	‖	+	
y	2 ↗	3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{43}{9}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	2

La figure (1400 *a*) donne la courbe représentative (Γ).

2° La droite (δ), d'équation $y = m$, est parallèle à $x'Ox$; si $m < 3$ ou si $m > \frac{43}{9}$, elle coupe (Γ) en deux points P et Q; si $m = 3$, elle est

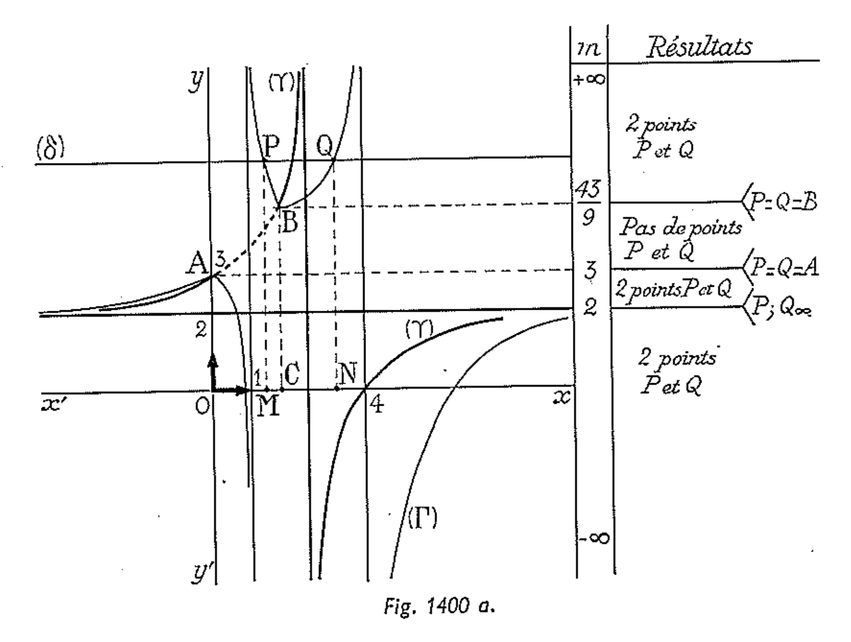


Fig. 1400 a.

tangente en A à (Γ); si $m = \frac{43}{9}$, elle est tangente en B à (Γ); si $3 < m < \frac{43}{9}$, elle ne coupe pas (Γ). Le tableau accolé à la figure (1400 *a*), explique la discussion graphique.

Les coordonnées des points P et Q sont les solutions du système

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} \\ y = m \end{cases}$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection est :

$$2\,x^2 - 15\,x + 12 = m\,(x^2 - 5\,x + 4)$$

ou

$$(m - 2)\,x^2 - 5\,(m - 3)\,x + 4\,(m - 3) = 0.$$

Son discriminant est :

$$\begin{aligned} \Delta &= 25\,(m - 3)^2 - 16\,(m - 3)\,(m - 2) \\ &= (m - 3)\,(9\,m - 43). \end{aligned}$$

On retrouve donc la condition d'existence des points P et Q :

$$m \notin \left]3 \,;\, \frac{43}{9}\right[.$$

Le point I a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_P + x_Q) \\ y = m \end{cases}$$

Or x_P et x_Q sont les solutions de l'équation précédente, et on a :

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5(m-3)}{m-2}$$

Ainsi :

$$I \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{5(m-3)}{2(m-2)} \\ y = m \end{array} \right.$$

L'équation du lieu (γ) de I est donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5(m-3)}{2(m-2)} \\ y = m \\ m \notin \left]3 \,;\, \dfrac{43}{9}\right[\end{cases}$$

En éliminant m, on obtient :

$$2xy - 4x - 5y + 15 = 0$$

ou

$$y = \frac{4x - 15}{2x - 5}$$

Le lieu (γ) est donc la partie d'une hyperbole située à l'extérieure de la bande ayant pour frontière les droites d'équations $y = 3$ et $y = \frac{43}{9}$.

3° Les points O, C, M, N ont pour abscisses $0, \frac{8}{5}; x' = x_P, x'' = x_Q$.

On a :

$$\frac{OC}{2} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{ON}} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x'\,x''} = \frac{5(m-3)}{m-2} \times \frac{m-2}{4(m-3)} = \frac{5}{4}$$

Donc :

$$\frac{2}{\overline{OC}} = \frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{ON}}.$$

Cette condition de Descartes prouve que (O; C; M; N) = − 1.

4° Lorsque *m* varie les cercles (C) constituent un faisceau (Φ) de cercles d'Apollonius dont les cercles-points sont O et C (fig. 1400 *b*).

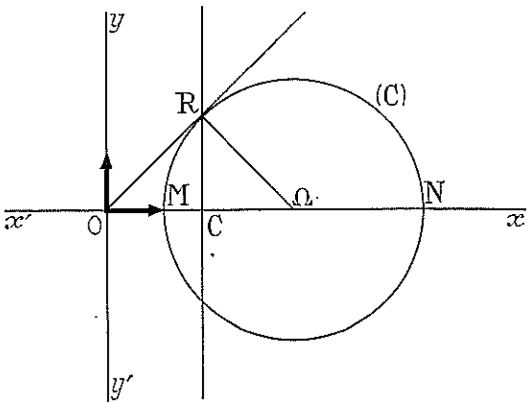


Fig. 1400 b.

Comme C est le conjugué harmonique de O par rapport à M et N, la droite BC est la polaire de O par rapport à (C). Si (C) coupe BC en R, la droite OR est tangente à (C), et le centre Ω est sur la perpendiculaire en R à OR; d'où la construction du point Ω connaissant le point R.

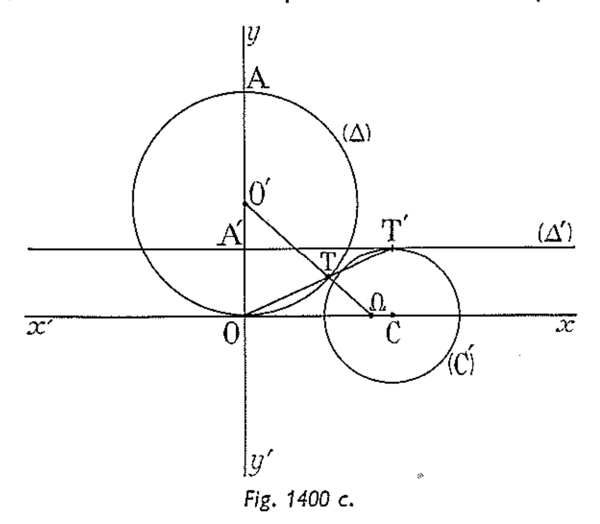


Fig. 1400 c.

En conséquence la droite ΩR enveloppe la parabole ayant O pour foyer et la droite BC comme tangente au sommet.

5° On envisage l'inversion inv (O; $p = OC^2$); on a $p = OC^2 = \frac{64}{25}$ (fig. 1400 *c*). Dans cette inversion le point C est un point double, et le faisceau (Φ) a pour image le faisceau (Φ') des cercles centrés en C.

Le cercle (Δ) de diamètre OA, a pour image la droite (Δ') d'équation $y = \frac{64}{75}$, en effet $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \frac{64}{25}$ donne $\overline{OA'} = \frac{64}{75}$.

Il y a un cercle (C') appartenant au faisceau (Φ') et tangent à (Δ') en T'; son inverse appartient à Φ est tangent au cercle (Δ) en T point inverse de T' (fig. 1400 *c*).

Les cercles (C_1) tangents en O à $x'Ox$, ont pour inverses les droites (C') parallèles à $x'Ox$; le lieu des points de contact des droites (C') et des cercles (Φ') est la droite BC; le lieu des points de contact des cercles (C_1) et des cercles (C) est donc l'inverse de la droite BC, c'est-à-dire le cercle de diamètre OC. (fig. 1400 d.)

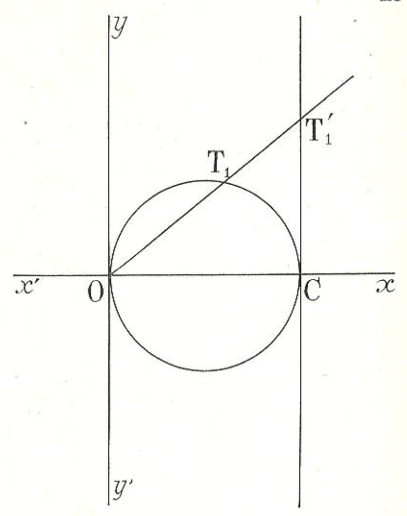


Fig. 1400 d.

1401. Problème 5.

Un point M est mobile dans un plan rapporté à deux axes orthonormés x'Ox, y'Oy; ses coordonnées en fonction de la date t sont :

$$\mathbf{x = a\,(1 + \cos t)}$$
$$\mathbf{y = b\,(1 + \sin t)}$$

avec 0 < b < a.

1° Étudier la trajectoire.

2° Calculer la vitesse du mobile et chercher à quelles dates la norme du vecteur-vitesse est égale à un nombre positif donné M.

3° Le vecteur-vitesse peut-il être normal au vecteur-accélération. Déterminer l'hodographe du point M.

1° La trajectoire (C) est connue par ses équations paramétriques :

$$x = a\,(1 + \cos t)$$
$$y = b\,(1 + \sin t).$$

On se propose de trouver son équation implicite en éliminant t. On a :

$$\cos t = \frac{x - a}{a}$$

$$\sin t = \frac{y - b}{b}$$

D'où :

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} = 1.$$

(C) est donc une ellipse centrée au point Ω $(a; b)$. Ses demi-axes sont a et b (fig. 1401 a).

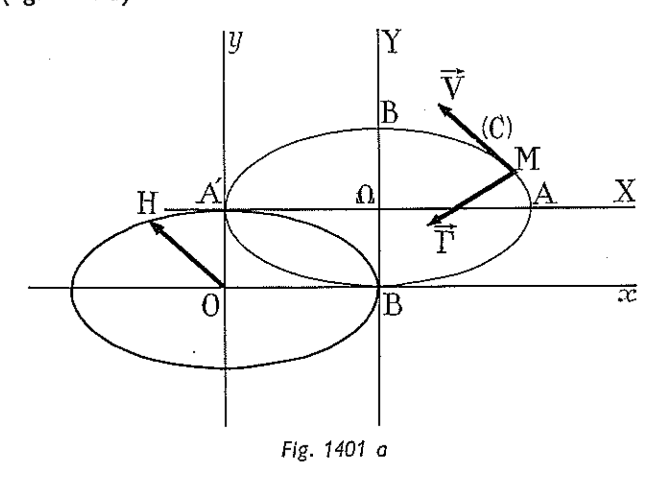


Fig. 1401 a

2° Le vecteur-vitesse $\vec{V}$ a pour coordonnées :

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -a \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = b \cos t \end{array} \right.$$

Sa norme est :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

On a à résoudre :

$$a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = m^2$$

ou

$$a^2 \sin^2 t + b^2 (1 - \sin^2 t) = m^2$$

ou

$$(a^2 - b^2) \sin^2 t = m^2 - b^2$$

ou

$$\sin^2 t = \frac{m^2 - b^2}{a^2 - b^2}.$$

Cela exige :

$$0 < \frac{m^2 - b^2}{a^2 - b^2} < 1$$

ou, puisque $a > b$,

$$0 < m^2 - b^2 < a^2 - b^2$$

ou

$$b^2 < m^2 < a^2$$

ou enfin :

$$b < m < a.$$

3° Le vecteur-accélération $\vec{\Gamma}$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t \end{cases}$$

L'hodographe a pour équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OH} \left| \begin{array}{l} x = -a\cos t \\ y = -b\sin t \end{array} \right.$$

C'est donc l'ellipse (γ) d'équation implicite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elle est l'image de la trajectoire (C) par la translation $t_{\overrightarrow{\Omega 0}}$.
Les vecteurs vitesse et accélération sont orthogonaux si

$$\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = 0$$

ou

$$a^2 \sin t \cos t - b^2 \sin t \cos t = 0$$

ou

$$\sin t \cos t = 0$$

ou

$$t = 0, \bmod \pi$$

et

$$t = \frac{\pi}{2}, \bmod \pi$$

Cette orthogonalité de $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ a donc lieu lorsque le mobile est aux sommets A, A′, B, B′ de l'ellipse (C).

1402. Problème 6.

Soient une droite fixe (D) et un point A non situé sur la droite (D). Un angle (AX; AY), de mesure constante α ($0 < \alpha < M$), tourne autour de son sommet A. AX coupe (D) en B et AY coupe (D) en C.

1° a) ***Ensemble des centres I des cercles inscrits dans les triangles ABC; ensemble des centres I′ des cercles exinscrits dans l'angle A du triangle.***

b) ***Lieu du point d'intersection des tangentes en I et I′ aux lieux précédents.***

2° a) ***La bissectrice AZ de l'angle (AX; AY) coupe la droite (D) en E. On considère la droite (R) perpendiculaire en E à AE. Elle coupe AX en M et AY en M′. Lieux des points M et M′.***

b) ***Montrer que les lieux trouvés sont les asymptotes du lieu trouvé au 1° a).***

1° *a*) Le point I se projette en H sur (D) et en K sur AY; on a (fig. 1402 *a*) :

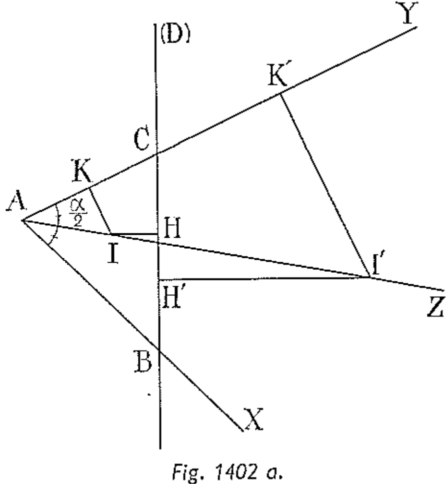


Fig. 1402 a.

$$IH = IK$$

De plus dans le triangle AIK, on a :

$$IK = IA \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

D'où :

$$IH = IA \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

ou

$$\frac{IA}{IH} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Le lieu de I est donc une partie de l'hyperbole de foyer A, de directrice (D) et d'excentricité

$$e = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Ce ne peut être d'ailleurs qu'un arc de la branche située du côté de A par rapport à (D); cet arc I_1I_2 est limité par les positions limites de l'angle (fig. 1402 *b*).

De même le point I' se projette en H' sur (D) et en K' sur AY, et on a

$$\frac{I'A}{I'H'} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Le lieu de I' appartient à la seconde branche de l'hyperbole trouvée plus haut. C'est d'ailleurs cette branche en totalité.

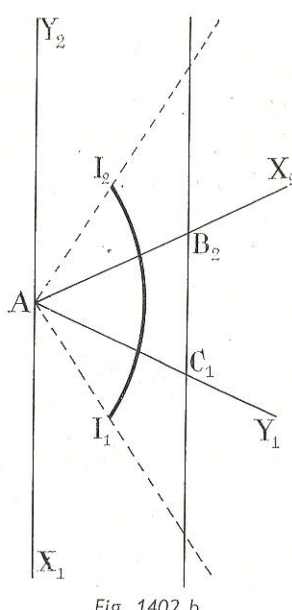


Fig. 1402 b.

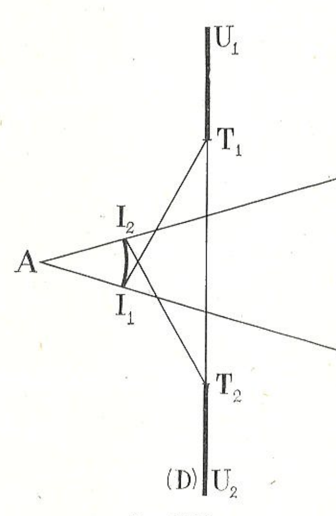


Fig. 1402 c.

b) La droite AZ est une sécante focale; elle coupe l'hyperbole en I et I'; donc les tangentes en I et I' se coupent en T sur la directrice (D). Le lieu de T est limité par les tangentes en I_1 et I_2; il est la réunion des deux demi-droites T_1U_1 et T_2U_2 (fig. 1402 *c*).

2° *a*) AZ coupe (D) en E; la droite (R) perpendiculaire en E à AE coupe AX en M. Le triangle AEM a ses angles constants; il reste donc semblable à lui-même. Donc, M est l'image de E dans la similitude de centre A, de rapport $AM = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ et d'angle $\frac{\alpha}{2}$. Le lieu de M est sur la droite image de (D) dans cette similitude.

De même le lieu de M' est sur l'image de (D) dans la similitude $\sin\left(A;\ \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}};\ -\frac{\alpha}{2}\right)$. Les lieux sont les segments M_1M_2 et $M_1'M_2'$ de ces images (Δ) et (Δ') de (D) (fig. 1402 *d* et e).

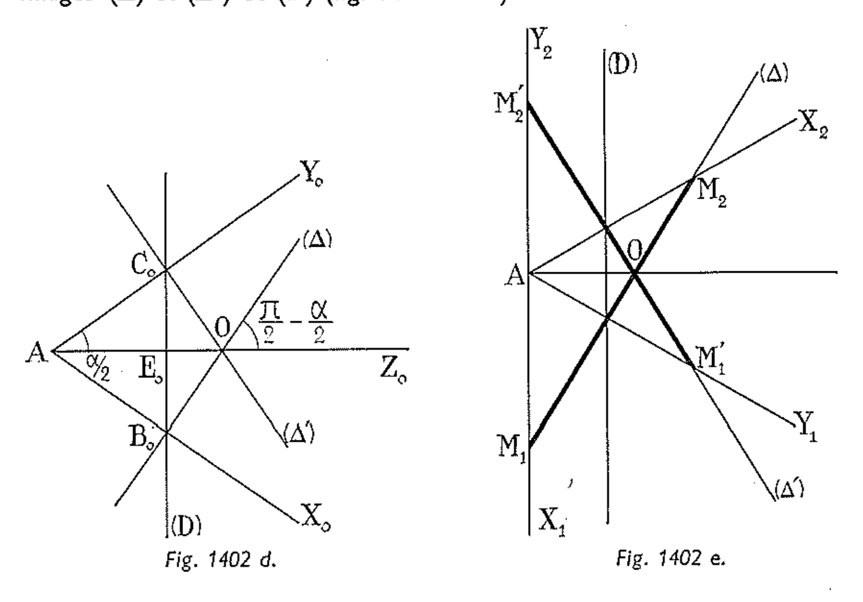


Fig. 1402 d. *Fig. 1402 e.*

b) Si φ est l'angle de l'axe focal avec une asymptote on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{e^2-1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - } = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

De plus, le centre O de l'hyperbole, partage $\overrightarrow{AE_0}$ dans le rapport e^2; d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \frac{e^2}{e^2-1}\cdot\overrightarrow{AE_0} \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\overrightarrow{AE_0} \end{aligned}$$

Soit AZ_0 la perpendiculaire à (D), B_0 le point correspondant à la position AZ_0 de la bissectrice de l'angle.

La droite Δ est perpendiculaire en B_0 à AB_0; elle détermine donc une direction asymptotique.

Elle coupe AZ_0 en O; en effet dans le triangle AB_0O on a bien

$$AO = \frac{AB_0}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{AE_0}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Donc Δ et Δ' sont bien les asymptotes de l'hyperbole.

1403. Problème 7.

Soit une parabole définie par son foyer F et sa directrice (Δ). Une droite variable (D) passe par le foyer.

1° Construire les points d'intersection M et M′ de la parabole et de la droite (D).

2° Montrer que le cercle (Γ) de diamètre MM′ est tangent à la directrice, quelle que soit la droite (D).

3° Soit x′SFx l'axe de la parabole, S étant le sommet. On pose θ = angle (x′Fx; D). On considère sur l'axe x′Fx, d'origine F un point I d'abscisse $\overline{FI} = x$.

Évaluer en fonction de x, de θ et du paramètre de la parabole :

a) le rayon du cercle (Γ), de centre C;

b) FC et IC;

c) la puissance de I par rapport au cercle (Γ).

4° Montrer que l'on peut choisir x de telle sorte que cette puissance $\overline{I}(\Gamma)$ soit indépendante de θ et en donner la valeur.

Déduire des résultats précédents que le cercle (Γ) reste constamment tangent à un cercle fixe dont on précisera la position.

5° Lieu du point C.

1° La perpendiculaire en F à (D) coupe la directrice (Δ) en T. Les bissectrices des angles en T coupent (D) en M et M′; les tangentes en M et M′ sont MT et M′T; et les segments MT et MT′ sont vus de F sous un angle droit (fig. 1403 *a*). Les points M et M′ se projettent en K et K′ sur (Δ).

2° K est le symétrique de F pour MT; de même K′ est le symétrique de F pour MT′; on a donc :

$$TF = TK = TK'$$

et T est le milieu de KK′; le milieu C de MM′ se projette en T sur (Δ). Par suite le cercle (Γ) de diamètre MM′ est toujours tangent en T à (Δ).

3° On pose HF $= p$ (fig. 1403 *b*). L'angle en T du triangle HFT a pour mesure θ ; et :

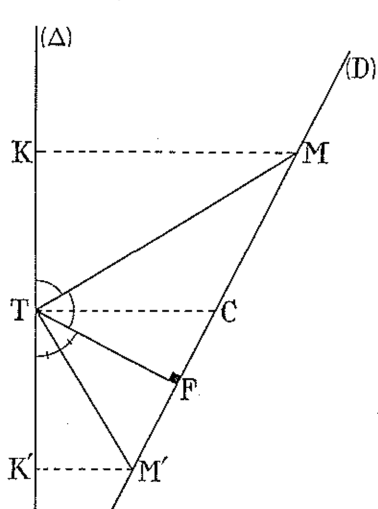


Fig. 1403 a.

$$FT = \frac{p}{\sin\theta}.$$

Dans le triangle rectangle FCT :

$$TC = \frac{FT}{\sin\theta} = \frac{p}{\sin^2\theta}$$

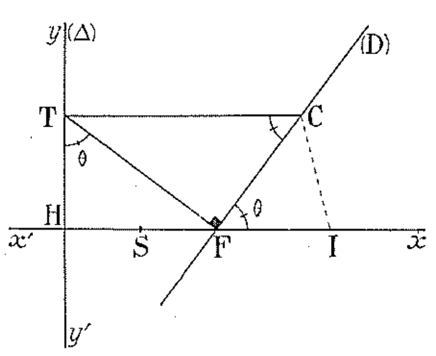


Fig. 1403 b.

et

$$FC = TC \cdot \cos\theta$$

ou

$$\boldsymbol{FC = \frac{p\cos\theta}{\sin^2\theta}}$$

Dans le triangle FIC :

$$IC^2 = IF^2 + FC^2 - 2.FI.FC.\cos\theta$$

ou

$$\boldsymbol{IC^2 = x^2 + \frac{p^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta} - 2px\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$$

La puissance $\pi = \overline{I}_{(\Gamma)}$ du point I par rapport au cercle Γ est

$$\begin{aligned} \pi &= IC^2 - CT^2 \\ &= x^2 - 2px\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{p^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta} - \frac{p^2}{\sin^4\theta} \\ &= x^2 - 2px\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \frac{p^2}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

ou
$$\pi = \mathbf{x^2 - 2px\, cotg^2\,\theta - p^2\,(1 + cotg^2\,\theta)}$$

4° On a encore :
$$\pi = x^2 - p(2x + p)\,\text{cotg}^2\,\theta - p^2$$

On voit ainsi que π est indépendant de θ si $2x + p = 0$ ou $x = -\frac{p}{2}$. Le point correspondant est le sommet S de la parabole.

On a :
$$\pi_S = \overline{S}_{(\Gamma)} = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - p^2$$

ou
$$\mathbf{\overline{S}_{(\Gamma)} = -\frac{3p^2}{4}}$$

On envisage alors l'inversion inv $\left(S\,;\,-\frac{3p^2}{4}\right)$ qui conserve globalement ces cercles (Γ). Comme les cercles (Γ) sont tangents à la droite (Δ), ils sont aussi tangents au cercle (Δ') inverse de la droite Δ.

L'inverse du point H est le point H' tel que :
$$\overline{SH'} \cdot \overline{SH} = -\frac{3p^2}{4}$$

or $\overline{SH} = -\frac{p}{2}$, et
$$SH' = \frac{3p}{2}.$$

Le cercle (Δ') est donc le cercle de diamètre SH' (fig. 1403 c).

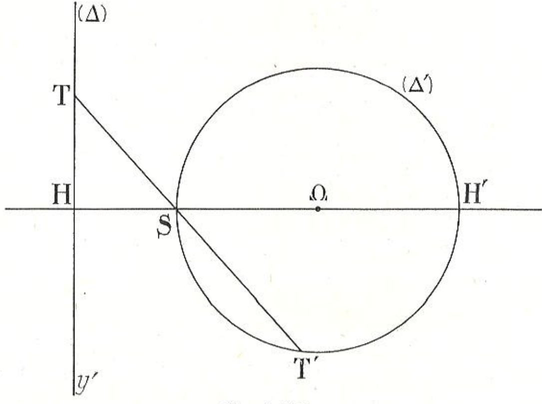


Fig. 1403 c.

Le point de contact T' de (Γ) et de (Δ') est l'inverse de T.

5° Si on rapporte le plan aux axes $x'Hx$ et $y'Hy$, $y'Hy$ étant sur (Δ) (fig. 1403 *b*) les coordonnées de C sont :

$$C \left| \begin{array}{l} x = \overline{TC} = \dfrac{p}{\sin^2\theta} = p\,(1 + \cot g^2\theta) \\ y = \overline{HT} = p \cot g\,\theta. \end{array} \right.$$

En éliminant θ on obtient l'équation implicite du lieu du point C :

$$x = p\left(1 + \frac{y^2}{p^2}\right)$$
$$= p + \frac{y^2}{p}$$

ou

$$y^2 = px - p^2$$

Ce lieu est donc une parabole de paramètre $\frac{p}{2}$; sont sommet a pour abscisse $x = p$; c'est donc le point F.

La directrice a pour équation $x = \frac{3p}{4}$; et le foyer a pour abscisse $x = \frac{5p}{4}$; le foyer est donc le centre Ω du cercle (Δ').

1404. Problème 8.

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés x'Ox et y'Oy. On donne le point Ω (d; 0) situé sur x'Ox, avec d > 0, et on envisage le cercle (C) de centre Ω et de rayon R; le rayon R est inférieur à d.

Soit A le point de (C), ayant pour abscisse d + R.

1° Montrer qu'il existe un cercle (Γ) de centre A ayant avec le cercle (C) la droite y'Oy pour axe radical. Calculer son rayon.

2° Un point P quelconque du cercle (Γ) se projette en H sur y'Oy. Montrer que la puissance de P par rapport au cercle (C) est $p = 2R \cdot \overline{HP}$.

3° On fait une inversion de centre P; montrer que les inverses de la droite y'Oy et du cercle (C) sont deux cercles égaux (D') et (C').

4° Chercher dans l'inversion précédente l'inverse du cercle (Γ) et montrer que c'est la médiatrice du segment ayant pour extrémités les centres des cercles (D') et (C').

1° La droite (D) ou $y'Oy$ et le cercle (C) déterminent un faisceau de cercles (Φ). Il existe un cercle (Γ) de (Φ) qui a pour centre le point A.

En exprimant que le point O a la même puissance par rapport aux cercles (C) et (Γ) on a :

$$d^2 - R^2 = (d + R)^2 - \rho^2$$

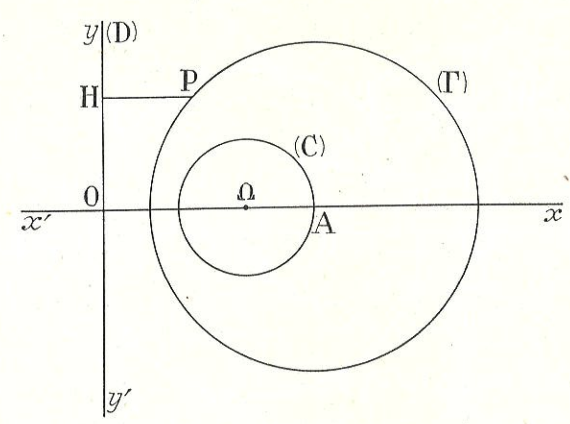


Fig. 1404 a.

si ρ désigne le rayon de (Γ); on en déduit :

$$\rho^2 = \mathbf{2}\boldsymbol{R}\,(\mathbf{d} + \boldsymbol{R})$$

2° On calcule la différence Δ des puissances de P par rapport aux cercles (C) et (Γ) :

$$\Delta = \overline{P}_{(C)} - \overline{P}_{(\Gamma)} = 2 \cdot \overline{\Omega A} \cdot \overline{HP}$$

Or $\overline{P}_{(\Gamma)} = 0$ puisque P est sur (Γ); on a donc :

$$\overline{\boldsymbol{P}_C} = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \overline{\boldsymbol{HP}}$$

3° On peut choisir la puissance de l'inversion; en effet pour des puissances différentes, les images sont homothétiques. On envisage donc l'inversion inv (P; p) avec $p = \overline{P}_C = 2\,R\,.\,\overline{HP}$ (fig. 1404 *b*).

Dans cette inversion le cercle (C) est conservé globalement; et la droite (D) ou $y'Oy$ a pour inverse un cercle passant par P, et ayant pour diamètre PH', H' étant l'inverse de H. Soit ω le centre de ce cercle.

On a :

$$\begin{aligned} PH' \cdot PH &= p \\ &= 2\,R \cdot PH \end{aligned}$$

Donc :

$$PH' = 2\,R.$$

Et :

Les deux cercles (D') et (C') sont égaux.

4° Dans l'inversion inv $(P; p)$ l'inverse du cercle (Γ) est la médiatrice (δ) du segment PA'; A' inverse de A est situé sur (C).

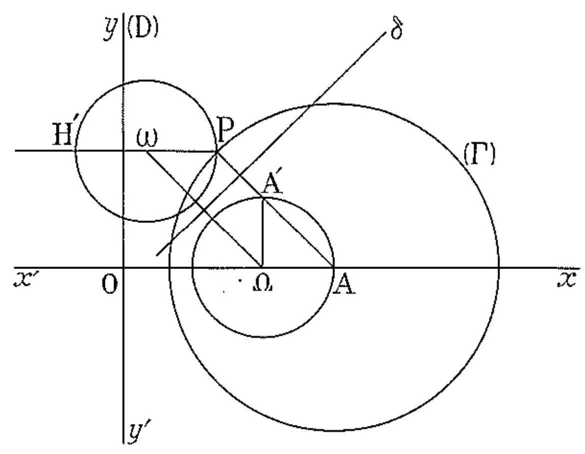


Fig. 1404 b.

Comme on a :

$$\overrightarrow{\Omega A} = \overrightarrow{\omega P}$$

et

$$\Omega A' = \Omega A$$

le quadrilatère $\Omega A'P\omega$ est un trapèze isocèle et la médiatrice (δ) de PA' est aussi médiatrice du segment $\Omega\omega$.

1405. Problème 9.

Le plan est rapporté à deux axes orthonormés x'Ox, y'Oy. Un point M se déplace sur l'axe x'Ox suivant la loi horaire.

$$\overline{OM} = 2a \cos t$$

et un point N se déplace sur l'axe y'Oy suivant la loi horaire

$$\overline{ON} = 2a \cos^2 \frac{t}{2}.$$

a est une constante positive; t est la date. On désigne par (Δ) la droite déterminée par les points M et N.

A la date t = 0, le point M est en A, et le point N est en B.

1° Étudier le mouvement du milieu C du segment MN.

2° Calculer $\overline{AM}$ et $\overline{BN}$. En déduire que M et N se correspondent dans une similitude; préciser les éléments de cette similitude.

3° Soit I le centre de la similitude; I se projette en H sur (Δ). Étudier le lieu de H; en déduire l'enveloppe de (Δ). Tracer cette enveloppe.

4° Trouver l'équation de la droite (Δ) à la date t, puis à la date t'. En déduire les coordonnées du point d'intersection J des droites $\Delta = \Delta(t)$ et $\Delta' = \Delta(t')$; puis les coordonnées du point de contact T de (Δ) avec son enveloppe.

Calculer alors la vitesse du point T.

1° Le mouvement de M sur $x'Ox$ est un mouvement sinusoïdal simple, entre les points A($2a$) et A'($-2a$).

On a :
$$\overline{ON} = 2a\cos^2\frac{t}{2} = a\,(1 + \cos t).$$

Le mouvement de N sur $y'Oy$ est un mouvement sinusoïdal simple, entre les points B et O.

Les coordonnées de C sont :

$$x = a\cos t$$
$$y = \frac{a}{2}(1 + \cos t).$$

La trajectoire est donc rectiligne, son équation implicite est :

$$y = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

ou
$$x - 2y + a = 0$$

Comme x_c varie entre $-a$ et $+a$, la trajectoire est un segment de cette droite, segment ayant pour extrémités le milieu C_0 (a; a) de AB et le milieu C_1 ($-a$; 0) de OA' (fig. 1405 a).

Le mouvement de C sur le segment C_0C_1 est en mouvement sinusoïdal simple car sa projection sur $x'Ox$ est un mouvement sinusoïdal simple d'équation $x = a\cos t$.

Les coordonnées du vecteur-vitesse sont :

$$\vec{V}\ \left|\ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -a\sin t \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{a}{2}\sin t \end{array}\right.$$

et celles du vecteur-accélération sont :

$$\vec{\Gamma}\ \left|\ \begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{a}{2}\cos t \end{array}\right.$$

Ces vecteurs sont évidemment sur la droite C_0C_1.

De plus, on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a \cos t$$
$$= -x$$

Donc si $\overrightarrow{CK} = \vec{\Gamma}$, le point K est sur l'axe $y'Oy$ (fig. 1405 *a*).

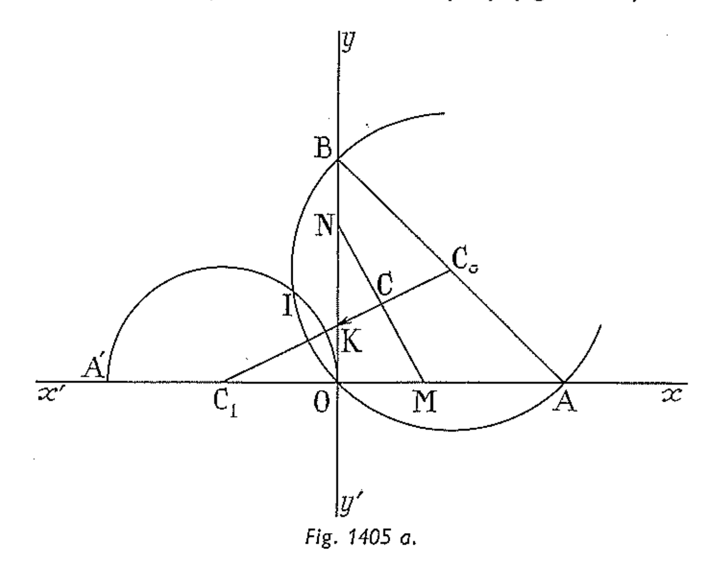


Fig. 1405 a.

2° On a :

$$\overline{AM} = 2a \cos t - 2a = 2a(\cos t - 1)$$
$$\overline{BN} = a(1 + \cos t) - 2a = a(\cos t - 1)$$

Donc, quel que soit t, on a :

$$\overline{BN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM}$$

Les points M et N décrivent donc des divisions semblables; il existe donc une similitude transformant M en N. Son rapport est $k = \frac{1}{2}$; son angle est :

$$\theta = \overline{\text{angle}}\,(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BN}) = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient facilement le centre I de la similitude; il est situé sur le cercle de diamètre AB (AB, position de MN à la date $t = 0$) et sur le cercle de diamètre OA' (A'O, position de MN à la date $t = \pi$) (fig. 1405 *a*).

Ces cercles ont pour équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 0 \\ x^2 + y^2 + 2ax = 0 \end{cases}$$

Les deux cercles se coupent en O et en I; le point I a pour coordonnées :

$$I \begin{cases} x = -\dfrac{2a}{5} \\ y = \dfrac{4a}{5}. \end{cases}$$

3° Si H est la projection de I sur (Δ), le triangle rectangle IHM reste semblable à lui-même, et H est l'image de M dans une similitude de centre I. Le lieu de H est donc l'image du lieu AA′ de M dans cette similitude (fig. 1405 *b*).

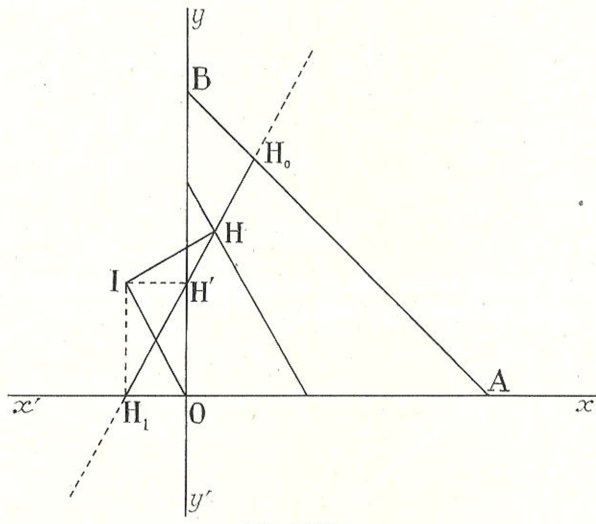


Fig. 1405 b.

Le point A a pour image la position H_0 de I sur AB, et le point A′ a pour image la projection H_1 de I sur OA′. Le lieu de H est donc le segment H_0H_1 (fig. 1405 *c*).

La projection H′ de I sur Oy appartient à ce segment; H′ est l'image du point O.

On peut alors avoir le rapport *h* et l'angle α de la similitude :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IH'}{OH'} = 2$$

$$h = \frac{IH'}{IO} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = 70{,}5 \text{ grades}$$

Le lieu de H étant une droite, la droite Δ enveloppe une parabole de foyer I et ayant la droite H_0H_1 comme tangente au sommet.

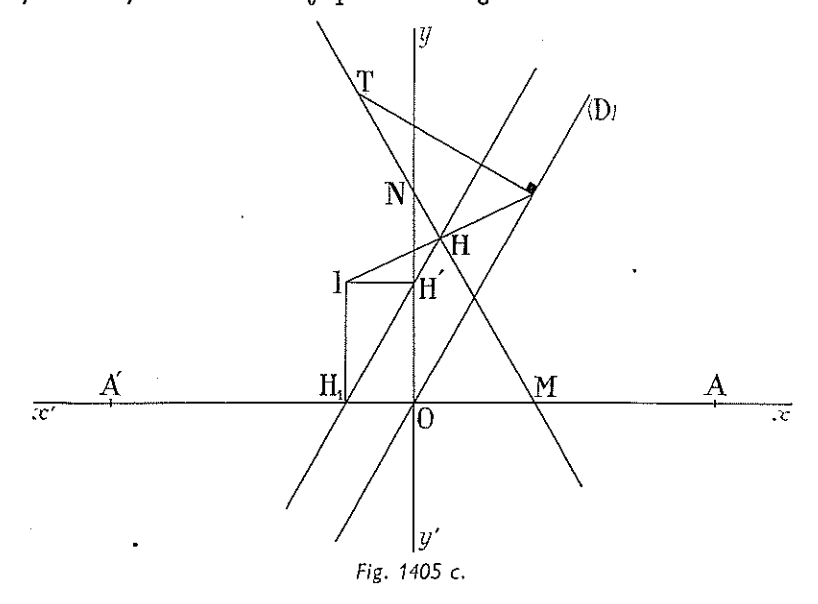


Fig. 1405 c.

On peut facilement construire la directrice (D), et le point de contact T de (Δ) et de la parabole (fig. 1405 *d*).

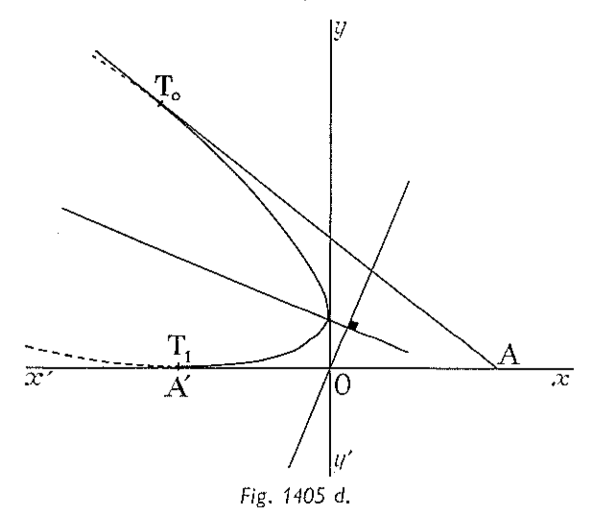


Fig. 1405 d.

Le lieu du point T n'est pas toute la parabole, mais un arc T_0T_1 dont les extrémités correspondent aux points H_0 et H_1.

L'équation de la droite $H_0H'H_1$ est :

$$\frac{x}{-\frac{2a}{5}} + \frac{y}{\frac{4a}{5}} = 1$$

ou

$$10x - 5y + 4a = 0.$$

L'équation de la directrice, passant par O, est donc :

$$2x - y = 0.$$

L'équation de la parabole s'obtient à l'aide de la définition par le foyer, la directrice et l'excentricité e = 1.

$$\left(x + \frac{2a}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{4a}{5}\right)^2 = \frac{(2x - y)^2}{5}$$

ou

$$(x + 2y)^2 + 4ax - 8ay + 4a^2 = 0.$$

Elle est tangente à $x'Ox$ au point A' d'abscisse $-2a$, et à $y'Oy$ au point d'ordonnée $+a$.

4° L'équation de (Δ) est :

$$\frac{x}{2a \cos t} + \frac{y}{a(1 + \cos t)} = 1$$

ou

$$(\Delta) \qquad (1 + \cos t)\, x + 2y \cos t = 2a \cos t\,(1 + \cos t)$$

Celle de Δ' est :

$$(\Delta') \qquad (1 + \cos t')x + 2y \cos t' = 2a \cos t'\,(1 + \cos t')$$

Les coordonnées de J sont obtenues en résolvant le système de ces deux équations; comme $\cos t \neq \cos t'$, on a :

$$J \begin{cases} x = -2a \cos t \cos t' \\ y = a(1 + \cos t)(1 + \cos t') \end{cases}$$

(Δ) et (Δ') sont tangentes à la parabole; si (Δ) est fixe et si t' tend vers t, le point J tend vers le point de contact T; les coordonnées de T s'obtiennent en remplaçant t' par t dans les coordonnées de J; on a :

$$T \begin{cases} x = -2a \cos^2 t \\ y = a(1 + \cos t)^2 \end{cases}$$

En éliminant $\cos t$ on obtient à nouveau l'équation de la parabole.

On en déduit aussi les coordonnées de T_0 et T_1 (fig. 1405 d) :

$$T_0 \begin{cases} -2a \\ 4a \end{cases} \qquad\qquad T_1 \begin{cases} -2a \\ 0 \end{cases}$$

La vitesse de T est $\dfrac{\overrightarrow{dT}}{dt}$ $(4a \sin t \cos t;\ -2a \sin t\,(1 + \cos t))$.

1406. Problème 10.

Étudier la correspondance f :

$$f: \qquad x \in Z/6 \longrightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - \dot{2}}}{x - \dot{1}} \in Z/6.$$

Le symbole $\sqrt{x^2 + x - 2}$ *désigne les nombres dont le carré est* $x^2 + x - \dot{2}$
On construit facilement les tableaux suivants :

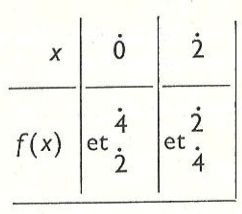
x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$x^2 + x - \dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{4}$
$\sqrt{x^2 + x - \dot{2}}$	$\dot{2}$ et $\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$ et $\dot{4}$	$\dot{2}$ et $\dot{4}$	$\dot{0}$	$\dot{2}$ et $\dot{4}$

La correspondance $x \longrightarrow \sqrt{x^2 + x - \dot{2}}$ est donc définie pour toutes les valeurs de x.
De même on a :

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$
$x - \dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$
$\dfrac{1}{x - \dot{1}}$	$\dot{5}$		$\dot{1}$			

Dans $Z/6$ seuls $\dot{1}$ et $\dot{5}$ sont inversibles; la fonction $\dfrac{1}{x - \dot{1}}$ n'est donc définie que pour $\dot{0}$ et 2.

Finalement la correspondance f est définie seulement par $\dot{0}$ et $\dot{2}$. Et on a :



x	$\dot{0}$	$\dot{2}$
$f(x)$	$\dot{4}$ et $\dot{2}$	$\dot{2}$ et $\dot{4}$

Le graphe de f est donc :



$$G = \{(\dot{0};\dot{4});\ (\dot{0};\dot{2});\ (\dot{2};\dot{2});\ (\dot{2};\dot{4})\}$$

La représentation graphique s'obtient alors facilement (fig. 1406 *a*).

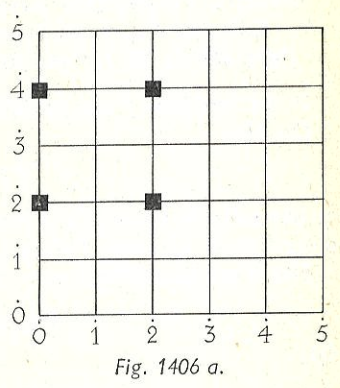


Fig. 1406 a.

1407. Problème 11.

1° Étudier les variations de la fonction f :

$$f: \qquad x \in R \longrightarrow f(x) = y = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin x - \sin 2x}{\sqrt{2} \cos x - \cos 2x} \in R$$

et tracer la courbe représentative dans un plan rapporté aux axes orthonormés Ox; Oy.

On calculera la valeur du minimum que la fonction présente dans l'intervalle (0; π) et on déterminera les tangentes aux points de rencontre de la courbe avec Ox.

2° Plus généralement, on considère la fonction g :

$$g: \qquad x \in R \longrightarrow g(x) = y = \frac{2 \sin x - a \sin 2x}{2 \cos x - a \cos 2x} \in R$$

où a est une constante positive; montrer que pour a = 2, y tend vers 0 lorsque x tend vers 0; et déterminer la pente z_1 de la tangente à l'origine à la courbe représentative dans le plan Ox, Oy.

Que se passe-t-il lorsque a = 2?

Montrer également que, quel que soit a positif y tend vers 0 lorsque x tend vers π, et calculer la pente z_1 de la tangente au point O' (x = π, y = 0).

3° z_1 et z_2 sont des fonctions de a. Tracer, lorsque a varie de O à $+\infty$, les courbes (H_1) et (H_2) représentatives de ces deux fonctions, dans un plan rapporté aux axes orthonormés Oa; Oz.

4° Ces deux courbes (H_1) et (H_2) passent par un point A de l'axe Oz; (H_1) rencontre l'axe Oa en un point B; (H_2) rencontre en un point C l'asymptote parallèle à Oz de (H_1).

Calculer l'aire du triangle mixtiligne ABC, dont les côtés sont l'arc AB de (H_1), l'arc AC de (H_2) et le segment BC.

1° La fonction f est périodique, de période $T = 2\pi$.
De plus

$$f(-x) = -f(x)$$

et par suite le point O est centre de symétrie de la courbe. Il suffit donc d'étudier la fonction f dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Elle n'est pas définie pour les solutions de l'équation

$$\cos 2x - \sqrt{2} \cos x = 0$$

ou

$$2 \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x - 1 = 0$$

On en déduit :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4}$$
$$= -0{,}437\,016$$

Donc x est voisin de $\alpha = 116°$ ou $\alpha = 2{,}033$ radian.

La dérivée de la fonction est :

$$y' = \frac{(\sqrt{2}\cos x - \cos 2x)(\sqrt{2}\cos x - 2\cos 2x) + (\sqrt{2}\sin x - \sin 2x)(\sqrt{2}\sin x - 2\sin 2x)}{(\sqrt{2}x \cos x - \cos 2x)^2}$$

$$= \frac{4 - 3\sqrt{2}\cos x}{(\sqrt{2}\cos x - \cos 2x)^2}$$

y' s'annule donc pour :

$$\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$= 0{,}942\,809$$

et x est voisin de $\beta = 19°\,30'$ ou $\beta = 0{,}340$ radian.

De $\cos \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, on déduit $\sin \beta = \frac{1}{3}$; on calcule alors facilement

$$f(\beta) = -\frac{\sqrt{2}\sin\beta - 2\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta - \sqrt{2}\cos\beta - 1}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{5}$$
$$= -0{,}2828$$

Le tableau de variation est le suivant :

x	0		α		β		π
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	0	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{5}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

La courbe représentative, coupe l'axe $x'Ox$ aux points ayant pour abscisses les solutions de l'équation :

$$\sqrt{2}\sin x - \sin 2x = 0$$

ou

$$\sqrt{2}\sin x\,(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0$$

D'où :

$$x = 0 \qquad x = \pi \qquad x = \frac{\pi}{4}$$

La courbe coupe Ox, en O, $O'(\pi; 0)$ et $P\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

On a immédiatement :

$$f'(0) = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)^2}$$
$$= -\sqrt{2}$$

L'équation de la tangente en O est donc $y = -x\sqrt{2}$.

On a aussi :

$$f'(\pi) = \sqrt{2}$$

et l'équation de la tangente en P est $y = \sqrt{2}\,(x - \pi)$.

Enfin :

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

et l'équation de la tangente en O' est $y = x - \frac{\pi}{4}$.

La courbe représentative est celle de la figure (1407 *a*).

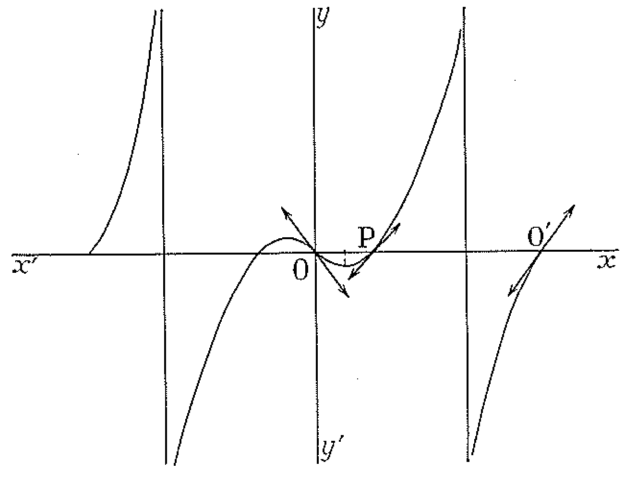


Fig. 1407 a.

2° En remplaçant, dans le voisinage de O, sin x par x, sin $2x$ par $2x$ cos x et cos $2x$ par 1, on obtient :

$$f(x) \simeq \frac{2(1-a)}{2-a} \cdot x.$$

Si a est différent de 2, on a :

$$\lim_{x=0} f(x) = 0$$

Si a est égal à 2, on doit écrire :

$$\sin x \simeq x$$
$$\sin 2x \simeq 2x$$
$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$$
$$\cos 2x \simeq 1 - 2x^2$$

et on a :

$$f(x) = \frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} \simeq \frac{x - 2x}{-\frac{x^2}{2} + 2x^2}$$

ou

$$y \simeq = \frac{2}{3x}$$

et par suite :

$$\lim_{x=0} f(x) = \infty$$

La pente de la tangente à l'origine est

$$z_1 = \lim_{x=0} \frac{y}{x}$$

Donc si $a \neq 2$, on a :

$$z_1 = \frac{2(1-a)}{2-a} = \frac{2(a-1)}{a-2}$$

et si $a = 2$, on a :

$$z_1 = \infty$$

De même la pente de la tangente en A est :

$$z_2 = \lim_{x=\pi} \frac{y}{x - \pi}$$

On pose $x = \pi + u$ et on a :

$$z_2 = \lim_{u=0} \frac{2 \sin(\pi + u) - a \sin(2\pi + 2u)}{u(2\cos(\pi + u) - a\cos(2\pi + 2u)}$$
$$= \lim_{u=0} \frac{2 \sin u + a \sin 2u}{u(2\cos u + a \cos 2u)}$$

ou

$$z_2 = \frac{2(a+1)}{a+2}$$

3° Les courbes représentatives des fonctions z_1 et z_2 sont des hyperboles équilatères.

Elles sont représentées graphiquement pour $a \geqslant 0$ à la figure (1407 *b*).

Les coordonnées des points A, B, C sont :

$$A \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right. \qquad B \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \qquad C \left| \begin{matrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \right.$$

Soit D le point de coordonnées (2; 0).

4° L'aire du triangle mixtiligne ABC est donnée par :

$$\mathcal{A} = \overline{\text{aire}}\ \text{ABC} = \overline{\text{aire}}\ \text{ODCA} - \overline{\text{aire}}\ \text{OBA} - \text{aire DBC}.$$

Or :

$$\overline{\text{aire}}\ \text{DBC} = \frac{3}{4}$$

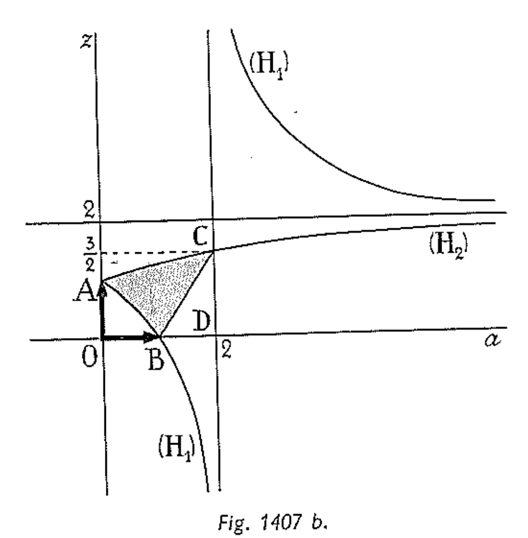


Fig. 1407 b.

Les aires ODCA et OBA sont données par des intégrales.

On :

$$\begin{aligned}\overline{\text{aire}}\ \text{ODCA} &= \int_0^2 z_2(a)\cdot da = 2\int_0^2 \frac{a+1}{a+2}\,da\\ &= 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{a+2}\right)da\\ &= 2\,[a - \text{Log}\,|a+2|]_0^2\\ &= 2\,(2 - \text{Log}\,4 + \text{Log}\,2)\\ &= 2\,(2 - 2\,\text{Log}\,2 + \text{Log}\,2)\\ &= 2\,(2 - \text{Log}\,2)\end{aligned}$$

De même :

$$\overline{\text{aire}}\ \text{OBA} = \int_0^1 z_1(a)\, da = 2\int_0^1 \frac{a-1}{a-2}\, da$$
$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{a-2}\right) da$$
$$= 2\,[a + \text{Log}\,|a-2|]_0^1$$
$$= 2\,(1 + \text{Log}\,1 - \text{Log}\,2)$$
$$= 2\,(1 - \text{Log}\,2).$$

D'où finalement :

$$\mathcal{A} = (4 - 2\,\text{Log}\,2) - (2 - 2\,\text{Log}\,2) - \frac{3}{4}$$
$$= 2 - \frac{3}{4}$$

ou

$$\mathcal{A} = \frac{5}{4} \cdot$$

CHAPITRE CVIII

ÉLÉMENTS DE CALCUL MATRICIEL

1408. Définition.

Soit un corps K commutatif.

On appelle matrice à* n *colonnes et* p *lignes un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^p & a_1^p & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}$$

formé avec des éléments* a_k^l *de K.

k est l'indice de colonne, et l est l'indice de ligne.

1409. Détermination d'une application linéaire.

Soient deux espaces vectoriels E et F de dimensions respectives :

$$\dim E = 2 \quad \text{et} \quad \dim F = 3$$

E est rapporté à la base $\{\vec{i}\,;\vec{j}\}$

F est rapporté à la base $\{\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\}$.

On a vu au n° 707 qu'une application linéaire f de E dans F était déterminée par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$$

avec

$$f(\vec{i}) = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{w}$$
$$f(\vec{j}) = a'\,\vec{u} + b'\,\vec{v} + c'\,\vec{w}$$

Réciproquement à une matrice telle que A correspond une application linéaire (cf. n° 708).

En conséquence :

Une matrice est la traduction analytique d'une application linéaire.

Par suite :

L'étude du calcul matriciel est ramené à l'étude des applications linéaires.

1410. Addition des matrices.

1° *Soient deux matrices*

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a}' \\ \mathbf{b} & \mathbf{b}' \\ \mathbf{c} & \mathbf{c}' \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{pmatrix}$$

La somme de ces deux matrices est la matrice S définie par

$$S = A + B = \begin{pmatrix} \mathbf{a} + \alpha & \mathbf{a}' + \alpha' \\ \mathbf{b} + \beta & \mathbf{b}' + \beta' \\ \mathbf{c} + \gamma & \mathbf{c}' + \gamma' \end{pmatrix}$$

2° Les matrices A et B représentent deux applications f et g de E dans F, et on a :

$$f(\vec{i}) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$
$$f(\vec{j}) = a' \cdot \vec{u} + b' \cdot \vec{v} + c' \cdot \vec{w}$$
$$g(\vec{i}) = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w}$$
$$g(\vec{j}) = \alpha' \cdot \vec{u} + \beta' \cdot \vec{v} + \gamma' \cdot \vec{w}.$$

Par suite :

$$(f + g)(\vec{i}) = f(\vec{i}) + g(\vec{i}) = (a + \alpha)\vec{u} + (b + \beta)\vec{v} + (c + \gamma)\vec{w}$$

et

$$(f + g)(\vec{j}) = f(\vec{j}) + g(\vec{j}) = (a' + \alpha')\vec{u} + (b' + \beta')\vec{v} + (c' + \gamma')\vec{w}$$

Donc :

La matrice S = A + B représente l'application linéaire f + g

◇ *Exemple 1. — On donne :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot$$

Calculer A + B.

On a :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

◇ *Exemple 2. — Soient :*

$$A = \begin{pmatrix} \dot{2} & \dot{3} \\ \dot{0} & \dot{4} \\ \dot{1} & \dot{0} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \dot{3} & \dot{3} \\ \dot{2} & \dot{4} \\ \dot{0} & \dot{1} \end{pmatrix}$$

deux matrices dont les éléments appartiennent au corps Z/5. Calculer A + B.

On a :

$$A + B = \begin{pmatrix} \dot{2} + \dot{3} & \dot{3} + \dot{3} \\ \dot{0} + \dot{2} & \dot{4} + \dot{4} \\ \dot{1} + \dot{0} & \dot{0} + \dot{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{0} & \dot{1} \\ \dot{2} & \dot{3} \\ \dot{1} & \dot{1} \end{pmatrix}$$

1411. Multiplication d'une matrice par un nombre.

1° Soit une matrice

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{a'} \\ \mathbf{b} & \mathbf{b'} \\ \mathbf{c} & \mathbf{c'} \end{pmatrix}$$

et un nombre α du corps K. Le produit de la matrice A par le nombre α est la matrice P définie par

$$P = \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{a} & \alpha\mathbf{a'} \\ \alpha\mathbf{b} & \alpha\mathbf{b'} \\ \alpha\mathbf{c} & \alpha\mathbf{c'} \end{pmatrix}$$

2° La matrice A représente une application linéaire f de E dans F, et on a :

$$f(\vec{i}) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$f(\vec{j}) = a' \cdot \vec{u} + b' \cdot \vec{v} + c' \cdot \vec{w}$$

Par suite :

$$(\alpha f)(\vec{i}) = \alpha \cdot f(\vec{i}) = \alpha a \cdot \vec{u} + \alpha b \cdot \vec{v} + \alpha c \cdot \vec{w}$$
$$(\alpha f)(\vec{j}) = \alpha \cdot f(\vec{j}) = \alpha a' \cdot \vec{u} + \alpha b' \cdot \vec{v} + \alpha c' \cdot \vec{w}$$

Donc :

La matrice P = $\alpha \cdot$ A représente l'application linéaire αf.

◇ *Exemple 1. — Soient $\alpha = -3$ et*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $\alpha \cdot A$.

On a :

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

◇ *Exemple 2. — On donne $\alpha = \dot{2}$ et*

$$A = \begin{pmatrix} \dot{2} & \dot{3} \\ \dot{0} & \dot{4} \\ \dot{1} & \dot{0} \end{pmatrix}$$

les éléments de A et α appartenant à Z/5. Calculer $\dot{2}$ A.

On a :

$$\dot{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \dot{4} & \dot{1} \\ \dot{0} & \dot{3} \\ \dot{2} & \dot{0} \end{pmatrix}$$

1412. Multiplication de deux matrices.

1° Soient deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ \delta & \delta' & \delta'' \end{pmatrix}$$

On remarquera que le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A. Cette condition est indispensable à la possibilité de la multiplication de A par B.

Le produit de la matrice A par la matrice B est une matrice Π, notée Π = BA, obtenue à l'aide de la règle dite « règle ligne par colonne ».

Pour obtenir l'élément Π_k de la matrice Π, situé à la colonne de rang k et à la ligne de rang l la règle consiste à faire les produits des éléments de la ligne l de B par les éléments correspondants de la colonne k de A, et à sommer ces produits partiels :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha' b + \alpha'' c \end{pmatrix}$$

Ainsi on a :

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ \delta & \delta' & \delta'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha' b + \alpha'' c & \alpha a' + \alpha' b' + \alpha'' c' \\ \beta a + \beta' b + \beta'' c & \beta a' + \beta' b' + \beta'' c' \\ \gamma a + \gamma' b + \gamma'' c & \gamma a' + \gamma' b' + \gamma'' c' \\ \delta a + \delta' b + \delta'' c & \delta a' + \delta' b' + \delta'' c' \end{pmatrix}$$

2° Soient trois espaces vectoriels E, F, G sur le même corps K, avec

$$\dim E = 2 \qquad \dim F = 3 \qquad \dim G = 4$$

E a pour base $\{\vec{i}; \vec{j}\}$

F a pour base $\{\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\}$

G a pour base $\{\vec{p}; \vec{q}; \vec{r}; \vec{s}\}$

La matrice A représente une application linéaire f de E dans F; et on a :

$$f(\vec{i}) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$
$$f(\vec{j}) = a' \cdot \vec{u} + b' \cdot \vec{v} + c' \cdot \vec{w}$$

La matrice B représente une application linéaire g de F dans G; et on a :

$$g(\vec{u}) = \alpha \cdot \vec{p} + \beta \cdot \vec{q} + \gamma \cdot \vec{r} + \delta \cdot \vec{s}$$
$$g(\vec{u}) = \alpha' \cdot \vec{p} + \beta' \cdot \vec{q} + \gamma' \cdot \vec{r} + \delta' \cdot \vec{s}$$
$$g(\vec{w}) = \alpha'' \cdot \vec{p} + \beta'' \cdot \vec{q} + \gamma'' \cdot \vec{r} + \delta'' \cdot \vec{s}$$

$g \circ f$ est une application linéaire de E dans G; et on a :

$$\begin{aligned} (g \circ f)\ (\vec{i}) &= g\left[f(\vec{i})\right] \\ &= g\left(a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\right) \\ &= a \cdot g(\vec{u}) + b \cdot g(\vec{v}) + c \cdot g(\vec{w}) \\ &= a\left(\alpha\vec{p} + \beta \cdot \vec{q} + \gamma \cdot \vec{r} + \delta \cdot \vec{s}\right) \\ &\quad + b\left(\alpha'\vec{p} + \beta'\vec{q} + \gamma'\vec{r} + \delta'\vec{s}\right) \\ &\quad + c\left(\alpha''\vec{p} + \beta'' \cdot \vec{q} + \gamma''\vec{r} + \delta''\vec{s}\right) \end{aligned}$$

ou

$$(g_o f)(\vec{i}) = (\alpha a + \alpha' b + \alpha'' c)\,\vec{p} + (\beta a + \beta' b + \beta'' c)\,\vec{q}$$
$$+ (\gamma a + \gamma' b + \gamma'' c)\,\vec{r} + (\delta a + \delta' b + \delta'' c)\,\vec{s}$$

De même :

$$(g_o f)(\vec{j}) = (\alpha a' + \alpha' b' + \alpha'' c')\,\vec{p} + (\beta a' + \beta' b' + \beta'' c')\,\vec{q}$$
$$+ (\gamma a' + \gamma' b' + \gamma'' c')\,\vec{r} + (\delta a' + \delta' b' + \delta'' c')\,\vec{s}$$

Par suite :

La matrice $\Pi = BA$ représente l'application linéaire $g_o f$.

◇ *Exemple 1. — On donne :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer BA et AB.

On a :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

◇ *Exemple 2. — On donne :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, A^3 ... A^n.

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

1413. Espace vectoriel $\mathcal{M}(n; p)$.

Les matrices à n colonnes et p lignes représentent les applications linéaires de E dans F. Comme $\mathcal{L}$ (E; F) est un espace vectoriel (cf. nº 704), on en déduit que ***l'ensemble $\mathcal{M}$ (n; p) des matrices à n colonnes et p lignes est un espace vectoriel.***

La matrice nulle a tous ses éléments nuls :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1414. Matrices carrées.

Les matrices carrées représentent les endomorphismes de l'espace E. Comme $\mathcal{L}$ (E; E) est une algèbre (cf. nº 716), on en déduit que ***l'ensemble $\mathcal{M}$ (n; n) des matrices carrées à n colonnes et n lignes est une algèbre.***

La matrice unité est :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{si } \dim E = 2$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{si } \dim E = 3$$

L'anneau $\mathcal{L}$ (E; E) possède des diviseurs de zéro; ainsi :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1415. Déterminant d'une matrice carrée.

Soit une matrice carrée :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

Son déterminant est :

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

1416. Matrice inverse d'une matrice.

Soit la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

représentant un endomorphisme régulier f, donc bijectif. On a (cf. n° 718).

$$\text{Det } A \neq 0.$$

D'autre part, on a (cf. n° 717) :

$$\begin{cases} x' = ax + a'y + a''z \\ y' = bx + b'y + b''z \\ z' = cx + c'y + c''z \end{cases} \qquad (1416\,;1)$$

Comme Det A $\neq 0$, on déduit (cf. n° 718) :

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y = \beta\alpha' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' \end{cases} \qquad (1416\,;2)$$

La matrice :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

est la matrice représentative de l'endomorphisme régulier $\overset{-1}{f}$. C'est la matrice inverse de A :

$$M = A^{-1}.$$

En effet puisque $\overset{-1}{f} \circ f = f \circ \overset{-1}{f} = e$ on a aussi $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_3$.

◇ *Exemple 1. — On donne :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1}.

Det A $= -2$; donc la matrice A est inversible.

On a :

$$x' = x + 3y$$
$$y' = 2x + 4y$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$x = -2x' + \frac{3}{2}y'$$

$$y = x' - \frac{1}{5}y'$$

D'où :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

◇ *Exemple 2. — On donne*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1}.

On a :

$$\text{Det } A = 8$$

et la matrice est inversible.

Du système :

$$\begin{cases} x' = 2x + 2y \\ y' = \quad 3y + z \\ z' = x \quad + z \end{cases}$$

on déduit :

$$x = \frac{1}{8}(3x' - 2y' + 2z')$$

$$y = \frac{1}{8}(x' + 2y' - 2z')$$

$$z = \frac{1}{8}(-3x' + 2y' + 6z')$$

D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ou

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

EXERCICES ET PROBLÈMES SUR LE LIVRE XIII

Calcul numérique.

Calculer à l'aide des tables de fonctions trigonométriques et à l'aide des tables de logarithmes :

2146. sin 31° 12′	sin 61° 27′	sin 75° 16′.
2147. sin 81° 54′	sin 36° 17′	sin 68° 19′.
2148. sin 9° 27	sin 0° 57′	sin 1° 7′.
2149. cos 32° 36′	cos 38° 14′	cos 85° 35′.
2150. cos 34° 17′	cos 19° 7′	cos 74° 10′.
2151. tg 34° 41′	tg 65° 20′	tg 78° 54′.
2152. tg 45° 2′	tg 55° 14′	tg 67° 36′.
2153. cotg 38° 27′	cotg 37° 54′	tg 17° 36′.
2154. cotg 16° 5′	cotg 2° 50′	cotg 8° 9′.

Calculer à l'aide des tables de logarithmes les logarithmes des fonctions trigonométriques des angles suivants :

2155. 32° 40′ 17″	65° 20′ 54″	33° 52′ 22″.
2156. 27° 19′ 35″	4° 26′ 46″	85° 37′ 24″.
2157. 37° 5′ 6″	83° 35′ 40″	17° 14′ 28″.
2158. 54,4272 grades	27,2428 gr	44,8685 gr
2159. 90,8754 gr	18,1874 gr	19,9119 gr
2160. 47,1927 gr	50,0005 gr	60,7051 gr

Calculer les logarithmes des fonctions trigonométriques des angles suivants, donnés en degrés décimaux :

2161. 49° 6175	68° 7224	27° 4123.
2163. 58° 3294	21° 2324	37° 8109.

Déterminer x en degrés, donné par :

2162. $\sin x = 0{,}289\ 589$	$\sin x = 0{,}469\ 472$	$\sin x = 0{,}874\ 620$.
2164. $\cos x = 0{,}891\ 007$	$\cos x = 0{,}446\ 198$	$\cos x = 0{,}788\ 011$.
2165. $\operatorname{tg} x = 0{,}700\ 21$	$\operatorname{tg} x = 1{,}279\ 94$	$\operatorname{tg} x = 0{,}305\ 731$.
2166. $\operatorname{cotg} x = 3{,}271$	$\operatorname{cotg} x = 1{,}234\ 90$	$\operatorname{cotg} x = 0{,}965\ 69$.

Déterminer x en grades, donné par :

2167. $\sin x = 0{,}117\ 537$ $\quad \sin x = 0{,}964\ 455$ $\quad \sin x = 0{,}555\ 570.$

2168. $\cos x = 0{,}831\ 470$ $\quad \cos x = 0{,}582\ 690$ $\quad \cos x = 0{,}723\ 570.$

2169. $\text{tg}\, x = 0{,}909\ 93$ $\quad \text{tg}\, x = 1{,}081\ 79$ $\quad \text{tg}\, x = 1{,}805\ 53.$

2170. $\text{cotg}\, x = 1{,}413\ 40$ $\quad \text{cotg}\, x = 2{,}584\ 8$ $\quad \text{cotg}\, x = 0{,}474\ 407.$

Déterminer x en radians, donné par :

2171. $\sin x = 0{,}918\ 788$ $\quad \sin x = 0{,}383\ 697$ $\quad \sin x = 0{,}183\ 746.$

2172. $\cos x = 0{,}117\ 524$ $\quad \cos x = 0{,}392\ 912$ $\quad \cos x = 0{,}362\ 548.$

2173. $\text{tg}\, x = 0{,}395\ 838$ $\quad \text{tg}\, x = 1{,}888\ 43$ $\quad \text{tg}\, x = 0{,}085\ 000.$

2174. $\text{cotg}\, x = 0{,}409\ 649$ $\quad \text{cotg}\, x = 2{,}563\ 01$ $\quad \text{cotg}\, x = 1{,}231\ 566.$

Calculer x donné par :

2175. $\sin x = \dfrac{4\sqrt{3}}{11}$ $\qquad \sin x = 1 - \dfrac{\pi}{e}.$

2176. $\cos x = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{9}$ $\qquad \cos x = \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}.$

2177. $\text{tg}\, x = 1 + \dfrac{\sqrt{e}}{\pi}$ $\qquad \text{tg}\, x = \dfrac{4\pi}{\sqrt{e}} - 1$

2178. $\text{cotg}\, x = 3\sqrt{e} + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ $\qquad \text{cotg}\, x = \sqrt{\pi} + e.$

2179. Résoudre l'équation :

$$2\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 = 0.$$

2180. Soit un triangle ABC. On donne :

$$\sin A = \frac{117}{125}, \quad AH = h = 24 \text{ cm}, \quad bc = 1000 \text{ cm}^2.$$

AH est la hauteur issue de A, AC = b, AB = c.
Calculer a, b, c, sin B et sin C.

2181. Résoudre l'équation :

$$\cos 3x + \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2182. Résoudre l'équation :

$$2\sin x - 2\cos x = 1 + \sqrt{3}.$$

2183. Résoudre l'équation :

$$\sqrt{5}\sin x + \cos x = 2.$$

2184. Résoudre un triangle connaissant :

$$b = 1\ 231{,}5; \quad c = 2\ 344{,}75; \quad A = 26{,}18 \text{ grades.}$$

2185. Résoudre un triangle connaissant

$$a = 28{,}95; \quad b = 15{,}18; \quad c = 20{,}33.$$

2186. Trois nombres x, y, z positifs sont liés par la relation $x^2y\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{x}$. Calculer z sachant que :

$$x = 4{,}25 \quad \text{et} \quad y = 0{,}057.$$

2187. Calculer le nombre :

$$x = 81\sqrt[3]{\frac{121{,}5}{\sqrt{2}}}$$

2188. Résoudre l'équation :

$$\text{Log}\,(x - 2) - \text{Log}\,(x - 3) = 1.$$

2189. Dans un triangle ABC, où l'angle B est aigu, on donne AC = 1, BC = 0,873, A = 19° 32′ 24″.
Calculer B en degrés, minutes, secondes.

2190. Résoudre l'équation :

$$\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2} = 1.$$

2191. Résoudre le triangle ABC connaissant

$$a = 5{,}21; \qquad b = 4{,}37; \qquad C = 38^\circ\,30'.$$

2192. Calculer l'angle φ compris entre 0 et 180° tel que

$$\cos\varphi = -\sqrt[3]{\frac{4{,}729}{13{,}42}}.$$

2193. Soit la fonction :

$$y = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

Calculer y pour $x = 100$ cm, $g = 981$ cm.

2194. Calculer :

$$x = \pi\frac{\sqrt[3]{0{,}063\,142}}{(1{,}057\,2)^2}$$

à l'aide de la table de logarithmes.

2195. Calculer par logarithmes l'expression

$$x = \frac{\sqrt[3]{7} \times 1{,}7223 \times \cos 32^\circ\,14'\,12''}{\text{tg}\,55^\circ\,27'\,44''}.$$

2196. Résoudre l'équation :

$$\sqrt{\pi}\cdot\cos x + 3{,}157\sin x = -3\cdot\sqrt{0{,}107}.$$

On exprime x en grades.

2197. Résoudre l'équation :

$$6\sin x + 7\cos x = 2.$$

2198. Résoudre l'équation :

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2.$$

2199. En posant $\cos\theta = x$, calculer θ en degrés, minutes et secondes pour que l'expression :

$$y = x^4 - 1{,}9\,x^2 + 0{,}84$$

ait pour valeur 0.

Montrer que, quel que soit x, y peut se mettre sous la forme

$$A \cos 4\theta + B \cos 2\theta + C.$$

Déterminer A, B, C puis calculer y pour $\theta = 35°$.

2200. On considère l'équation (E) :

$$\cos 2x - 2{,}16 \,.\, \cos x + 1{,}58 = 0. \qquad \text{(E).}$$

dans laquelle x désigne l'inconnue, exprimée en radians et comprise entre 0 et π.

1° $\frac{\pi}{3}$ est-il solution de (E) ?

2° Déterminer les solutions de (E) à 0,001 près.

2201. Calculer, à l'aide de la table de logarithmes, la valeur numérique de

$$x = \frac{\pi^3 \cdot \sqrt{3{,}982\,7}}{(0{,}534)^5}$$

2202. Calculer les angles A, B, C, d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs

$$a = \sqrt{2}, \quad b = 2, \quad c = 1 + \sqrt{3}.$$

2203. Résoudre les équations :

a) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = \sqrt{2}$.

b) $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = -\sqrt{2}$.

2204. Dans un triangle ABC les trois angles sont en progression arithmétique de raison φ. ($A < B < C$).

1° Entre quelles limites peut varier l'angle φ ? Établir entre les trois côtés a, b, c des triangles ABC, la relation

$$(a + c)^2 = b^2 + 3\,ac.$$

Réciproque.

Les trois côtés peuvent-ils être en progression arithmétique ou géométrique ?

2° On donne le côté b et le périmètre $2p$.

a) Calculer l'angle correspondant. Discussion.

b) Calculer les deux côtés inconnus a, c. Discussion.

c) Construire géométriquement le triangle. Discussion.

3° Supposant de nouveau $2p$ connu mais b variable, calculer en fonction de p et φ le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC. Variation de r en fonction de φ.

Calculer r pour $p = 1$ m. et $\varphi = 32{,}48$ g.

2205. 1° Soit un tétraèdre SABC tel que $SA^2 - SB^2 = CA^2 - CB^2$. Démontrer que SC est perpendiculaire à AB.

On mène par S la perpendiculaire SH au plan ABC. Si CH coupe AB en K, démontrer que CK est une hauteur du triangle ABC et que SK est une hauteur du triangle SAB.

Si D est un point quelconque de SC, calculer $DA^2 - DB^2$ en fonction de CA et CB.

2° Calcul logarithmique.

AB = 145,70 m, AC = 174,30 m, CB = 125,40 m. Calculer la hauteur CK. Calculer $CA^2 - CB^2$.

Si SA + SB = 203,40 m, calculer SA et SB. Déterminer la position du point K précédent.

Si SH = 51,78 m, calculer le volume du tétraèdre.

2206. On demande de calculer les côtés et les angles d'un triangle ABC avec les données suivantes :

— le rayon du cercle inscrit est $r = 4$ cm;
— I étant le centre du cercle inscrit on a IA = 5 cm;
— l'aire du triangle est $S = 108$ cm^2.

2207. Soient C le milieu d'un segment AB de longueur 2, M un point variable sur une demi-droite Ax perpendiculaire en A à AB.

Calculer, en fonction de la longueur AM = x, les tangentes des angles aigus AMB, AMC, BMC. On trouve $\text{tg BMC} = \dfrac{x}{x^2 + 2}$.

Calculer, en grades, le maximum m de l'angle BMC.

2208. On considère la fonction $y = \cos 2t + \cos t$, où nous supposerons t compris entre 0 et 180°.

1° Variation de y. Préciser en particulier le minimum et les valeurs de t pour lesquelles $y = 0$.

2° Calculer avec trois décimales les valeurs de y pour les valeurs de t de 20° en 20°; $t = 0$; 20°; 40°; ...; 160°; 180°.

Dessiner la courbe représentative de la variation de y en fonction de t.

3° Résoudre l'équation

$$\cos 2t + \cos t = 1{,}2.$$

2209. Un point de masse m est lancé sur un plan horizontal avec une vitesse initiale v; il subit des forces de frottement et s'arrête après avoir parcouru une distance

$$l = \frac{2v\sqrt{v}}{3k} \text{ pendant un temps } T = \frac{2\sqrt{v}}{k}.$$

k est un coefficient caractérisant les forces de frottement. Ces forces fournissent un travail $W = -\dfrac{1}{2}mv^2$.

a) Connaissant $m = 3{,}7$; $k = 2{,}1$; $v = 4{,}6$; calculer l, T, W.
b) Connaissant $l = 4$, $T = 2{,}5$, $W = -30$, calculer v, k, m.

2210. On considère la fonction $y = f(x) = 4x - \text{tg}^2 x$ où x est la mesure d'un arc exprimé en radians et l'on se propose d'étudier sa variation quand x varie de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$.

1° Calculer la dérivée de la fonction f. Exprimer cette dérivée en fonction de $t = \text{tg}\, x$. Étudier la variation de la fonction, et la représenter graphiquement par (C). On déterminera les coordonnées des points correspondants à $x = k \cdot \dfrac{\pi}{12}$ pour k variant de 0 à 6.

2° Vérifier que la fonction $F(x) = -\text{tg}\, x + 2x^2 + x$ est une primitive de $f(x)$. On considère le point A de (C) ayant pour abscisse $x = \dfrac{\pi}{3}$ et sa projection orthogonale A' sur Ox. Calculer, à $\dfrac{1}{1000}$ près l'aire comprise entre l'arc OA de (C), le segment AA' et l'axe Ox.

2211. Résoudre numériquement les équations suivantes :

a) $$x - \frac{1}{x} = \frac{15}{4}.$$

b) $$e^t - e^{-t} = \frac{15}{4}.$$

c) $$\operatorname{tg} 3z - \operatorname{cotg} 3z = \frac{15}{4} \qquad z \in [0\,;\,\pi].$$

d) $$\log z - \frac{1}{\log z} = \frac{15}{4}.$$

2212. On considère les deux fonctions suivantes de la variable positive x :

f : $$x \longrightarrow f(x) = y_1 = x^2 - 1$$

g : $$x \longrightarrow g(x) = y_2 = \operatorname{Log} x$$

1° Déterminer les valeurs de y_2 qui correspondent aux valeurs suivantes de x : 0,4; 0,5; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer x de manière que $y_2 = -1$.

2° Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions f et g. Limiter le graphique à $[0; 2] \times [-1; +3]$.

3° On considère la fonction :

f-g : $$x \longrightarrow (f - g)(x) = y_1 - y_2 = Y.$$

Étudier les variations de cette fonction. Courbe représentative.

4° Résoudre l'équation $Y = 0$.

Pour calculer l'une des racines x' de cette équation, on remplacera la courbe représentant y_2 par sa tangente au point d'abscisse $x = 0,5$. Former l'équation de la tangente. Donner la valeur de x' avec deux décimales.

2213. 1° Calculer $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ et $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, sachant que $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

2° Soit un angle x compris entre $-\pi$ et π. Représenter sur le cercle trigonométrique les valeurs de x solutions de

$$\cos x - \sin x > 0$$

3° Soit l'équation :

$$m(\cos x - \sin x) = \sqrt{1 + \sin x \cos x} \qquad (1)$$

où m est un paramètre.

Former l'équation résolvante, la résoudre et la discuter. On pose $\sin \alpha = \dfrac{m^2 - 1}{m^2 + \frac{1}{2}}$; exprimer les solutions en fonction de α. Étudier la disposition des points représentatifs de ces solutions sur le cercle trigométrique.

4° Montrer que si $|m| > \frac{1}{2}$ l'équation (1) possède deux racines comprises entre $-\pi$ et π quel que soit le signe de m.

Application numérique : Résoudre l'équation (1) lorsque $m = -0,755$. On donnera les résultats en degrés, minutes, secondes.

2214. Soit un triangle ABC de hauteur AH. On pose $l = \frac{BC}{AH}$.

Calculer les angles B et C sachant que $A = 30°$ et $l = 2$. On se servira des tables de logarithmes.

Calcul matriciel.

2215. Quelle est l'application de R^2 dans R^2 représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$

2216. On donne l'application linéaire de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner les formules de f et de $\overset{-1}{f}$.

2217. On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Quelle est l'application linéaire correspondante ?

2218. Soit l'application de R^2 dans R :

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= x + 2y \\ z' &= -x + 3y \end{aligned}$$

Quelle est la matrice de cette application.

2219. On considère l'endomorphisme de R^3.

$$f \begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = y - z, \\ z' = x + z \end{cases}$$

puis l'endomorphisme

$$g \begin{cases} X = x' - y' \\ Y = y' + z'. \\ Z = x' - z' \end{cases}$$

Calculer X, Y, Z en fonction de x, y, z.
Quelle relation y a-t-il avec les matrices ?

2220. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A + B, A − B, AB et BA.

2221. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1° Calculer A + B, A − B; 2 A − 3 B

2° AB et BA.

3° AB − BA.

2222. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1° Calculer $-2A + 3B$.

2° Calculer AB et BA.

2223. Calculer :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2224. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA. Remarque.

2225. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3, A^4.

2226. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2.

2227. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3, ..., A^n.

2228. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB et BA.

2229. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1} et B^{-1}

2230. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^{-1}.

2231. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problèmes de révision.

2232. Ox et Oy sont deux axes orthonormés; a est un nombre donné. On considère les trois points :

$$A\,[0;\ a(\sqrt{2}-1)];\qquad B\,[0;\ a(\sqrt{2}+1)];\qquad P\,(2a;\ 0)$$

et le cercle (C) dont un diamètre est le segment AB; on désigne par T l'inversion de pôle B et de puissance

$$BA\cdot BO = 2a^2(\sqrt{2}+1).$$

M étant un point variable sur (C), les deux droites MA et MB coupent Ox en H et K respectivement; on désigne par (γ) le cercle dont un diamètre est le segment HK.

1° Montrer, en utilisant T, que (γ) reste orthogonal à (C) quel que soit M; en déduire que tous les (γ) passent par deux points fixes que l'on précisera.

2° On désigne par x l'abscisse du milieu L de HK; évaluer, en fonction de x, le rayon ρ de (γ) et la puissance p, de P par rapport à (γ); étudier la variation de $y = \dfrac{p}{\rho^2}$ et tracer la courbe représentative.

3° Soit δ l'axe radical de (C) et de l'un des (γ); quel est le pôle de δ par rapport à (C) ? En déduire que φ passe par un point fixe.

4° On envisage les deux cercles passant par B et tangents à Ox, l'un en H, l'autre en K; déduire du 3° et en utilisant T le lieu du point variable S commun à ces deux cercles. Que peut-on dire sur la droite définie par leurs centres, sur leur seconde tangente commune et sur les bissectrices de ces tangentes ?

2233. 1° On donne un triangle ABC. Déterminer l'angle α d'une rotation de centre A et l'angle β d'une rotation de centre B de telle façon que C soit invariant dans le produit de ces deux rotations, effectuées dans l'ordre indiqué.

Montrer que le produit des trois rotations suivantes :

(A) : de centre A et d'angle 2. (AC; AB);
(B) : de centre B et d'angle 2. (BA; BC),
(C) : de centre C et d'angle 2. (CB; CA),

les angles étant des angles orientés de droites non orientées, est une transformation identique, c'est-à-dire que tout point M se transforme, après ces trois rotations, en lui-même.

2° *a*) Soient deux cercles égaux (ω) et (ω'), sécants en deux points R et S; si un cercle variable de centre R les coupe en quatre points P, Q et P', Q' respectivement, on peut répartir ces points en deux couples (P; Q) et (P'; Q') tels que les angles (RP, RP') et (RQ; RQ') soient égaux à une constante indépendante du cercle de centre R.

b) Lieu du milieu I de PP' (ou QQ').

c) La droite PP' (ou QQ') passe par un point fixe.

3° Soient M un point quelconque, M' son transformé par la rotation (A) définie dans 1°; M'' le transformé de M' par la rotation (B); on sait que la rotation (C) transforme M'' en M.

a) Calculer l'angle orienté de droites non orientées (M'M; M'M'') en fonction de l'angle analogue (M'A; M'B).

b) Lieu de M' pour que M, M' et M'' soient alignés.

c) Caractériser ce lieu par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. Lieux correspondants de M et M''.

d) En utilisant 2°, démontrer que la droite MM'M'' passe par un point fixe quand M' décrit son lieu.

e) Caractériser ce point fixe par rapport au triangle ABC.

2234. Dans un plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$, on considère sur l'axe $x'Ox$ deux couples de points (P; P') et (A; A'). Les deux points P et P' sont définis par $\overline{OP} = a$, $\overline{OP'} = -a$, $(a > 0)$, et les deux points A et A' sont conjugués harmoniques par rapport à P et P', et définis par le nombre positif k différent de 1, tel que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AP'}} = -\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'P'}} = k.$$

On désigne enfin par (D) la médiatrice $y'Oy$ de PP' et par (C) le cercle de diamètre AA', C étant son centre et R on rayon.

1° *a*) Montrer que (C) est le lieu des points M tels que $\frac{MP}{PM'} = k$.

b) Calculer $y = \overline{OC}$ et $z = R$ en fonction de a et k.

c) Étudier et représenter graphiquement les variations des fonctions y et z lorsque, a étant fixe, k varie de 0 à $+\infty$.

2° M étant un point quelconque du plan, on désigne par ρ et ρ' les mesures, comprises entre 0 et π, des angles en P et P' du triangle MPP', par H la projection de M sur PP' et K sa projection sur (D).

a) Calculer MP, MP', OH, OK en fonction de a, ρ et ρ'.

b) Trouver la relation que vérifient ρ et ρ' lorsque M décrit le cercle (C). En déduire que, lorsque M décrit (C), $\frac{MP^2}{MK}$ est égal à une constante dont on donnera l'expression en fonction de a et de k.

c) λ étant un nombre positif donné, montrer que le lieu des points M tels que $\frac{MP^2}{MK} = \lambda$ est constitué par un ou deux cercles : discuter suivant les valeurs relatives de a et λ.

3° On considère maintenant la figure formée par les points P, P', la droite (D) et le cercle (C), et **l'on suppose que le cercle (C) est fixe et que le point P décrit un lieu (L)**; la droite (D) est variable, ainsi que l'axe $x'Ox$.
Trouver le lieu de P', et l'enveloppe de (D) dans les deux cas suivants :

a) (L) est une droite (Δ);

b) (L) est un cercle (C); examiner en particulier le cas où (L) est orthogonal à (C).

2235. On considère un cercle (C) de centre O et de rayon R, et un point fixe A de ce cercle.
Une droite variable (Δ) coupe le cercle (C) en M et N. Les droites AM et AN coupent respectivement en M' et N' la droite perpendiculaire en O à AO.

1° Montrer que les quatres points M, N, M', N' sont sur un même cercle (Γ) qui, lorsque (Δ) varie, reste orthogonal au cercle de centre A et de rayon 2 R.

2° Déterminer l'axe radical de deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) correspondant à deux positions (Δ_1) et (Δ_2) de la droite (Δ).

3° On appelle I le centre du cercle (Γ). Montrer que, si B est un point quelconque de (Δ), la différence $IA^2 - IB^2$ s'exprime simplement en fonction de R et de OB, de sorte que, si la droite (Δ) passe par un point fixe F, la différence $IA^2 - IF^2$ reste constante. En déduire que, lorsque (Δ) varie en passant par F, le point I reste sur une droite fixe (D).
Pouvait-on obtenir ce dernier résultat en s'appuyant sur le résultat du 2°, sans passer par le calcul de $IA^2 - IF^2$?
Montrer que (D) est la polaire par rapport à (C) du point F' déduit de F par la translation qui transforme A en O. On pourra calculer la distance de 0 à (D).

4° Montrer que I a pour polaire par rapport à (C) la droite (Δ') déduite de (Δ) par la translation qui transforme A en O.

2236. 1° Résoudre le système

$$\begin{cases} (m^2 - 3m + 3)x + 2(m-2)y = 4(m-1)^2 & (1) \\ m^2 x + 2(m-3)y = 2(3m^2 - 2m + 3) & (2) \end{cases}$$

2° Les équations (1) et (2) représentent pour une valeur donnée de m deux droites (D) et (D′). En général ces droites ont un point commun M. Étudier le lieu (H) du point M. On déterminera les asymptotes et les points à tangentes parallèles à l'axe Ox.

3° Montrer que les droites (D) et (D′) passent respectivement par deux points fixes A et B lorsque m varie. Déterminer les coordonnées de ces points.

4° Équation de la droite AB; montrer qu'elle est tangente à (H) et déterminer les coordonnées du point de contact C.

5° En suivant le déplacement de M sur (H), retrouver les résultats de la discussion du 1°.

2237. Soit la fonction :

$$f: \quad x \in R \longrightarrow f(x) = y = \frac{x^5 + ax^3}{x^2 - 1} \in R$$

où a est un paramètre différent de -1.

1° Calculer la dérivée de y, et discuter suivant les valeurs de a le nombre des valeurs de x qui annulent cette dérivée.

2° Dans toute la suite du problème, on se place dans le cas $a = 2$. Étudier la variation de y et construire la courbe représentative.

3° Lorsque x est un entier positif, pour quelles valeurs de x la fraction $y = \frac{x^5 + 2x^3}{x^2 - 1}$ est-elle irréductible ? Pour quelles valeurs entières de x, y peut-il être entier ?

4° Trouver les fractions irréductibles $x = \frac{p}{q}$ pour lesquelles $\frac{1}{y}$ est une fraction décimale. (On commencera par montrer que si u et v sont deux entiers, $u^2 + 2v^2$ ne peut être multiple de 5 que si u et v sont deux multiples de 5).

2238. On donne la relation :

$$x(y^2 + ay - 2) + y^2 + by + c = 0$$

entre les coordonnées x, y d'un point d'un plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$.

1° Cette relation définit x comme fonction de la variable y. Déterminer a, b, c de façon que la courbe représentative des variations de cette fonction passe par l'origine O en y admettant pour tangente l'axe $y'Oy$ et qu'elle admette en outre pour asymptote la droite d'équation $y = 1$.

Étudier les variations de la fonction $x = x(y)$ ainsi définie et tracer la courbe représentative C.

2° On considère la droite d'équation $y = mx$ $(m \neq 0)$. Montrer que cette droite coupe, pour toute valeur non nulle de m, la courbe C en deux points A, B distincts de 0.

On désigne par A′, B′ les projections orthogonales des points A et B sur $y'Oy$. Montrer que le cercle S de diamètre A′B′ coupe $x'Ox$ en deux points fixes. F désignant un point donné du plan, montrer que la polaire de F par rapport à S passe par un point fixe M. Déterminer les coordonnées de M lorsque F a pour coordonnées $x = 2$, $y = 2$.

3° On considère les coniques qui ont pour foyer F et pour cercle principal le cercle variable S; montrer que l'axe non focal reste tangent à une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Montrer que la directrice relative à F passe par un point fixe. Quel est le lieu du deuxième foyer ?

Montrer que la directrice relative à ce deuxième foyer reste tangente à une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

Déterminer celles des coniques de la famille qui sont des hyperboles équilatères.

2239. Soit la fonction $y = \dfrac{(x+2)(x+6)}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

1° Indiquer dans quels intervalles cette fonction est définie et étudier avec précision ce que devient cette fonction lorsque la variable x tend vers les bornes de ces intervalles.

2° Étudier les variations de la fonction y.

3° Montrer que la courbe représentative a deux asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées et placer la courbe par rapport à ces asymptotes.

4° Tracer la courbe représentative; chercher les tangentes aux points où elle coupe les axes de coordonnées.

5° Une sécante variable de coefficient directeur m tourne autour du point fixe A $(-2; 0)$. Discuter suivant les valeurs de m le nombre des points d'intersection de la sécante et de la courbe représentative.

2240. Soit un segment $BC = a$, de milieu O, et D un point de ce segment, défini par $\dfrac{DB}{DC} = m$. Sur la perpendiculaire en D à BC, on porte un segment $DH = l$ (l constante). On mène par H une sécante coupant les perpendiculaires en B et C à BC aux points M et N respectivement, et l'on suppose que :

$$\overline{BM} \cdot \overline{CN} = l^2 = DH^2.$$

1° Montrer que $BM = ml$ et $CN = \dfrac{l}{m}$. Établir que la perpendiculaire menée de B à DM et la perpendiculaire menée de C à CN coupent la droite DH au même point A. Calculer DA en fonction de a, l, m.

Soit A' le symétrique de A par rapport à BC. Que peut-on dire des points B, H, C, A' ? Quelle est la position de A relativement au triangle BHC ?

2° Calculer les aires S_1 du trapèze MBCN et S_2 du triangle MDM, en fonction de m. Variation et courbe représentative de ces deux aires quand D décrit BC.

3° Calculer la tangente de l'angle MDN en fonction de a, l et m. Prenant ensuite $\dfrac{l}{a} = \dfrac{2}{5}$, étudier la variation de la fonction de m obtenue. Tracer la courbe représentative, quand D décrit BC.

4° On pose $\overline{OD} = x$. Exprimer m en fonction de x et en déduire le lieu de A quand D décrit BC.

2241. On considère deux axes de coordonnées orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$ et les points A $(6; 0)$, B $(4; 0)$ et C $(9; 0)$.

Un point m, dont l'abscisse est désignée par x, peut varier sur $x'Ox$; soit p sa puissance par rapport au cercle (S) dont BC est un diamètre.

1° Calculer en fonction de x l'expression $z = \dfrac{p}{mA^2}$. Étude et représentation graphique (Γ) de cette fonction z.

En utilisant (Γ), discuter l'existence des racines de l'équation

$$x^2 - 13x + 36 = \lambda (x-6)^2,$$

où λ est un paramètre, et donner à leur sujet tous renseignements intéressants.

2° Soit maintenant M un point du plan, d'abscisse x et d'ordonnée y; on désigne par m sa projection orthogonale sur $x'Ox$, par P sa puissance par rapport à (S). Calculer en fonction de x et y l'expression $u = \frac{p}{MA^2}$.

x restant constant, étudier la fonction u de y; discuter suivant la valeur attribuée à x.

3° k désignant un nombre donné inférieur ou égal à $\frac{25}{24}$ et différent de 1, il existe deux points de $x'Ox$, m_0 et m_1, pour lesquels on a $z = k$. Soit M un point du plan pour lequel on a aussi $u = k$. (z, u, m conservent la même signification que précédemment.

Établir la relation :

$$mM^2 = -\overline{mm_0} \cdot \overline{mm_1}.$$

On montrera qu'elle est caractéristique. En déduire le lieu de M tel que $\frac{p}{MA^2} = k$.

Que se passe-t-il pour $k = \frac{25}{24}$? Pourquoi a-t-on écarté les nombres supérieurs à $\frac{25}{24}$ et le nombre 1 ?

2242. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$; un cercle tangent à $x'Ox$ en T se déplace de telle façon que son centre I décrive la droite d'équation $y = a$, a est un nombre positif.

1° La deuxième tangente au cercle (I), issue de O, rencontre IT en A. On pose $\overline{OT} = x$, $\overline{TA} = y$ et l'on repère I par l'angle $(Ox; OI) = \varphi$. Exprimer x et y en fonction de φ, en déduire une relation entre y et x, que l'on mettra sous la forme $y = f(x)$.

Variation de la fonction ainsi définie; tracer la courbe représentative; lieu du point A, en supposant $a = 1$.

2° Une droite variable, d'équation $y = mx$, rencontre la courbe précédente en deux points M et N autres que O. Trouver l'abscisse, puis l'ordonnée du milieu du segment MN en fonction de m; en déduire le lieu de ce point.

Construire géométriquement les points M et N; retrouver le lieu du milieu de MN.

3° On se limite maintenant aux valeurs de x supérieures à a. La deuxième tangente au cercle (I) menée du point A rencontre Ox en B. Exprimer le rayon R du cercle circonscrit au triangle AOB en fonction de φ, puis de x. Calculer x et φ lorsque $R = 3a$. (Précision des tables de logarithmes.)

2243. 1° On considère une ellipse (E) de centre O, d'axes AA′ et BB′, de foyers F et F′. $AA' = 2a$; $BB' = 2b$; $(b < a)$; $FF' = 2c$. Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée. Montrer que le quaterne AA′FH est harmonique.

La perpendiculaire à AA′ en F coupe (E) en K et K′; en utilisant le cercle principal montrer que la tangente KT à (E) en K passe par H. Calculer FK, OH, FH et la tangente de l'angle du grand axe et de KT. On donnera des expressions rationnelles en a, b, c.

2° On considère dans un plan vertical (V) deux axes orthonormés x'_1Sx_1 et $z'Sz$; Sx_1 est hotizontal et orienté vers la droite, Sz est vertical et orienté vers le haut. D'autre part on désigne par (Q) le plan horizontal perpendiculaire à $z'Sz$ en un point O situé sur Sz'. Un segment de longueur constante $2l$, dont les extrémités se déplacent sur les demi-droites Sx_1 et Sz, est le diamètre d'un cercle (C) dont le plan est perpendiculaire au plan (V). Soit α l'angle aigu du segment avec x'_1Sx_1 et soit (E) la projection du cercle (C) sur le plan (Q). On se propose l'étude des courbe (E).

a) Calculer les demi-axes, la demi-distance focale à l'aide de l et α. Quelle est l'excentricité ? Trouver le lieu des sommets et celui des foyers. Trouver l'enveloppe des cercles directeurs.

b) Soient ω le centre de (E); $y'Oy$ la tangente en O à (E); $x'Ox$ l'axe perpendiculaire en O à $y'Oy$; A et A′ sont les sommets du grand axe, F et F′ les foyers. La perpendi-

culaire en F' à AA' coupe (E) en deux points; on désigne par K le point le plus près de y'Oy. Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée; A est entre F et H; la tangente en K à (E) passe par H et coupe x'Ox en I. Calculer FK, ωH, GH en fonction de l et α. Si β est l'angle de IH avec le grand axe, montrer que tg β = sin α. Montrer que ωI = l.

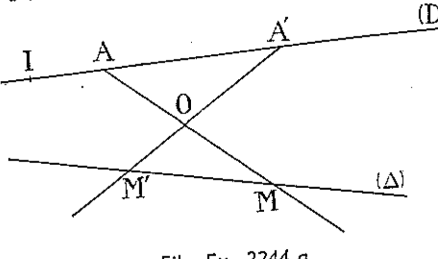
Soit K' la projection de F sur y'Oy; IK' coupe le grand axe en J. Montrer que OK passe par J. En déduire une construction simple des points K et H quand on se donne le point F sur son lieu. Montrer que l'angle de IJ avec le grand axe est $\frac{\alpha}{2}$. IH coupe y'Oy en L; montrer que FL coupe x'Ox en un point fixe Ω.

c) Le cercle de centre Ω, de rayon l, coupe x'Ox en O et en O_1; IH coupe ce cercle en M et M_1; les perpendiculaires en M et M_1 à IH coupent x'Ox en φ et en φ_1.

Montrer que Ω est le milieu de $\varphi\varphi_1$.

Montrer en évaluant la puissance de I par rapport au cercle de diamètre $\varphi\varphi_1$, que φ et φ_1 sont fixes. Évaluer le produit $\overline{\varphi M} \cdot \overline{\varphi_1 M_1}$. Montrer que l'enveloppe de IH est une hyperbole dont on demande les éléments.

La droite IH coupe la perpendiculaire $y'_1O_1y_1$ à x'Ox en un point L_1. Évaluer OL et O_1L_1 en fonction de l et α. Quelle est la valeur du produit $\overline{OL_1} \cdot \overline{O_1L_1}$?



Fih. Ex. 2244 a.

2244. On considère les deux droites joignant un point fixe O à deux points A et A' variables sur une droite (D) ne passant pas par O, ces deux points restant homologues dans une inversion donnée de pôle I, situé sur (D), de puissance k. ($\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = k$). On coupe ces deux droites par une droite quelconque (Δ) ou un cercle (C) passant par O et l'on se propose d'étudier la correspondance entre les deux points M et M' ainsi obtenus (fig. Ex. 2244).

1° Si $k > 0$, montrer que les droites OA, OA' restent conjuguées harmoniques par rapport à deux droites fixes. En conclure que sur (Δ), M et M' se correspondent aussi par une inversion. Cas particulier ? Dans la suite, k est quelconque.

2° On considère un cercle (C_0) dont la tangente en O est parallèle à (D). Montrer que la droite M M'_0 passe par un point fixe.

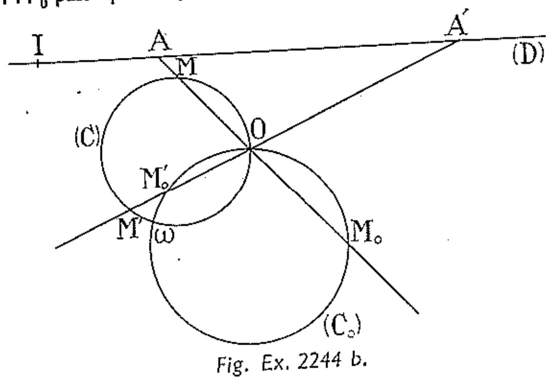


Fig. Ex. 2244 b.

3° Un cercle (C) quelconque coupe (C_0) en O et ω. Déduire de l'étude du triangle

$\omega M_0 M$ la correspondance entre M_0 et M. En conclure que la droite MM′ passe aussi par un point fixe.

4° Montrer que les points M et M′ sur (Δ) se correspondent par inversion quel que soit le signe de k.

2245. 1° Étudier les variations de la fonction

$$y = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4}$$

et tracer sa courbe représentative (C).

2° On désigne par A le point de (C) dont l'abscisse est — 1 et par (D) la tangente en ce point à (C). Trouver l'équation de (D) et les coordonnées du point B distinct de A où cette droite coupe (C).

3° La droite variable d'équation $y = h$ coupe $y'Oy$ en un point P. Pour quelles valeurs de h coupe-t-elle (C) en deux points distincts M′ et M″, en deux points confondus, en un point unique?

Exprimer en fonction de h les coordonnées du point I milieu de M′M″, et celles du point Q conjugué harmonique de P par rapport à M′ et M″. En déduire le lieu de I et celui de Q.

4° Lorsque M′ et M″ existent, on désigne par m' et m'' les projections, variables avec h, de M′ et M″ sur $x'Ox$. Montrer que tout cercle (Γ) passant par m' et m'' est orthogonal à un cercle fixe indépendant de h. Indiquer le centre et le rayon de ce cercle.

5° Montrer que ceux des cercles (Γ) qui sont tangents à la droite d'équation $x = 4$ sont en même temps tangents à un cercle fixe (Ω) dont on précisera le centre et le rayon. Établir que le lieu de leurs centres est constitué par certains arcs, que l'on précisera, d'une parabole dont on donnera le foyer F, la directrice Δ, l'axe, le sommet S, et dont on construira les points d'intersection avec $y'Oy$.

2246. On donne dans un plan (P) deux points fixes A et A′ et le milieu O de AA′ ($OA = OA' = a$).

1° On fait passer par A deux droites rectangulaires (Δ) et (Δ′). Construire un cercle (Γ) passant par A′ et tangent à (Δ) et (Δ′). Trouver, quand (Δ) et (Δ′) varient, le lieu du centre de (Γ), les lieux des points de contact M et M′ de (Γ) avec (Δ) et (Δ′), et l'enveloppe de MM′.

2° On fait passer par A et A′ deux cercles orthogonaux (C) et (C′) de centres ω, ω′. On pose $\omega\omega' = d$. On désigne par N et N′ les points de contact de (C) et (C′) avec une tangente commune (D). Trouver les lieux des points N et N′ quand (C) et (C′) varient en restant orthogonaux; montrer que $NN'^2 = 2ad$.

3° Étudier les variations de $y = NN'^2$ en fonction de $x = O\omega$ ($x \geqslant 0$); courbe représentative; on prendra dans cette question $a = 1$.

2247. L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une transformation T définie en géométrie plane par les éléments suivants : une droite fixe (D) et deux points fixes a et b; on suppose que le point b n'est pas situé sur (D) et que la droite ab n'est pas parallèle à (D). Le point M transformé de m par la transformation T est l'homothétique de a dans l'homothétie de centre variable m qui transforme b en un point variable P de la droite (D).

A) 1° Construire M quand on se donne m en dehors de la droite (u) menée par b parallèlement à (D).

Construire m quand on se donne M en dehors de la droite (V) déduite de (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{ba}$.

2° Soient M et M′ les deux points transformés de m et m', P et P′ les points où les droites mb et $m'b$ rencontrent (D). Le vecteur $\overrightarrow{P'M'}$ correspond au vecteur $\overrightarrow{PM}$ dans une homothétie, ou une translation, variable avec m et m'; préciser cette homothétie ou cette translation. En déduire que les droites mm' et MM′ concourent sur (D) ou sont parallèles à (D).

3° Démontrer que le lieu de M est une droite (L) quand m décrit une droite (l) distincte de (u).

4° Montrer que (L) est parallèle à la droite qui joint le point a au point i d'intersection des droites (l) et (u).

B) On fait décrire au point m le cercle (C) de centre a qui passe par b.

1° Q étant le point d'intersection de la droite (MP) avec la droite (V) définie dans (A; 1°), vérifier l'égalité des longueurs Ma et MQ.

2° Montrer que M décrit une hyperbole H de foyer a, de directrice associée (V) et d'excentricité $e = \frac{ab}{ak}$, k étant la projection orthogonale du point a sur la droite (u).

3° Déterminer la tangente en M à l'hyperbole H et montrer qu'elle rencontre (D) au même point que la tangente en m au cercle (C).

4° Construire les asymptotes de l'hyperbole H.

C) On fait décrire au point m un cercle (s) de centre a et de rayon R. Montrer que le lieu de M est une conique de foyer a, de directrice associée (V) et d'excentricité $\frac{R}{ak}$, k étant toujours la projection orthogonale du point a sur la droite (u). Discuter la nature de cette conique.

2248. Dans un plan on considère un axe $x'Ox$ et un point I_0 de $x'Ox$ d'abscisse a positive. On considère les deux droites (D) et (D′) passant par O et telles que

$$\overline{\text{angle}}\,(Ox;\ D) = +\frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \overline{\text{angle}}\,(Ox;\ D') = -\frac{\pi}{3}.$$

La perpendiculaire (Δ) en I_0 à Ox coupe (D) au point A_0 et (D′) au point B_0.

1° Étant donné un point I sur (Δ), construire un segment AB de milieu I ayant son extrémité A sur (D) et son extrémité B sur (D′).

2° Montrer que, quand I varie sur (Δ), A et B se correspondent dans une rotation dont on déterminera le centre F et l'angle. Quelle est l'enveloppe de la droite AB?

3° Soit (γ) le cercle tangent en A à FA et en B à FB. Trouver le lieu du centre de ce cercle quand I décrit (Δ).

Montrer que si P est un point quelconque de (γ) le rapport $\frac{PF}{PI}$ a une valeur numérique bien déterminée, que l'on indiquera. En déduire le lieu (Γ), quand I décrit (Δ), des points d'intersection M et M′ de (γ) et de la parallèle à Ox menée par I. Établir qu'en M et M′ ce lieu est tangent au cercle (γ).

4° Soit $y'Oy$ l'axe se déduisant de $x'Ox$ par la rotation rot$\left(A;\ +\frac{\pi}{2}\right)$. Écrire dans le système d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, l'équation de (Γ).

Calculer les coordonnées du point N d'intersection de (Γ) et de la droite d'équation $y = m\,(x - 2a)$; calculer les coordonnées du point N′ d'intersection de (Γ) et de la droite passant par le point ($x = 2a$; $y = 0$) et perpendiculaire à la précédente. Former l'équation de la droite NN′. Montrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie et indiquer les coordonnées de ce point fixe.

2249. On considère la famille des sphères S tangentes à une droite donnée D en un point fixe donné A.

1° En supposant de plus S astreinte à être tangente à un plan donné P, trouver les lieux respectifs du point de contact I de S et P, du centre O de S, du point de contact I′ de S avec le plan tangent parallèle à P, dans le cas où D perce P en un point M.

2° Même question que 1°, en supposant que D est donnée parallèle à P.

3° En supposant S astreinte à couper P suivant un cercle C de position variable mais de rayon constant donné r, trouver les lieux des centres de C et S, en se bornant au cas où D perce P.

4° On considère le plan du cercle de contact de S avec le cône circonscrit ayant pour sommet le point M où D perce P. Montrer que ce plan, dans l'une et l'autre des deux hypothèses des 1° et 3°, reste tangent à un cône fixe à base circulaire située dans P. Quels changements faut-il apporter à la solution de cette question dans le cas où la condition de début imposée à S d'être tangente à D en A est remplacée par la condition de passer par deux points fixes G et G′ de D du même côté de P ?

2250. On donne deux cercles fixes (O) et (O′) égaux, de rayon R et tangents extérieurement en A. A un point M de O on fait correspondre le point M′ de (O′) tel que $\overline{\text{angle}}\left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{2}$ (fig. Ex. 2250).

A) 1° Dans quelle transformation se correspondent les points M et M′ ? Montrer que la médiatrice de MM′ passe par un point fixe.

2° Lieu du milieu J du segment MM′. Montrer que l'enveloppe de MM′ est une courbe (H), dont on précisera les éléments remarquables : centre, axes, foyers, excentricité..

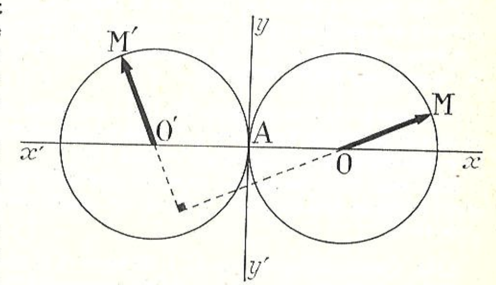


Fig. Ex. 2250.

3° Montrer que cette courbe (H) est bitangente aux deux cercles (O) et (O′).

4° Si l'on désigne par F et F′ les foyers de la courbe (H), F′ étant le point tel que l'angle MFM′ ne soit pas droit, démontrer que l'aire du triangle MF′M′ est constante.

B) Soient Ax et Ay deux axes orthonormés, Ax porté par O′O et Ay perpendiculaire à O′O (voir figure).

a) On considère un point P de coordonnées (x; y). Soit P′ le transformé de P dans l'inversion de centre A et de puissance $\frac{R^2}{2}$. Exprimer x et y en fonction des coordonnées X, Y de P′ et de R.

b) On transforme par l'inversion précédente la courbe (H) trouvée en A, 2°. On obtient une courbe (L). Présente-t-elle des points à l'infini ? Préciser ses éléments de symétrie, ainsi que les tangentes parallèles aux axes et les tangentes à l'origine.

Faire un tracé de la courbe (L).

Trouver l'équation de la courbe (L) en utilisant *a*).

2251. Dans un plan on a un cercle (C) de centre O, de rayon R, une droite D à une distance $OH = \frac{R}{2}$ de O et un point M sur D à une distance $HM = x$ de H.

1° Construire les cercles Γ et Γ' tangents à D en M et tangents au cercle (C). Soient A et B les points de contact; MA et MB recoupent (C) en A′ et B′, dont on précisera la position remarquable par rapport à D.

2° Démontrer que le cercle AMB est orthogonal à (C). Soit M' le point diamétralement opposé à M sur ce cercle. Montrer que le lieu de M' quand D tourne autour de M est une droite, qu'on appellera Δ (M). Lieu du point de rencontre des tangentes en A et B au cercle (C).

3° Si M décrit une droite Z ne passant pas par O, Δ (M) passe par un point fixe. Si M décrit un cercle passant par O, trouver l'enveloppe de Δ (M).

4° Calculer en fonction de x et R les rayons des deux cercles Γ et Γ'. Comment varie le rapport des deux rayons quand M décrit D ?
Trouver les lieux des centres de Γ et Γ' quand M décrit D.

2252. On donne dans le plan deux axes orthonormés Ox, Oy, et sur l'axe Oy un point fixe H d'ordonnée positive h. A tout point L de x'Ox on associe la projection orthogonale P du point O sur la droite HL; on désigne par K la projection orthogonale de P sur Oy.

1° Sur la parallèle à l'axe Oy menée par L, on marque le point M tel que

$$y = \overline{LM} = \overline{KP}.$$

Exprimer y en fonction de l'abscisse $x = \overline{OL}$ du point L. Étudier la variation de cette fonction. Tracer la courbe (C) décrite par le point M quand x varie. Etudier les points et tangentes remarquables de cette courbe.

2° On désigne par L' le point où la droite OP coupe la parallèle à Ox menée par le point H et par Q le point d'intersection des droites KP et LL'.
Indiquer une propriété remarquable du triplet (K; P; Q). En déduire le lieu du point Q et l'enveloppe de la droite LL'.

3° Montrer que le produit $\overline{OL} \cdot \overline{HL'}$ conserve une valeur constante quand x varie, et que le cercle de diamètre LL' appartient constamment à un faisceau de cercles que l'on caractérisera par ses points limites I et J.
Soit, pour fixer les idées, I celui des points limite dont l'abscisse est positive; montrer que l'angle de droites (IL; IL') conserve, quand x varie, une valeur constante que l'on précisera.

2253. Deux cercles (C) et (C'), de centres O et O', de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. La droite OO' recoupe (C) en K' et (C') en K'. On appelle (Γ) tout cercle tangent à (C) et à (C').

1° Soient M et M' les contacts de (Γ) avec (C) et (C'). Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe S. En déduire la construction d'un cercle (Γ).

2° De S on mène une tangente à (Γ). Quel est le lieu (L) du point T de contact quand (Γ) varie ? Réciproquement, T étant donné sur (L), combien existe-t-il de cercles (Γ) tangents en T à la droite ST ? Effectuer la construction de ces cercles.

3° On transforme la figure par une inversion de pôle A et de puissance $\overline{AK} \cdot \overline{AK'}$; construire avec soin les transformés de (C), (C'), (Γ) et (L).

4° Quel est le lieu des centres ω des cercles (Γ) ? Prenant OO' pour axe des x et la médiatrice du segment OO' pour axe des y, donner l'équation de ce lieu. Calculer le rayon ρ de (Γ) en fonction de l'abscisse x de son centre ω.
Discuter le nombre des cercles (Γ) ayant un rayon ρ donné, suivant la valeur de ρ.

2254. On considère, dans un plan, deux cercles (C) et (C') de centres O et O', de rayons R et R', tangents respectivement en I et I' à une droite fixe D.

1° Montrer que, I et I' étant fixes, si (C) et (C') se coupent en P et Q, la droite PQ passe par un point fixe J et que le point $\overline{JP} \cdot \overline{JQ}$ est constant.

2° On suppose maintenant que, (C) étant fixe, I' variable, (C') varie en coupant (C) sous un angle constant α.

Montrer, par une inversion de pôle I par exemple, que les cercles (C′) se divisent en deux familles, les cercles (C'_1) de la première étant tangents à un cercle fixe (γ_1) tangent en I à D et les cercles (C'_2) de la deuxième étant tangents à un cercle fixe (γ_2) également tangent en I à D. Les cercles (γ_1) et (γ_2) seront déterminés par leurs rayons r_1 et r_2 exprimés en fonction de R et de α. Examiner les cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lieu des centres O'_1 des cercles (C'_1) et des centres O'_2 des cercles (C'_2).

3° On suppose enfin que, I restant fixe, R varie, (C′) coupant encore (C) sous un angle constant α.

A chaque valeur de R correspondent un cercle (γ_1) et un cercle (γ_2); R variant, les rayons de ces cercles, r_1 et r_2, varient.

a) Montrer qu'à chaque valeur de R correspondent un cercle (C'_1) et un cercle (C'_2) tangents à D en un point I′ donné.

b) Établir que si R varie, I′ restant fixe, les produits $r_1R'_1$, $r_2R'_2$, RR'_1, RR'_2, R'_1 et R'_2 désignant les rayons de (C'_1) et C'_2), ont des valeurs constantes que l'on déterminera en fonction de II′ et de α.

Donner les valeurs de ces constantes pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

2255. 1° Un mobile M_1 décrit un axe $x'Ox$ d'un mouvement uniformément varié. Former l'équation de son mouvement, sachant que son abscisse est nulle aux instants $t = 1$ et $t = -1$, et égale à -1 à l'instant $t = 0$.

2° Un deuxième mobile M_2 décrit le même axe suivant la loi

$$x_2 = \overline{OM_2} = -t^2 - 2t + 3.$$

Trouver à quels instants, en quels points et avec quelles vitesses les mobiles M_1 et M_2 se rencontrent. Montrer qu'on peut trouver un troisième mobile M_3 qui, animé d'un mouvement uniforme, rencontrerait aux mêmes dates M_1 et M_2; former l'équation de son mouvement.

3° Tracer avec soin, sur un même graphique, les diagrammes des trois mouvements. Les diagrammes de M_1 et M_2 se coupent en A et B; A désignant le point qui correspond à une valeur de t positive, calculer en degrés, minutes, secondes, l'angle aigu des tangentes en A aux deux courbes.

4° Déterminer t pour que $\overline{M_1M_2} > 0$ et que $\left\| \overrightarrow{M_1M_2} \right\| = l$, l étant un nombre donné. Discuter.

2256. On considère la fonction :

$$y = \frac{x^2 - 2bx + a}{ax^2 - 2bx + 1}, \qquad (1)$$

dans laquelle a et b sont les coordonnées d'un point M d'un plan repéré par rapport à deux axes orthonormés Oa et Ob.

Dans le plan xOy, les axes Ox et Oy sont orthonormés.

1° Montrer que la courbe d'équation (1) passe par deux points fixes quel que soit M. Etudier les variations de la fonctions (1) lorsque les coordonnées du point M sont $a = -2$, $b = +1$. Construire la courbe représentative, qu'on appellera (C).

2° La droite (D) dont l'équation est $y = m$ coupe la courbe (C) en deux points A et B. Pour quelle valeur de m l'angle AOB est-il droit? Montrer que, dans ce cas, le cercle de diamètre AB est tangent à l'axe $x'Ox$.

3° On suppose $m = +1$. Soient E, d'abscisse négative, et F les intersections avec Ox des asymptotes de la courbe (C) parallèle à l'axe Oy; G, d'abscisse négative, et H les points d'intersection de la courbe (C) avec Ox; I l'intersection des deux droites (D) et Oy.

Quel est l'axe radical des cercles de diamètres EG et FH ? Démontrer que dans les triangles IEG et IFH on a les relations

$$\widehat{G} - \widehat{E} = \widehat{F} - \widehat{H} = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer les angles du triangle OBH (B ayant une abscisse positive). Quel est l'inverse du cercle de diamètre AB dans l'inversion inv (0; 1) ? Quels sont les inverses des cercles IEG et IFH dans l'inversion de pôle I et de puissance + 1 ?

4° Dans quelle région du plan aOb doit-on prendre le point M pour que la fonction (1) n'ait ni maximum, ni minimum lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$?

2257. Soient dans un plan trois points alignés A, F, A', F étant situé entre A et A', (P) la parabole de foyer F et de sommet A, (P') la parabole de foyer F et de sommet A', M et M' les points communs aux deux paraboles.

1° On suppose que, F restant fixe, A et A' se déplacent sur deux droites parallèles du plan, D et D'; trouver les enveloppes des tangentes aux sommets des paraboles (P) et (P'), ainsi que les enveloppes des directrices de ces paraboles.

2° A, F, A' étant donnés, construire géométriquement les points M et M'. Calculer en fonction des longueurs des segments FA et FA' la longueur de la corde MM'.

3° Trouver l'enveloppe de la droite MM' lorsque, F restant fixe, A et A' décrivent deux droites parallèles D et D'.

4° A et A' étant fixes, F décrit le segment AA'. Trouver le lieu géométrique des points M et M' ainsi que le lieu géométrique des points H, H', orthocentres des triangles MAA', M'AA'.

5° A et A' restant toujours fixes, on pose $\overline{OF} = R\cos(\pi - t)$, $\leqslant$ AA' = 2 R, O milieu de AA', la droite AA' étant orientée de O vers A, $O \leqslant t \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Construire les tangentes aux courbes lieux de M et H aux points M, H correspondant à une position de F, et calculer en fonction de t la tangente trigonométrique de l'angle aigu α que font ces droites entre elles.

2258. On considère dans un plan, une demi-droite OX (que l'on dessinera verticale et descendante) et deux autres demi-droites, OU et OV, faisant avec elle un même angle aigu θ. Par un point I pris sur OX, à une distance λ du point O, on mène la perpendiculaire xy à OX; soient α et β les points où elle coupe OU et OV, γ le cercle ayant $\alpha\beta$ comme diamètre. On prend d'autre part sur OX un autre point, h, à une distance δ du point I, du côté opposé au point O; soit m l'un des points où la perpendiculaire en h à OX coupe le cercle γ, à supposer qu'elle le coupe, et soit m' la projection de m sur xy.

A) On fait varier λ, la distance δ restant constante.

1° Quel est le lieu géométrique du point m' ? (On pourra chercher la relation indépendante de λ qui existe entre les coordonnées de ce point par rapport à deux axes orthonormés OX, OY.

2° Soit t le point où la tangente en m au cercle γ coupe xy. Démontrer que le faisceau (O; α, β, m', t) est harmonique.

B) On considère le cône engendré par les demi-droites OU et OV en tournant autour de OX. La figure précédente peut être interprétée comme la représentation en géométrie descriptive, la ligne de terre étant xy, de ce cône, de sa section par un plan perpendiculaire à son axe et d'un plan Π parallèle à son axe, à la distance δ de ce dernier. m et m' sont les deux projections d'un point M de la section de ce cône par le plan Π.

1° Construire les traces du plan tangent en M à ce cône.

2° Construire la tangente en m' à la projection frontale de la section du cône par le plan Π et reconnaître (en utilisant A, 2°) que le point m' est le milieu du segment déterminé par OU et OV sur cette tangente.

2259. 1° Soit un repère orthonormé xOy. Etudier les variations et représenter graphiquement par une courbe (C) la fonction $y = x + \frac{4}{x^2}$.

2° Calculer l'aire $S(a)$ du trapèze curviligne compris entre la courbe (C), son asymptote oblique (D) et les parallèles à Oy d'abscisse 2 et a $(a > 0)$.

3° L'aire $S(a)$ a-t-elle une limite quand a tend vers $+\infty$; quand a tend vers 0?

2260. Résoudre l'inéquation

$$\log_2 x > \log_8 (3x - 2)$$

On rappelle que $\log_a x$ représente le logarithme de base a de x.

2261. Dans un plan rapporté à deux axes orthonormés $(Ox; Oy)$, on considère le cercle (ω) de centre ω $(0; a)$, de rayon a, et la droite (D) d'équation $y = 3a$ $(a > 0)$.

Soit un point M variable de la droite (D) et un point T variable de $x'x$. On désigne par m l'abscisse de M, par t l'abscisse de T (fig. Ex. 2261).

1° Montrer que l'équation de la droite MT est

$$3ax - (m - t)y - 3at = 0 \quad (1)$$

2° Montrer que la droite MT est tangente au cercle (ω) si, et seulement si,

$$t^2 + 2mt - 3a^2 = 0. \quad (2)$$

Dans toute la suite on supposera que cette relation (2) est vérifiée.

On observera que, quand M $(m; 3a)$ est donné, les abscisses des points, T et T', où les tangentes issues de M coupent $x'Ox$ sont racines de l'équation (2).

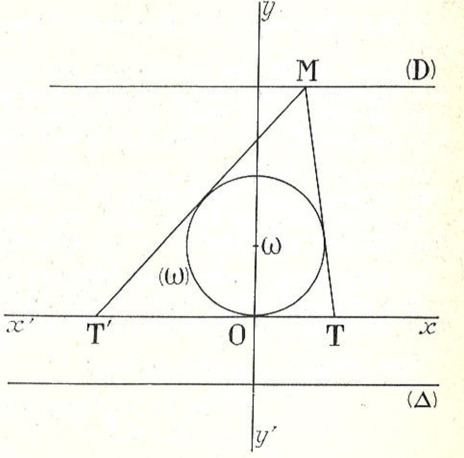


Fig. Ex. 2261.

3° A chaque point T de $x'Ox$, distinct de O, on associe le point M où la tangente issue de T à (ω), autre que TO, coupe (D).

Montrer géométriquement que la correspondance entre les points T et les points M est fonctionnelle. Cette fonction est-elle une application de $x'Ox - \{O\}$ sur D; est-elle bijective? Retrouver les résultats à l'aide de l'équation (2).

4° Soit I le milieu de TT' et soit K le point où la médiatrice de TT' coupe $M\omega$. Montrer que $\overline{OI} = -m$.

Montrer que le point K appartient à la fois à la droite (Δ) d'équation $y = -a$ et au cercle (C) circonscrit au triangle MTT'.

5° Montrer que $\overline{OT} \cdot \overline{OT'} = -3a^2$. [On pourra utiliser l'équation (2)].

Quels sont dans l'inversion inv $(O; -3a^2)$, les images du cercle (C) et de la droite (Δ)?

2262. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$. Soit $\mathfrak{J}$ l'inversion de pôle O et de puissance 9 : $\mathfrak{J} = \text{inv}(0; 9)$.

1° L'énoncé notera (Γ) tout cercle qui coupe $x'Ox$ en deux points, M et M', qui soient inverses dans $\mathcal{J}$.
Montrer que tout cercle (Γ) est orthogonal à un cercle fixe (O).
Un point quelconque du plan est-il le centre d'un cercle (Γ) ? Discuter.

Un cercle étant représenté par son équation,

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta y + p = 0 \qquad (1)$$

quelles conditions doivent vérifier les coefficients α, p pour qu'il soit un cercle (Γ) ?
On appelle $\mathcal{E}$ l'ensemble des cercles (Γ); la droite du problème a pour objet l'étude de certains sous-ensembles de $\mathcal{E}$.

2° Soit (Γ_1), de centre γ_1, tout cercle (Γ) dont le centre appartient à une droite fixe, (D_1) non perpendiculaire à $x'Ox$.
Montrer que le cercle (Γ_1) appartient à un faisceau linéaire, $\mathcal{F}$ de cercles. Discuter la nature du faisceau $\mathcal{F}$ suivant la position de la droite D_1 par rapport au cercle (O). Déterminer les points limites, ou les points de base, du faisceau $\mathcal{F}$.
Inversement, tout cercle du faisceau $\mathcal{F}$ est-il un cercle (Γ_1) ? En déduire l'ensemble des points γ_1.

3° Soit (Γ_2), de centre γ^2, tout cercle (Γ) tangent à une droite fixe, (D_2), d'équation $y = 1$.
Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathcal{J}$, que le cercle (Γ_2) est aussi tangent à un cercle fixe, (C_2) dont on précisera le centre et le rayon.
Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant α, β, p pour qu'il soit un cercle (L_2). En déduire l'ensemble des points γ_2.

4° Soit (Γ_3), de centre γ_3, tout cercle (Γ) tangent à un cercle fixe (C_3), de rayon 1, dont le centre a pour coordonnées $(0; +2)$.
Montrer, à l'aide de l'inversion $\mathcal{J}$, que le cercle (Γ_3) est aussi tangent à un cercle fixe, (C'_3) dont on précisera le centre et le rayon.

Un cercle étant représenté par l'équation (1), écrire un système de conditions liant α, β, p pour qu'il soit un cercle (Γ_3). En déduire l'ensemble des points γ_3. On pourra faire une translation du repère, portant l'origine au point de coordonnées $(0; +4)$.

2263. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \sin 2x > \sqrt{2}\sin^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos^2 x \\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

2264. On donne un cercle (C), de centre C et de rayon R, et deux diamètres perpendiculaires, AA' et BB', de ce cercle. Un point variable, M, décrit le cercle (C); la droite BM coupe la droite AA' au point P. On désigne par ω et ω' les centres des cercles circonscrits aux triangles PMA et PMA', respectivement, et par Q le milieu du segment $\omega\omega'$.

1° Montrer que la droite BA est tangente au cercle circonscrit au triangle PMA. En déduire le lieu géométrique de ω. Quel est le lieu de ω' ?

2° Montrer que le quadrilatère $\omega P \omega' B'$ est un rectangle. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{B'\omega'}$ et $\overrightarrow{A\omega}$ se correspondent dans une rotation de centre O et qu'il en est de même pour les vecteurs $\overrightarrow{A'\omega'}$ et $\overrightarrow{B'\omega}$.
En déduire le lieu géométrique du point Q et l'enveloppe de la droite $\omega\omega'$. Quelle est la projection orthogonale, sur la droite AA', au point de contact de la droite $\omega\omega'$ et de son enveloppe ?

3° Sur la perpendiculaire en B' au plan du cercle (C), on prend le point E tel que $B'E = R\sqrt{2}$.

a) Montrer que les points B et E sont équidistants de la droite $\omega\omega'$.

b) Montrer que le plan déterminé par le point E et la droite $\omega\omega'$ est tangent à une sphère fixe de centre B.

c) Retrouver, à l'aide du résultat précédent, l'enveloppe de la droite $\omega\omega'$.

2265. 1° Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \qquad z_2 = 1 - i.$$

En déduire le module et l'argument de $z = \frac{z_1}{z_2}$.

2° Utiliser les résultats précédents pour déterminer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

3° Résoudre l'équation :

$$z^4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

2266. On donne deux droites perpendiculaires, O*x* et O*y*, et sur O*x*, deux points fixes, P et P′, de part et d'autre de O et non symétriques par rapport à O.

Un point I variable du plan *x*O*y* est équidistant de P et P′. La droite IP coupe O*y* en A et la droite IP′ coupe O*y* en A′.

1° On considère les cercles circonscrits aux triangles POA et P′OA′, de centres C et C′. Nature du quadrilatère OCIC′. Montrer que l'un des centres d'homothétie des deux cercles est fixe. Trouver le lieu géométrique de l'autre.

2° Ces deux cercles se coupent en O et M. Lieu géométrique de M ?

3° Montrer que les quatre points I, A, A′, M sont sur un cercle qui reste tangent à une droite fixe et à un cercle fixe déjà mis en évidence.

4° Montrer que la droite IM passe par un point fixe.

2267. On considère, dans le plan, un cercle (C) de centre O, de rayon R, un diamètre AB de ce cercle et, sur la droite AB, un point S, à la distance *d* de O. On prendra $d > R$ et A centre O et S.

A) 1° On mène par S une droite SZ, qui rencontre le cercle (C) en P et Q (P entre S et Q). Soit M le point commun à AP et BQ. Quelles sont, dans l'inversion de centre M, de puissance $\overline{MA} \cdot \overline{MP}$, les images du cercle (C) et du cercle (Γ) circonscrit au triangle MPQ ? En déduire que les cercles (C) et (Γ) sont orthogonaux et que les tangentes en P et Q au cercle (C) se coupent sur la perpendiculaire (Δ) menée de M à AB, en un point que l'on appelle I.

2° La droite (Δ) coupe (C) en U et V, (Γ) en M et L, PQ en K, AB en H. Montrer que les quaternes (I; K; U; V), (M; L; U; V) sont harmoniques.

3° Lieu géométrique des points M et I quand la sécante SZ varie.

B) Soient α l'angle de SZ et de AB $\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ et β l'angle AMB.

1° Exprimer, en fonction de R, *d* et α, la longueur PQ et le rayon, ρ, du cercle (Γ). En déduire une relation entre $\sin\beta$ et $\sin\alpha$. Retrouver cette relation en exprimant de deux façons différentes la distance, OJ, de O à PQ (J est le milieu de PQ).

2° On pose $\frac{R}{d} = m$. Peut-on choisir α en fonction de *m* pour que l'on ait $\beta = 3\alpha$? Discuter. Calculer α dans le cas particulier où $m = 2$. Que devient alors le triangle MPQ ?

C) On pose :

$$HM = x, \qquad HI = y, \qquad \frac{d}{R} = m.$$

1° Établir une relation entre x, y, R et m.

2° On suppose $m = 2$. Construire la courbe représentative des variations de y en fonction de x, l'unité de longueur étant R.

3° On suppose $m = 2$. Montrer que la relation $\beta = 3\alpha$ entraîne $y = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Calculer la valeur correspondante de x.

2268. Résoudre l'équation :

$$\cos 2x - \sqrt{3} \cdot \sin 2x - 2\cos x + 1 = 0.$$

2269. 1° Démontrer que l'égalité $a^2 = d.b^2$, où a, b, d sont des entiers positifs et où a et b sont premiers entre eux, entraîne $b = 1$. En déduire que, si d n'est pas un carré parfait, il n'existe aucune fraction égale à $\sqrt{d}$.

2° On désigne par $A(\sqrt{d})$ l'ensemble des nombres qui sont de la forme $m + n\sqrt{d}$ où m et n appartiennent à l'anneau Z et où l'entier d n'est pas un carré parfait.

Déterminer l'intersection des deux ensembles $A(\sqrt{2})$ et $A(\sqrt{3})$.

2270. Le plan est rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$.

1° Étudier le sens de variation et construire la courbe représentative (C) de la fonction

$$y = \frac{x + a}{x} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (a > 0).$$

2° Soient A le point de coordonnées $(-a; 0)$ et $t'At$ un axe tel que $\overline{\text{angle}}(\overrightarrow{Ax}; \overrightarrow{At}) = \theta$, avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $t'At$ coupe $y'Oy$ en I et la courbe (C) en un point M autre que A.

Calculer en fonction de θ l'abscisse de M.

Montrer que $\overline{IM}$ est indépendant de θ et en déduire une définition géométrique simple de (C).

3° Soient M un point de (C), autre que A, et M_1 un point de (C) dont l'abscisse est de même signe que celle de M'. La droite AM_1 coupe $y'Oy$ en I_1. Construire le centre, Ω, de la rotation qui transforme $\overrightarrow{IM}$ en $\overrightarrow{I_1M_1}$.

Quelle est la position limite, ω, de Ω quand le point M_1 tend vers le point M ? En déduire une construction géométrique de la tangente en M à la courbe (C).

4° Calculer, en fonction de l'abscisse x de M_1, l'abscisse du point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec $x'Ox$. Soit P un point quelconque $x'Ox$, d'abscisse x_0; discuter, selon la position de P, le nombre des tangentes que l'on peut mener de P à la courbe (C).

2271. Soit :

$$f_n(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^n$$

x étant une variable, et n un entier rationnel ($n \in Z$).

1° Démontrer que le changement de n en $-n$ revient à changer x en $-x$, c'est-à-dire que l'on a :

$$f_{-n}(x) = f_n(-x).$$

En déduire (sans l'exécuter) la construction de la courbe représentative $y = f_n(x)$ à partir de la courbe représentative de $y = f_n(x)$.

Constater que, dans ce qui suit, il suffit d'étudier les courbes d'équatior $= f_n(x)$ pour $n > 0$. Nous nous placerons désormais dans ce cas.

2° Etablir l'inégalité $\sqrt{1+x^2} > |x|$, quel que soit x, et en déduire le signe de $x + \sqrt{1+x^2}$.
Quel est l'ensemble de définition de $f_n(x)$?

3° Calculer :

$$A = \lim_{x=+\infty} \frac{f_n(x)}{x^n} \quad \text{et} \quad B = \lim_{x=-\infty} (-x)^n \cdot f_n(x)$$

et en déduire les valeurs de

$$\lim_{x=+\infty} f_n(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x=-\infty} f_n(x).$$

Les courbes représentatives de $y = f_n(x)$ ont-elles des asymptotes ?

4° Démontrer que chaque fonction $y = f_n(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$y' = \frac{ny}{\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire que $f_n(x)$ est croissante (on rappelle que $n > 0$).

5° En utilisant l'équation différentielle précédente, calculer y'' en fonction de x et de y; en étudier le signe et les zéros dans les trois cas suivants :

$$0 < n < 1; \qquad n = 1; \qquad n > 1.$$

En déduire la convexité de $f_u(x)$ dans chacun des trois cas.

6° Construire, rapportées aux mêmes axes, les trois courbes ayant pour équations :

$$y = f_n(x) \text{ avec } 0 < n < 1$$
$$y = f_1(x)$$
$$y = f_n(x) \text{ avec } n > 1.$$

2272. A) Soient, sur un axe Ot, deux points variables, M', M'', dont les abscisses, t' et t'', sont liées par la relation involutive :

$$t't'' + a(t' + t'') + b = 0 \qquad (1)$$

a et b étant des coefficients.

Trouver l'équation en t donnant les points doubles de cette involution. Quelle inégalité doivent vérifier a et b pour que ces points doubles soient réels ? Donner une interprétation géométrique de cette condition, en supposant que a, b sont les coordonnées d'un point $P(a; b)$ dans un plan auxiliaire $(Oa; Ob)$.

s et p étant respectivement la somme et le produit des abscisses des points doubles, exprimer l'involution (1) en utilisant les coefficients s et p au lieu de a et b.

B) On donne, dans un plan, deux axes orthonormés, Ox, Oy, et la parabole (C) d'équation :

$$(C) \qquad y = x^2.$$

1° Construire (C).

Soit M le point mobile où la sécante variable (D_t) d'équation $y = tx$ (t, paramètre variable) coupe (C).

Exprimer les coordonnées de M en fonction de t :

$$M \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t). \end{cases}$$

Les équations précédentes constituent une représentation paramétrique propre de (C), [à tout point M de (C) correspond un t déterminé; à tout t correspond un point M déterminé de (C)].

2° Exprimer en fonction de t la pente de la tangente à (C) au point $M(t)$. Donner l'équation $y = u(t)x + v(t)$ de cette tangente.

$Q(x_0; y_0)$ étant un point quelconque du plan, écrire la condition pour que la tangente à (C) en M (t) passe par Q et discuter l'existence des racines de l'équation en fonction de t Donner une interprétation géométrique de cette discussion.

3° On mène par le point $Q(x_0; y_0)$ la sécante variable d'équation

$$(\Delta_m) \qquad y - y_0 = m(x - x_0).$$

Écrire l'équation en t des points d'intersection, M′, M″, de (Δ_m) avec (C).

t' et t'' étant les racines de cette équation, trouver entre $t't''$ et $t' + t''$ une relation (R) indépendante de m. En conclure que M′ et M″ se correspondent involutivement sur (C) quand (Δ_m) pivote autour de Q $(x_0; y_0)$.

Écrire les équations des tangentes à (C) en $M'(t')$ et $M''(t'')$ et exprimer les coordonnées X et Y du point d'intersection, T, de ces tangentes en fonction de $t' + t''$ et $t't''$.

En utilisant la relation (R), démontrer que T (X; Y) décrit une droite (q) quand (Δ_m) pivote autour du point Q $(x_0; y_0)$.

(q) est dite polaire de Q par rapport à la parabole (C).

2273. Soit la fonction de x

$$f(x) = x^\alpha - ax$$

où $x \geqslant 0$ et $0 < \alpha < 1$.

1° Trouver les limites de $f(x)$ lorsque tend vers $+\infty$ et vers 0_+, le ou les maximums ou minimums de $f(x)$ ainsi que la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers $_{0+}$. Pour quelle valeur de x, f' s'annule-t-elle ?

2° Vérifier que f s'annule pour $x = 0$ et également pour une autre valeur $x^{(\alpha)}$ de x. Trouver les limites de $x^{(\alpha)}$ lorsque α tend vers 0_+ et lorsque α tend vers $1 - 0$.

3° Étudier la variation de $y = f(x)$ et en construire la courbe représentative (C) : on précisera les asymptotes, s'il en existe, les points sur les axes, la tangente à l'origine, le sens de la concavité, la valeur du maximum.

4° En utilisant le maximum de $f(x)$, établir l'inégalité

$$1 - \alpha \geqslant x^\alpha - \alpha x.$$

On pose $x = \frac{a}{b}$, avec $a > 0$, $b > 0$; en déduire l'inégalité :

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \geqslant a_\alpha b_\beta$$

dans laquelle on a posé $\beta = 1 - \alpha$.

5° En remarquant que, si $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont des nombres positifs et si $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on a

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma = a^\alpha \left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} c^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}.$$

En s'appuyant sur les résultats du 4°, démontrer l'inégalité (dite de Holder)

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma > \alpha . a + \beta . b + \gamma . c.$$

2274. 1° Étudier la variation de la fonction $y_1 = x . \text{Log}\, x$.

On déterminera la représentation graphique (C_1) de cette fonction et, en particulier, les tangentes aux points remarquables.

Soit A le point d'intersection, autre que l'origine, de (C_1) avec l'axe des x.

2° Étudier la variation de la fonction

$$y_2 = x^2 \text{Log}\, x - \frac{x^2}{2}.$$

Tracer soigneusement la courbe représentative (C_2). Déterminer les points d'inflexion, s'il y a lieu, les tangentes aux points remarquables et les branches infinies.

3° Trouver l'aire $\mathcal{A}$ de la boucle déterminée par les courbes (C_1) et (C_3), représentations graphiques des fonctions

$$y_1 = x \cdot \text{Log}\, x \qquad \text{et} \qquad y = |\, x \ \text{Log} \cdot x \,|$$

4° On mène, par un point δ de Ox, une parallèle (Δ) à Oy. Déterminer l'abscisse de δ de manière que l'aire de la surface comprise en A, l'axe des x, (Δ) et (C_1), soit égale à $\frac{\mathcal{A}}{2}$.

5° Soit $a(x)$ l'aire algébrique de la surface comprise entre l'axe des x, la courbe (C_1) et une parallèle à Oy, menée par un point d'abscisse x. Discuter le nombre de solutions de l'équation

$$a(x) = k,$$

k étant une constante, en utilisant la courbe (C_2).

6° Représenter graphiquement, en utilisant les résultats des questions précédentes, la variation de l'aire $a_3\,(x)$ de la surface comprise entre l'axe des x, une parallèle à Oy menée par un point d'abscisse x et la courbe (C_3).

2275. En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction logarithme népérien, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \text{Log}\,(n+1) - \text{Log}\, n < \frac{1}{n}$$

où n est un entier positif.

En déduire que la suite dont le terme de rang n est

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

tend vers $+\infty$ lorsque n augmente indéfiniment.

2276. A tout point m du plan, d'affixe z, $z \neq 0$, on associe le point M d'affixe

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right);$$

donc :

$$f: \qquad z \in C^* \longrightarrow f(z) = Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \in C.$$

1° Déterminer les coordonnées, X, Y, de M en fonction de celles x, y de m.

2° Montrer que, lorsque m décrit un cercle de centre O et de rayon r, le point M décrit une ellipse (E), dont on déterminera les axes et les foyers.

Inversement, on se donne une ellipse (E) de la famille trouvée; de quel cercle est-elle la transformée ?

3° Montrer que, lorsque m décrit une droite issue de O, le point M décrit une hyperbole (H), dont on déterminera les axes, les foyers et les asymptotes.

Inversement, on se donne une hyperbole (H) de la famille trouvée. De qu'elle droite est-elle la transformée ?

4° En combien de points se coupent une ellipse (E) et une hyperbole (H) quelconques ? Montrer qu'en chacun de leurs points communs elles se coupent orthogonalement.

2277. 1° Rapportée à un système d'axes orthonormés Ox, Oy une courbe (E) a pour équation

$$3y^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 7x^2 - 3r^2 = 0 \qquad (1)$$

où r est donné ($r > 0$).

Montrer que l'origine O, est un centre de symétrie pour (E).

Résoudre l'équation (1) sous la forme $y = f(x)$; étudier séparément les fonctions obtenues et tracer (E). (Précision des calculs : à 0,001 près).

2° Dans tout ce qui suit, on considère la droite (Δ), support de l'axe $y'Oy$, et le point A situé à la distance AH = a de (Δ), à gauche de (Δ). A tout point M de (Δ) on fait correspondre les points m et m' définis par les relations suivantes :

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{Mm}) = +90°; \qquad Mm = \sqrt{3} \cdot MA$$

$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{Mm'}) = -90°; \qquad Mm' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot MA.$$

Montrer que les points m et m' décrivent respectivement des droites, (D) et (D'), quand M décrit (Δ), et que le cercle circonscrit au triangle Amm' passe par un point fixe, I.

3° Caractériser la similitude, qui transforme (D) en (D') et m en m'.

Si h et h' sont les transformés du point H dans les transformations définies en 2°, que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{hm}$ et $\overrightarrow{h'm'}$?

Exprimer en fonction de a les distances du point I aux droites (Δ) et AH.

4° Les coordonnées du point A étant $(x; y)$, (Δ) portant l'axe $y'Oy$, montrer que les coordonnées $(x'; y')$ de I sont telles que

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} x. \end{cases}$$

On suppose que A décrit le cercle de centre O et de rayon r. Montrer que la courbe décrite par I est la courbe (E).

2278. Dans tout le problème, a, b, c, d désignent quatre nombres vérifiant la relation $bc - ad = 1$; on supposera toujours $a \geqslant 0$, $b > 0$, $c \geqslant 0$, $d > 0$, et x désignera un nombre quelconque compris entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d}$$

1° Dans un plan rapporté à deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$, on trace le cercle (C) de rayon $\frac{1}{2b^2}$, centré au point I d'abscisse $\frac{a}{b}$ et d'ordonnée $\frac{1}{2b^2}$, et le cercle (C') de rayon $\frac{1}{2b^2}$, centré au point I' d'abscisse $\frac{c}{d}$ et d'ordonnée $\frac{1}{2d^2}$.

a) Calculer la distance II' et montrer que (C) et (C') sont tangents extérieurement. En déduire que la parallèle à $y'Oy$ d'abscisse x rencontre l'un au moins des cercles (C) et (C').

b) Montrer que l'une au moins des inégalités

$$x - \frac{a}{b} \leqslant \frac{1}{2b^2} \qquad \frac{c}{d} - x \leqslant \frac{1}{2d^2}$$

est vérifiée. (On pourra, soit utiliser le résultat précédent, soit établir directement l'inégalité

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2b^2} \geqslant \frac{c}{d} - \frac{1}{2d^2}\right)$$

2° *a*) Étudier les variations des fonctions

$$f(t) = \frac{a + c \cdot t}{b + d \cdot t} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{at + c}{bt + d}$$

quand t croît de 0 à $+\infty$.

b) On suppose désormais que les nombres a, b, c, d sont entiers (ce qui entraîne $b \geqslant 1$ et $d \geqslant 1$) et que le nombre x n'est égal à aucune fraction. Montrer qu'il existe un nombre entier $m \geqslant 0$ satisfaisant à

$$\frac{a + cm}{b + dm} < x < \frac{a + c(m+1)}{b + d(m+1)}$$

sans égalité possible.

Posant

$$a' = a + cm \qquad c' = a + c(m+1)$$
$$b' = b + dm \qquad d' = b + d(m+1)$$

montrer de même qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que

$$\frac{c' + (p+1)a'}{d' + (p+1)b'} < x < \frac{c' + pa'}{d' + pb'}.$$

3° On pose :

$$a_1 = c' + (p+1)a' \qquad c_1 = c' + pa'$$
$$b_1 = d' + (p+1)b' \qquad d_1 = d' + pb'.$$

Montrer qu'on a :

$$\frac{a}{b} < \frac{a_1}{b_1} < x < \frac{c_1}{b_1} < \frac{c}{d}$$

Calculer $b_1c_1 - a_1d_1$, et montrer que les fractions

$$\frac{a}{b}; \frac{a_1}{b_1}; \frac{c_1}{d_1}; \frac{c}{d}$$

sont irréductibles.

4° Déduire de ce qui précède que, si le nombre x n'est égal à aucune fraction, il existe une infinité de fractions irréductibles $\frac{p}{b}$ telles que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

(On pourra poser $b = d = 1$, $a = n$, $c = n + 1$, en désignant par n le plus grand entier inférieur à x, et montrer qu'on peut répéter autant de fois que l'on veut la construction précédente.)

Montrer que, si y est un nombre rationnel, il n'existe qu'un nombre fini de fractions $\frac{p}{q}$ satisfaisant à

$$\left| y - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2} \qquad \text{et} \qquad y \neq \frac{p}{q}.$$

2279. 1° On considère un cercle (Γ) de centre ω et une droite (D) ayant en commun avec le cercle (Γ) deux points A et B. Ces deux points pourront être, exceptionnellement, confondus; la droite (D) sera alors tangente au cercle (Γ).

Soit un cercle (C) variable, de centre M, tangent à (D) et orthogonal à (Γ). Montrer, en utilisant une inversion convenablement choisie, qu'il reste aussi tangent à un cercle fixe (F), de centre F, que l'on précisera. Préciser la courbe (P) sur laquelle varie son centre M. Montrer que le cercle (Γ) et la courbe (P) sont tangents en A et B.

2° Inversement, soient une parabole (P) et une droite (D) perpendiculaire à l'axe de (P) et ayant en commun avec cette courbe deux points A et B, pouvant être, exceptionnellement, confondus au sommet de (P). Montrer que tout cercle (C) de centre M tangent à (D) et centré sur (P) reste tangent à un cercle fixe, puis montrer que ce cercle (C) reste orthogonal à un cercle (Γ) fixe tangent à (P) en A et B. En déduire une propriété caractéristique de tout point M d'une parabole au moyen d'une relation entre sa distance à une droite (D) et sa puissance par rapport à un cercle (Γ).

3° Trouver sur la figure précédente un segment dont la longueur est le paramètre p de (P). En déduire la construction d'un cercle bitangent à une parabole (P), connaissant son centre ω sur l'axe de (P). On appellera ω_0 le point limite du lieu de ω pour lequel la construction est possible et (Γ_0) le cercle (Γ) de centre ω_0. Quel est le rayon de (Γ) ? Quelle est la droite (D) correspondante, que l'on appellera (D_0) ?

4° On se propose de construire les cercles bitangents à une parabole (P) qui passent par un point N donné. Ces cercles, centrés sur l'axe de (P), passent aussi par le point N' symétrique de N pour l'axe de (P).

Les cercles cherchés sont en contact avec (P) en des points qui sont groupés deux par deux sur des perpendiculaires à l'axe, dont on précisera la position en utilisant la propriété caractéristique trouvée au 2°. Montrer que, pour que le problème soit possible, il faut que N soit intérieur à la parabole (P) et que, dans ce cas, il y a au moins une solution. Montrer enfin qu'il y en a deux si, de plus, N est extérieur à (Γ_0).

2280. 1° Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2 + px + 1}{2x^2 - 3x + 1}.$$

Déterminer p pour que $f(x)$ admette un maximum ou un minimum pour $x = 0$. Construire la courbe représentative de cette fonction pour cette valeur de p.

2° Utiliser les résultats précédents pour l'étude de la fonction

$$g(u) = \frac{\sin^2 u - 3\sin u + 1}{2\sin^2 u - 3\sin u + 1}$$

et de sa représentation graphique.

Comment déduirait-on simplement de cette dernière celle de la fonction $h(v) = f(\cos v)$, pour la valeur de p déterminée plus haut ?

3° Quelles sont les valeurs de u qui satisfont à la condition $g(u) \geqslant 1$?

4° Peut-on choisir le paramètre p de telle sorte que $f(x)$ tende vers une limite finie quand x tend vers 1 ?

Le paramètre p étant ainsi fixé, peut-on compléter la définition de $f(x)$ de telle sorte que cette fonction soit définie et continue pour $x = 1$? Quelle est alors sa représentation graphique ?

2281. On considère les fonctions $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ définies par

$$u(x) = \frac{x^2 \operatorname{Log} x}{2} - \frac{3x^2}{4}$$
$$v(x) = x \operatorname{Log} x - x$$
$$w(x) = \operatorname{Log} x.$$

1° Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de chacune de ces fonctions.

2° Tracer la courbe représentative (C) de la variation de la fonction $w(x)$. On désigne par A et M les points d'abscisses respectives 1 et x, en supposant $x > 1$. Soit P le point d'abscisse x $(x > 1)$ de la tangente à (C) en A.

Calculer l'aire $f(x)$ de la surface limitée par l'arc AM de (C) et les segments AP et PM.

3° Calculer $f(4)$ avec la précision permise par les tables de logarithmes à cinq décimales.

4° On désigne par $F(x)$ la primitive de $v(x)$ qui s'annule pour $x = 1$. En posant $x^2 = \frac{1}{t}$, montrer comment on peut utiliser la courbe C pour déterminer une valeur approchée de la solution autre que 1 de l'équation $F(x) = 0$.

2282. 1° Étudier, suivant les valeurs du paramètre m, la forme des courbes (C) d'équation

$$y^2 = m^2x^2 - 2x + 1,$$

m étant positif.

2° On considère les droites (D) d'équation $y = x - 1$ et (D') d'équation $y = -(x - 1)$. On oriente (D) et (D') dans le sens des y croissants. Soient A et A' leurs points d'intersection avec la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. Les axes $x'Ox$ et $y'Oy$ sont orthonormés.

a) Deux points M et M' décrivent sur les axes (D) et (D') des divisions semblables dont A et A' sont des points homologues; on a donc :

$$\overline{AM} = k \cdot \overline{A'M'},$$

k étant un paramètre positif.

Pour chaque valeur de k, on considère la similitude qui fait passer de $\overrightarrow{AM}$ à $\overrightarrow{A'M'}$. Quel est l'angle de cette similitude? Lieu du centre de la similitude lorsque k varie.

b) Que devient cette similitude dans le cas particulier où le centre est sur Ox? Montrer que, dans ce cas, l'enveloppe de MM' est une des courbes (C) du 1°.

2283. On considère un cercle de centre O et de rayon R, et deux diamètres rectangulaires ST et PQ. Soit, sur la demi-droite Ox d'origine O, portant le point T, c le centre d'un cercle C de même rayon R; on pose $Oc = d$. Le cercle C coupe la demi-droite SOx en A et B; soient α et β les inverses de A et B dans l'inversion de pôle O et de puissance R^2, γ le milieu du segment $\alpha\beta$.

1° Calculer $\overline{O\gamma} = \delta$ en fonction de d et R. L'inverse du cercle C dans l'inversion précédente est un cercle Γ; calculer son rayon ρ.

2° Étudier la variation de δ et de ρ lorsque c décrit la demi-droite Ox. Courbes représentatives. Montrer que les cercles Γ sont tous tangents à deux cercles fixes. Faire une figure représentant les différents cas. Peut-on avoir $\rho = R$?

3° On considère les cercles C de centre $c'_2, c'_3, \ldots, c_n$, où $Oc_k = d = k_k$ R avec $k = 2; 3; \ldots; n$. Soient γ_n le centre du cercle inverse du cercle C_n et ρ_n son rayon; montrer que $\delta_n = \overline{O\gamma_n}$ n'est jamais de la forme $\frac{R}{p}$, où p est un entier. Vérifier que

$$\rho_n = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right);$$

en déduire la valeur de la somme

$$s_N = \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_N.$$

Calculer cette somme pour $N = 10$. Que devient la somme s_N quand N augmente indéfiniment?

4° Trouver l'enveloppe des polaires du point P par rapport à tous les cercles C.

2284. Soient deux axes orthonormés $x'Ox$, $y'Oy$. Deux points A et B glissent respectivement sur $x'Ox$ et $y'Oy$ de manière que le segment AB ait une longueur constante $2a$.

1° Trouver la trajectoire du milieu C de AB.

On suppose que C décrit cette courbe d'un mouvement uniforme de vitesse $a\omega$. Déterminer les mouvements des points A et B sur $x'Ox$ et $y'Oy$.

2° Soit M le barycentre des points A et B de masses respectives 1 et λ

$$\lambda \ (\overline{MA} + \lambda\ \overline{MB} = 0).$$

Déterminer :

a) les coordonnées de M en fonction de la date;

b) sa vitesse et son accélération. Montrer que le support du vecteur-accélération passe par un point fixe.

3° Montrer que, quel que soit λ, la perpendiculaire au vecteur-vitesse en M passe à chaque instant par le symétrique O′ de O par rapport à C.

4° Montrer que les projections orthogonales sur AB, à une date donnée, des vecteurs-vitesses de tous les points M sont des vecteurs équipollents — en particulier celles des vecteurs-vitesses des points A et B.

2285. Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} (2m-1)\,x + (m-1)\,y = 1 + \sqrt{3} \\ (m-2)\,x + my = 2. \end{cases}$$

2286. Résoudre l'inéquation à deux inconnues :

$$\sqrt{2(x+y)+1} + \sqrt{2(x-y)+1} < 2.$$

2287. Si m est un nombre entier positif, on désigne par S_m la somme de tous les entiers de 1 à m, c'est-à-dire :

$$S_m = \frac{m\,(m+1)}{2}.$$

1° Soit a un entier impair. Montrer que, si m et n sont des entiers tels que $n - m$ soit divisible par a, $S_m - S_n$ est divisible par a. Quels sont tous les nombres qui peuvent s'obtenir comme reste de divisions de nombres de la forme S_m par 11 ?

2° Soit x un nombre supérieur à 1, $(x > 1)$. On désigne par $f(x)$ le plus grand des nombres S_n qui sont au plus égaux à x. Montrer qu'il y a une constante c, indépendante de x, telle que

$$x - f(x) < (2x)^{\frac{1}{2}} + c.$$

3° Montrer que, si m et n sont des entiers positifs, il est impossible que S_n soit le double de S_m. On pourra utiliser le fait que $2m - n$ divise $4\,m^2 - n^2$.

4° On se propose d'étudier les nombres n pour lesquels S_n est un carré parfait, c'est-à-dire le carré d'un entier. Montrer que, s'il en est ainsi, celui des nombre n, $n + 1$ qui est impair est lui-même un carré parfait. On montrera que S_8 est un carré parfait, et que si S_n est un carré parfait, avec n pair, il en est de même de $S_{n'}$ si $n' = 4n\,(n+1)$; on en déduira qu'il y a une infinité de nombres pairs n tels que S_n soit carré parfait. On établira réciproquement que, si n est un nombre pair tel, que S_n soit carré parfait, on a $n = 4k\,(k+1)$, où k est un entier tel que S soit carré parfait.

5° Montrer qu'il n'y a aucun entier impair n supérieur à 1 tel que S_n soit carré parfait. Pour ce faire on pourra poser $n = (2k+1)^2$ et se ramener à la dernière question en montrant que S_k devrait être de la forme $2S_p$ pour un certain entier p. Quels sont les trois plus petits entiers n, supérieurs à 1, pour lesquels S_n est un carré parfait ?

2288. Soit (D) une droite; M_1 et M_2 sont deux points de (D). On pose $M_1M_2 = a$. (C_1) est un cercle de centre O_1, de rayon R_1, tangent en M_1 à (D).

A. 1° Montrer qu'il existe un cercle unique (C_2) tangent à (C_1) et tangent à (D) en M_2. On construira son point de contact T avec (C_1) et son centre O_2.

2° Vérifier que le rayon R_2 de (C_2) est donné par $R_2 = \dfrac{a^2}{4R_1}$.

3° Montrer qu'il existe un cercle unique (C) tangent à (C_1), à (C_2) et à la droite (D) en un point du segment M_1M_2. On construira ses points de contact T_1, T_2 et M avec (C_1), (C_2) et la droite M_1M_2. Il sera commode d'utiliser une inversion de centre M_1 et de puissance a^2.

4° Calculer la longueur du segment M_1M_2 et le rayon R de (C) en fonction de R_1 et a.

B. Ayant transformé la droite M_1M_2 en axe, on suppose que les points M_1 et M_2 ont des abscisses rationnelles $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ telles que $p_2 q_1 - p_1 q_2 = +1$, les nombres p_1, q_1, p_2, q_2 étant des entiers positifs.

1° Montrer que les fractions $\frac{p_1}{q_1}$ et $\frac{p_2}{q_2}$ sont irréductibles.

2° En prenant $R_1 = \frac{1}{2q_1^2}$, établir les relations

$$R_2 = \frac{1}{2q_2^2}, \qquad R = \frac{1}{2(q_1 + q_2)^2},$$

et montrer que l'abscisse de M est égale à $\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$.

3° On désigne par Γ_1 le cercle (C) précédent, par Γ^2 le cercle tangent à (C_1), à (Γ_1) et à la droite (D) en un point situé entre M_1 et le point de contact μ_1 de Γ_1, par Γ_3 le cercle défini avec Γ_1 et Γ_2 comme Γ_2 l'est avec C_1 et Γ_1 et ainsi de suite, de sorte que Γ_n est le cercle tangent en μ_n à la droite D, tangent aux cercles Γ_{n-2} et Γ_{n-1}, μ_n étant situé entre μ_{n-2} et μ_{n-1}.

Calculer en utilisant les résultats précédents, le rayon ρ_n du cercle Γ_n et l'abscisse u_n de son point de contact μ_n avec D.

On désignera par α_n le terme général d'une suite d'entiers telle que $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$. Il sera utile de calculer les premières valeurs de ρ_n et u_n et de procéder par récurrence.

2289. On donne la fonction

$$y = f(x) = 4\sin^2 x + 4(\lambda + \mu)\sin x + \lambda^2 + \mu^2,$$

λ et μ sont des paramètres qui seront considérés dans ce qui suit comme les coordonnées d'un point P dans un système d'axes orthonormés.

1° Discuter l'existence, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ suivant la position du point P.

2° Étudier la courbe d'équation $y = f(x)$. Discuter l'existence des extrémums suivant la position du point P.

3° Lorsque le point P décrit une droite de coefficient-directeur positif, passant par l'origine, la courbe change de forme. Tracer en détail les différentes formes successives caractéristiques.

2290. A) 1° Décomposer en un produit de deux facteurs le polynôme $x^4 + 4$.

2° N désignant un nombre entier naturel, existe-t-il un nombre entier E de la forme $E = N^4 + 4$?

3° Les nombres E et E'

$$E = N^4 + 4, \qquad E' = N'^4 + 4,$$

formés avec deux entiers N et N' différent de deux unités $(N - N' = 2)$ ne sauraient être premiers entre eux.

4° Déterminer deux entiers dont le plus petit commun multiple soit $N^4 + 4$, N désignant un nombre impair donné.

B. 1° Les côtés a, b, c d'un triangle ABC sont exprimés par les formules suivantes en fonction d'un paramètre positif x ;

$$a = x^2 + 2, \qquad b = x^2 - 2x + 2, \qquad c = x^2 + 2x + 2$$

Que doit être x pour l'existence du triangle ?

2° Exprimer en fonction de x le rayon r du cercle inscrit et la hauteur h relative au sommet A.
De la comparaison des expressions obtenues, déduire une propriété géométrique du triangle ABC.
Évaluer la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle A.

3° Calculer le produit $\operatorname{cotg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$.

2221. On donne deux axes orthonormés $x'Ox$ et $y'Oy$ et un carré OABC dont les sommets ont pour coordonnées

$$A\ (1;1) \qquad B\ (0;2) \qquad C\ (-1;1)$$

Soit F (0; 1) le centre de ce carré et soit P la parabole de foyer F et de directrice $x'Ox$. Cette parabole passe en A et C

1° Trouver le second point d'intersection D de la droite BC et de la parabole P. Construire les tangentes à P aux points A, C et D. Quelle est l'équation de P.

2° Soit M un point quelconque de P et soit x son abscisse. Montrer que la puissance de M par rapport au cercle de diamètre CD a pour valeur

$$\frac{1}{4}(x+1)^3(x-3) \qquad (1)$$

Déduire de la formule (1) la position de P par rapport au cercle de diamètre CD.
Étudier les variations de la fonction (1) et construire la courbe représentative.

3° Sur la perpendiculaire $z'Oz$ en O au plan xOy on marque un point S tel que OS = AO. Soit Σ la sphère inscrite dans le cube qui a pour arêtes OS, OA et OC. Montrer que la parabole P est sur le cône qui a pour sommet S et qui est circonscrit à la sphère Σ.

2292. 1° **Étudier la fonction :**

$$y = x^2 + \frac{m^2}{x^2 - 1}.$$

Construire la courbe représentative pour $m = \frac{1}{2}$.

2° Calculer en fonction de m les coordonnées des points de la courbe où la tangente est parallèle à Ox. Discuter leur nombre suivant les valeurs de m.

3° Étudier le lieu de ces points lorsque m varie.

2293. 1° Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

dans $[0; 2\pi]$.

2° Étudier la fonction :

$$y = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$$

Courbe représentative.

2294. On donne un demi-cercle Γ, de centre O, de diamètre $AB = 2R$ (fig. Ex. 2294). Soit M un point de Γ et soit P la projection de M sur AB. Soit V le volume du solide engendré par la surface plane limitée par les segments AP, PM et l'arc AM, en tournant autour de AB, et soit S l'aire totale (zone et cercle) de la surface limitant le solide. On pose :

$$\widehat{AOM} = \alpha \qquad (0 < \alpha < \pi)$$

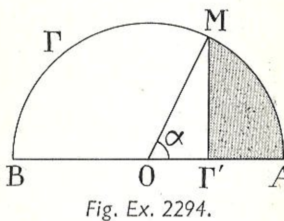


Fig. Ex. 2294.

1° Calculer V et S en fonction de R et de α.

2° On pose $z = \frac{R \cdot S}{3V}$. Montrer que :

$$z = \frac{3 + \cos\alpha}{(2 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)}.$$

Étudier les variations de z quand α varie et construire la courbe représentative.

3° Déterminer α de manière que z ait une valeur donnée m. Discuter l'équation qui détermine α et comparer les résultats avec ceux que donne la courbe représentant les variations de z.

4° On suppose que $AO = k.AP$, k étant un nombre entier. Montrer que z n'est pas un nombre entier.

(On montrera que $z = \frac{k \cdot a}{b}$, a et b étant des entiers, et que les trois nombres a, b, k sont premiers entre eux deux à deux.)

2295. 1° Construire la courbe d'équation $y = 10\,(x^3 - x)$.
Soient A et A′ les points de contact des tangentes parallèles à l'axe Ox. Soient B et B′ les points où ces tangentes rencontrent à nouveau la courbe. Déterminer les coordonnées de ces points.

2° Un point mobile M décrit l'arc BB′ de la courbe, dans un mouvement de va-et-vient de B à B′ et inversement, de telle manière que la projection de M sur $x'Ox$ soit animée d'un mouvement oscillatoire simple.
Montrer que la projection de M sur $y'Oy$ est animée d'un mouvement oscillatoire simple et déterminer le rapport des périodes des deux mouvements.

3° m étant un nombre tel que $27\,m^2 > 1$, on pose :

$$p^3 + q^3 = 2m$$
$$3\,pq = 1$$
$$x = p + q$$

Calculer y en fonction de m. Déterminer m pour que y soit un entier inférieur à 10.

4° Existe-t-il des nombres qui ne diffèrent de leur cube que par le premier chiffre après la virgule, dans leur représentation décimale ? Calculer l'un quelconque d'entre eux, avec la précision fournie par les tables 4 de logatithmes à cinq décimales.

Note I

APERÇU RAPIDE SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

L'évolution des mathématiques.

Depuis longtemps en France l'enseignement laisse croire que les Mathématiques sont « stabilisées » et que l'édifice mathématique est une construction définitive. En fait l'évolution des mathématiques est permanente.

Dans l'histoire des mathématiques il est possible de distinguer des périodes de création féconde et des périodes de mise au point, de maturation.

Le primitif avait besoin du nombre pour dénombrer son troupeau. La géométrie, pratiquement inexistante chez les primitifs, apparaît chez les peuplades qui mesurent leurs champs, qui construisent.

Les Égyptiens et les Babyloniens ont connu des faits mathématiques et des formules dont le but était essentiellement utilitaire et pratique, c'est, du moins, l'impression que laissent les documents, mais ceux-ci sont fragmentaires et il est peut-être imprudent de juger les mathématiques égyptiennes sur la connaissance de « barêmes et de tableaux provenant d'administrations ».

C'est alors que s'est produit le miracle grec : les Grecs font parcourir à la pensée humaine une étape importante, décisive. L'abstraction, la généralisation, l'analyse, la synthèse, autant de notions qui, jusque-là restées dans l'ombre, sont mises en pleine lumière. Les Grecs aimaient ce qui est simple, ce qui est beau et partant pour eux ce qui est divin. Ce faisant ils se coupent du réel, des applications des mathématiques au réel.

Archimède le franc-tireur, Pythagore et son théorème, dressent pour les Anciens la barrière des « incalculables », des irrationnels. C'est la fin, c'est la mort, de cette grandiose épopée gréco-latine.

La longue nuit du Moyen Age lui fait suite, à peine éclairée par les recherches des Arabes sur l'algèbre. Et cette nuit dure dix siècles.

La Renaissance des Mathématiques, au XVIIe siècle, a lieu avec Descartes.

Pour lui l'Algèbre n'est pas une science; c'est plutôt une méthode utilisée en géométrie et en mécanique.

Le grand Newton fait franchir le pas de géant de l'infini; et avec Leibniz on entre dans la période du calcul infinitésimal.

Le XVIII[e] siècle prolonge à la fois l'esprit grec et l'esprit cartésien; avec une synthèse algébrico-logique s'installent les perfectionnements des moyens de calcul, déterminants, matrices, calcul vectoriel.

Il semble alors que l'horizon mathématique se bouche, que le temple est construit. Gauss le génial, Cauchy dont le nom jalonne les Mathématiques et Picart terminent l'édifice.

Lobatchewsky attaque la géométrie euclidienne; Hilbert, en Allemagne, construit une axiomatique de la géométrie; c'est le premier pas dans la conception actuelle de l'axiomatique.

Le révolutionnaire Galois, en France, dans une vie dramatique et trop brève — il meurt dans un duel à vingt ans pour les beaux yeux d'une infâme coquette — jette à la face de ses contemporains les premières structures algébriques.

Cantor met au point la théorie des ensembles; et les mathématiques se reconstruisent progressivement sur de nouveaux et solides fondements.

De nombreux et éminents mathématiciens apportent leurs pierres à cette nouvelle construction; l'apport de mathématiciennes comme Sophie Kowalewski et Emmy Noether, n'est pas négligeable.

Il reste à mettre au point, et à suivre l'évolution récente. C'est l'œuvre de Nicolas Bourbaki, illustre français, mathématicien polycéphale de l'Université de Nancago, dont les ouvrages sont dans le monde entier tenus pour la somme de la mathématique contemporaine.

Les mathématiques contemporaines.

Jusqu'à l'aube de ce siècle les mathématiques reposaient sur les notions de nombre et de ligne. Actuellement tout se ramène à la notion d'ensemble. Cela donne une importance toute nouvelle à la théorie des ensembles et crée l'unité des mathématiques; on peut dès lors parler de la mathématique.

Cette théorie des ensembles comprend l'algèbre des ensembles (réunion, intersection, ...), l'étude des relations entre éléments d'un ensemble (équivalence, ordre...) et la notion de correspondance (fonctions, applications...)

L'Algèbre linéaire étudie les différentes opérations entre les éléments d'un ensemble, et même aux structures de groupes, anneaux, corps, idéaux.

L'introduction des lois de composition externe conduit aux espaces vectoriels; et sur ces bases s'édifie la théorie des applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre espace vectoriel. Le calcul matriciel est la traduction analytique de cette théorie.

La Topologie générale munit un ensemble d'une structure particulière. On peut alors définir avec précision, grâce aux voisinages, les notions de limite, de convergence et de continuité.

Les conséquences sont nombreuses tant en mathématiques, qu'en physique : géométries ponctuelles, affines, métriques, projectives; espaces vectoriels topologiques, différentiation, mesure et intégration. Ce sont là quelques titres de chapitres sur lesquels les mathématiques contemporaines jettent un jour nouveau et combien passionnant.

Les mathématiques contemporaines se caractérisent par la recherche de l'unité, de la précision des définitions et démonstrations, et par une algébrisation de plus en plus prononcée.

Archimède et les Anciens.

Pythagore (569-500 av. J.-C.) est un mathématicien mystique, précurseur des grands mathématiciens anciens. Il a beaucoup voyagé; de ces voyages il a rapporté des connaissances, mais aussi beaucoup de croyances absurdes, et en particulier une sorte de mysticisme du nombre. Ses théories mathématiques, métaphysiques et philosophiques s'écroulèrent devant l'impossibilité de trouver deux nombres entiers tels que le carré de l'un soit le double du carré de l'autre.

Cependant Pythagore fut le premier à sentir le rôle des postulats et des axiomes.

Zénon d'Élée (490-435 av. J.-C.) est surtout connu par ses fameux paradoxes « la flèche qui vole » et « Achille et la tortue ».

Euclide (350-276 av. J.-C.) est surtout connu par ses « Éléments », qui exposent méthodiquement la géométrie élémentaire, et la théorie des nombres. Il a été un excellent coordinateur des connaissances de son temps; il admettait sous le nom de postulats certaines propriétés qu'il ne savait pas démontrer.

Apollonius (260-200 av. J.-C.) est le grand géomètre de l'époque grecque.

Archimède (287-212 av. J.-C.) a été le moins discuté des mathématiciens de son temps. Il est né à Syracuse, et aurait été parent du roi de cette ville, Hieron II.

Archimède a été un des plus grands génies de tous les temps. Il a découvert les propriétés des leviers, et la première loi de l'hydrostatique. Très aristocrate, il s'écriait : « Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai la terre ». Il avait peu d'estime pour ses réalisations pratiques en mécanique; ce sont cependant ses catapultes, ses grues à mâchoire de fer qui permirent au roi Hieron de repousser le Romain Marcellus qui assiégeait Syracuse.

La renaissance des mathématiques; de Descartes à Cauchy.

Descartes, naquit à La Haye, près de Tours, en 1596. Excellent élève chez les Jésuites de La Flèche, il commença rapidement à discuter la logique casuistique de ses maîtres, et en vint aux mathématiques après quelques évasions dans le métier des armes, et sa fameuse « conversion ».

En 1619, il inventait la géométrie analytique; il y travailla pendant vingt ans, au milieu d'aventures plus ou moins guerrières, ou galantes, ou mystiques. Pendant son séjour en Hollande, il s'intéressa à toutes les sciences : optique, anatomie, médecine, astronomie.

Il consigna ses recherches dans un traité « Le Monde », mais afin de s'éviter des ennuis analogues à ceux de Galilée, il recula la publication de ce traité jusque après sa mort.

Cependant en 1637 parut le fameux « Discours de la Méthode ».

Descartes est mort à la cour de la reine Christine à Stockholm en 1650. Il a apporté une contribution importante à l'évolution des mathématiques.

Fermat (1601-1665) est un amateur très averti des mathématiques. Il s'est intéressé à de nombreux problèmes sur les nombres, sur les jeux et se trouve ainsi aux sources du calcul des probabilités.

Newton, né le jour de Noël 1642, en Angleterre, poursuivit les travaux de Descartes, de Kepler et de Galilée en géométrie analytique et en dynamique. Il découvrit les lois qui régissent le mouvement des planètes, et de nombreux éléments de calcul différentiel.

Il s'éteignit le 20 mars 1727 après avoir été comblé d'honneurs, et fut enterré à l'Abbaye de Westminster.

Leibniz (1646-1716) commence ses études à l'Université de Leipzig, et les termine à Nuremberg. Il a d'abord étudié le droit avant de s'intéresser aux mathématiques. A vingt ans il rêvait de créer « une méthode générale dans laquelle toutes les vérités de la raison seraient réduites à une sorte de calcul ».

Ses travaux portent sur les débuts du calcul différentiel. Son esprit s'est intéressé à tout : économie, droit, diplomatie.

Gauss, né à Brunswick, en Allemagne, le 20 avril 1777 est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Très précoce, dès l'âge de dix ans, il devinait les propriétés des progressions.

Ses premiers travaux portent sur la série du binôme et les séries infinies convergentes. A peine âgé de vingt ans, il s'intéressa aux congruences et aux résidus quadratiques; de nombreux résultats d'arithmétique lui sont dus. Il introduisit les nombres complexes et en a donné la signification géométrique classique.

En 1801, il publie les « Disquisitiones Arithmeticae », son premier chef-d'œuvre.

Dans la seconde partie de sa vie, Gauss fait des travaux sur la géométrie non euclidienne, sur les fonctions monogènes d'une variable complexe, sur les surfaces et la géométrie différentielle. Les travaux de cette seconde partie, placent Gauss déjà dans la période moderne.

Le cerveau de Gauss bouillonnait d'idées nouvelles; il n'avait pas le temps de toutes les écrire.

Il est mort le 23 février 1855 à l'âge de soixante-dix-huit ans.

Cauchy (1789-1857), esprit inventif et fertile, introduisit la rigueur en analyse mathématique; il fit faire de gros progrès à l'analyse combinatoire, et semble être à l'origine de la théorie des groupes; en effet il s'est intéressé à la théorie des substitutions et aux groupes d'opérations.

Son esprit subtil s'est porté à l'arithmétique; et Cauchy a même démontré un théorème que Fermat avait signalé.

L'œuvre de Cauchy comprend 789 mémoires. Il eut de nombreux démêlés de priorité, de préséance et fut assez impopulaire parmi ses collègues.

De nombreux mathématiciens ont travaillé à la construction de l'édifice mathématique, tels *Abel*, *Lagrange*, *Monge*, *Fourier*, *Euler*, *Laplace*, *Jacobi*, *Hamilton* et bien d'autres.

La période moderne.

Gauss et Cauchy font la transition avec la période moderne; il en sont des précurseurs.

Lobatchewsky (1793-1856) est aussi un précurseur; le premier il eut l'idée d'attaquer le postulat d'Euclide; il a « défié un axiome » et a assuré ce défi en construisant une géométrie dans laquelle par un point il passe deux parallèles et une infinité de non sécantes à une droite donnée. De telles idées ont mené à l'Axiomatique.

Galois né le 28 octobre 1811 à Bourg-la-Reine près de Paris, entra à douze ans au Lycée Louis-le-Grand; il fut parfaitement incompris de ses professeurs. Il échoua au concours d'entrée à Polytechnique, malgré sa supériorité (il lisait les œuvres de Legendre, d'Abel, de Lagrange, aussi facilement qu'un roman).

La malchance le poursuivit : tous ses mémoires, tous ses travaux s'égarèrent! Déçu, il se lance alors dans la politique; il va plusieurs fois en prison.

Le 30 mai 1832 il est tué dans un duel ridicule plus ou moins politique. Dans une « lettre à tous les républicains » il écrit le 29 mai 1832 : « Je prie tous les patriotes et amis de ne pas me reprocher de mourir autrement que pour le pays, je meurs victime d'une infâme coquette et de deux dupes de cette coquette... »

Dans la nuit du 29 au 30 mai, il résuma rapidement par écrit toutes ses recherches.

Malgré une vie très brève, Galois a donné la solution du problème des conditions de résolubilité des équations par radicaux.

Dedekind (1831-1916) est l'un des grands mathématiciens modernes; c'est le dernier élève de Gauss. Il fut un des premiers à signaler l'importance de la notion de groupe en algèbre. Dans la théorie des nombres, il a introduit la notion de « coupure ». Il a étudié aussi les idéaux.

Cantor est né le 3 mars 1845 à Saint-Petersbourg, de parents danois; il vint très jeune à Francfort-sur-le-Main et opta pour la nationalité allemande.

Élève de Kummer, de Weierstrass, de Kronecker son futur ennemi, il fut progressivement amené à étudier profondément les fondements de l'analyse. Dès 1874 il publie son premier travail révolutionnaire sur la théorie des groupes; il crée des êtres mathématiques et pose les règles de combinaison de ces êtres.

Il définit la notion de nombre cardinal, le cardinal des ensembles équipotents. Cantor est vraiment le père des mathématiques modernes.

Il est mort dans un asile d'aliénés, à Halle, le 6 janvier 1918.

Hilbert (1862-1943) est né à Kœnigsberg. Ses premiers travaux sur la « théorie des invariants » sont déjà révolutionnaires par la simplicité de l'exposé des notions déjà acquises dans ce domaine. Il étudie ensuite la théorie des équations intégrales.

Mais c'est en 1899 que paraît son œuvre la plus importante « Grundlagen der Geometrie » (les fondements de la géométrie) dans laquelle il fait un exposé de la géométrie élémentaire à partir d'un certain nombre d'axiomes.

Avec Cantor et Hilbert l'Axiomatique est créée; de nombreux mathématiciens contemporains ont repris, mis au point ces idées nouvelles, cette construction parfaitement cohérente des mathématiques.

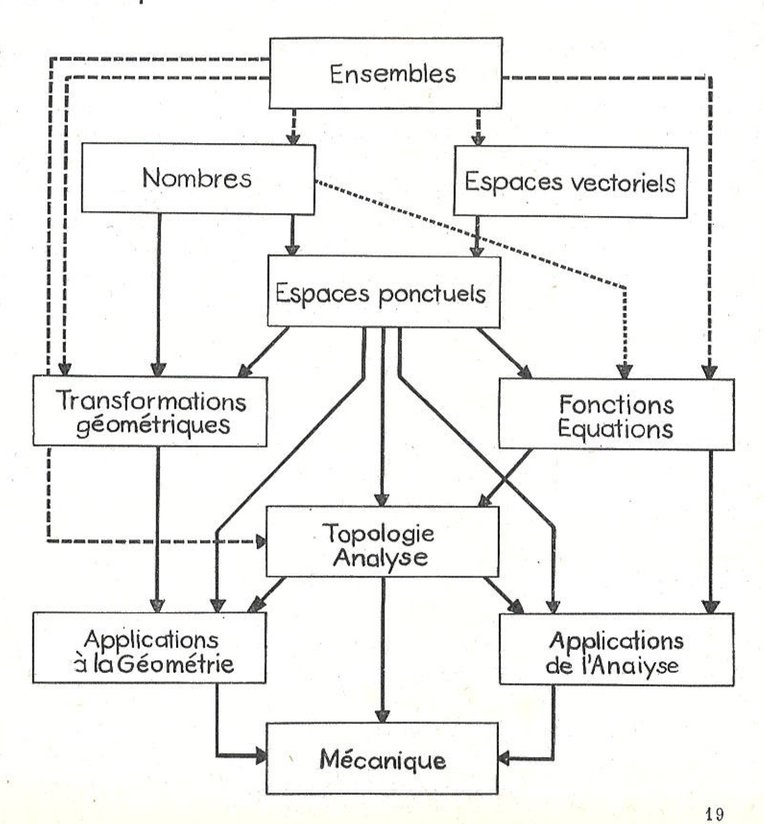
Il revint à un groupe de mathématiciens anonymes de l'Université de Nancy de publier progressivement un traité complet de mathématiques modernes; signé du nom de *Nicolas Bourbaki*, il est constamment mis à jour.

Aujourd'hui comme hier les mathématiques évoluent; et c'est le moment de se remettre en mémoire ce qu'écrivait déjà Voltaire : « Les théories sont comme les souris, elles passent par quatre-vingt dix-neuf trous, le centième les arrêtent. »

Note II

VUE D'ENSEMBLE SUR LES COURS DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Le schéma suivant indique l'articulation des différentes parties du cours de mathématiques élémentaires.



La théorie des ensembles.

La théorie des ensembles a été traitée assez complètement; ainsi il ne sera guère nécessaire plus tard que d'apporter quelques compléments. Elle comprend outre les notions de réunion, d'intersection, etc... un exposé sur la notion de correspondance et sur les relations entre les éléments d'un ensemble. Cette théorie doit son importance au fait que sur elle repose toute la construction.

La théorie des nombres.

La notion d'ensembles équipotents permet une définition du cardinal d'un ensemble et des nombres cardinaux finis; une théorie du P.G.C.D. et du P.P.C.M. est alors possible dans N.

De l'ensemble N des entiers naturels, on déduit par symétrisation de l'addition dans N, l'anneau Z des entiers rationnels. Les congruences dans Z permettent l'introduction des anneaux ou des corps des entiers modulo *m*.

La symétrisation de la multiplication dans Z donne le corps Q des rationnels.

Les réels sont introduits à l'aide des sections minorées de Q; c'est une modernisation des « coupures de Dedekind ». Le choix de cette méthode se justifie par le fait qu'elle est essentiellement algébrique; elle n'utilise aucune notion de limite; ce qui permet de placer l'étude des nombres réels en Algèbre et non en Topologie. De plus elle n'utilise pas la notion géométrique de droite; l'utilisation de la notion de droite n'est pas satisfaisante, à moins de démontrer auparavant toutes les propriétés topologiques de la droite... ou de les admettre, ce qui ne fait que reculer le problème.

Les nombres complexes sont présentés algébriquement à l'aide de la notion de couple.

Les progressions finies terminent cette théorie des nombres.

L'exposé est donc essentiellement algébrique; il n'utilise ni la topologie, ni la géométrie. Les notions de groupes, d'anneaux, de corps de dégagent progressivement du cours.

Les espaces vectoriels.

Les espaces vectoriels sont présentés d'abord sur deux exemples : espace vectoriel des suites finies; espace vectoriel des matrices unicolonnes.

L'exposé sur l'indépendance linéaire des vecteurs est facilité par la notion de déterminant. La notion importante de base d'un espace vectoriel est alors présentée aussi simplement que possible.

Vient ensuite une théorie des espaces vectoriels réels euclidiens.

On introduit les notions de produit scalaire de deux vecteurs, et de norme d'un vecteur.

Les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. C'est la seule définition valable de l'orthogonalité. Comment serait-il possible de faire comprendre ultérieurement à nos élèves qu'il y a de nombreux produits scalaires et partant de nombreuses orthogonalités ? Comment pourrait-on leur parler plus tard des fonctions orthogonales ? Il importe de donner de l'orthogonalité une définition qui supporte sans contradiction les extensions futures, et qui dans le présent se révèle particulièrement commode.

On notera aussi l'introduction du cosinus et du sinus d'un bivecteur, sans la notion d'angle; cela permet de généraliser ces notions de cosinus et de sinus dans un espace de dimension *n*.

Les polynômes formels fournissent des exemples d'anneaux et d'algèbres; ils peuvent être construits sur un anneau ou sur un corps quelconque choisi ici commutatif et unitaire pour simplifier.

De toute cette première partie de l'exposé se dégage et s'impose à l'élève la notion d'Axiomatique.

Les espaces ponctuels.

L'introduction de la géométrie peut se faire de deux façons différentes :

1⁰ La présentation axiomatique à la manière de Hilbert; les êtres points, droites, plans ne sont pas définis, et seules sont précisées les relations entre ces êtres : ce sont les axiomes de la géométrie.

2⁰ La construction d'une géométrie dans laquelle les êtres sont définis, et les axiomes démontrés.

La seconde méthode a été retenue dans ce manuel pour deux raisons majeures : elle est plus simple et surtout elle permet une extension très facile aux espaces de dimension supérieure à 3. De plus les diagrammes sont les figures de la géométrie élémentaire.

On a donc construit successivement, les espaces ponctuels affines sur un corps K commutatif quelconque; ce qui donne une idée des géométries finies. La droite R est alors présentée avec sa métrique classique; puis suivent les droites et plans dans K^2 et K^3.

Les espaces affines réels et les espaces métriques réels sont présentés évidemment en utilisant les connaissances déjà acquises sur les espaces vectoriels euclidiens.

Une leçon a été ajoutée sur les espaces projectifs; ce qui permet de préciser l'idée de point à l'infini sur la droite R; il ne faut pas confondre la droite projective, $R \cup \{\infty\}$, et la droite achevée $R \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Fonctions et équations.

Les fonctions polynomiales permettent de marquer nettement ce qui les distinguent des polynômes formels.

Applications linéaires et endomorphismes sont ensuite étudiés, qui préparent l'étude des transformations géométriques.

Les fonctions E et M permettent de libérer l'étude des logarithmes des ennuis du calcul pratique.

Un exposé complet sur les équations caractérise cette partie du cours; il importait de mettre au point cette question en la précisant et en montrant la primauté de l'ensemble dans lequel on résout l'équation.

Les premières notions de courbes et de surfaces sont présentées; elles seront évidemment reprises et précisées en Topologie.

Les transformations géométriques.

L'idée première est de présenter de ces questions un exposé rigoureux et non contradictoire, et dépourvu de cercles vicieux.

Les propriétés générales des transformations affines permettent de ne pas reprendre plusieurs fois les mêmes démonstrations; les démonstrations sont d'ailleurs vectorielles et intrinsèques.

L'égalité des figures par superposition, foncièrement fausse, est évidemment exclue; le mot égalité n'est même plus utilisé; on a étudié les isométries et, comme conséquence, les ensembles ponctuels isométriques.

La trigonométrie ne peut se placer qu'après les isométries. La mesure des angles, exposée par une application de la droite R sur le cercle trigonométrique (U) a l'avantage de se rapprocher de l'application $\theta \rightarrow e^{i\theta}$.

Les propriétés algébriques de l'inversion sont étudiées; il ne faut pas s'étonner de trouver les propriétés topologiques de l'inversion (et des autres transformations) en Topologie.

La droite complexe C donne, évidemment, les propriétés géométriques des nombres complexes. Le plan d'Argaud-Cauchy, avec son point à l'infini, n'est que le diagramme de la droite C projective; quelques pages montrent tout le parti qu'il serait possible de tirer des transformations de la droite C.

Topologie et Analyse.

A partir de notions élémentaires de Topologie (ouverts, voisinages) se développe l'étude de la continuité, des limites des suites et des fonctions. Les structures sont mises nettement en évidence.

La dérivation des fonctions réelles, des fonctions vectorielles, permet de terminer l'étude des courbes continues et régulières.

Le théorème de Rolle, et le théorème des accroissements finis sont

prolongés par des formes réduites, mais très utiles, du théorème de Taylor et du théorème de Mac-Laurin.

Une étude assez complète des primitives à partir de la notion d'intégrale termine l'exposé.

Application de l'analyse.

C'est en grande partie l'étude des fonctions et de leurs représentations graphiques qui retient l'attention; l'exposé est classique.

La fonction logarithme népérien est présentée comme primitive de $\frac{1}{x}$; la fonction exponentielle s'en déduit.

Les coniques sont définies comme ensemble de points satisfaisant à l'équation $Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0$. Quelques cas importants sont étudiés; les représentations graphiques se font dans le plan affine ou dans le plan métrique orthonormé. Cette définition des coniques est seule valable, sinon la courbe représentative de la fonction $y = x^2$ dans le plan affine ne serait pas une parabole.

Le calcul intégral est appliqué au calcul des aires et des volumes.

Applications à la géométrie.

Les problèmes de contact sont traités; ce qui permet d'étudier les propriétés topologiques des transformations.

Viennent ensuite l'étude des faisceaux de cercles, des pôles et polaires, et enfin une étude géométrique des coniques dans le plan orthonormé. L'étude des coniques ne doit pas être extensive, car les coniques n'ont plus beaucoup d'intérêt depuis que les formes quadratiques se sont substituées avantageusement à elles.

Cinématique.

Des notions élémentaires de cinématique sont présentées; elles complètent et couronnent les études précédentes.

Les éléments de géométrie descriptique et quelques exercices de calcul numérique ont été rassemblés à la fin du manuel. Le professeur pourra suivant sa préférence répartir leur étude tout au long de l'année.

Ainsi se termine une fresque, certes fort incomplète mais formatrice, des mathématiques modernes.

Son étude doit permettre à nos élèves d'entrer sans heurt, dans les classes de préparation aux concours d'entrée aux grandes écoles et dans les classes de propédeutique des Facultés.

Logarithmes néperiens de 0 à 1000.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— ∞	0	0,693 1	1,098 6	1,386 3	1,609 4	1,791 8	1,945 9	2,079 4	2,197 2
1	2,302 6	2,397 9	2,484 9	2,564 9	2,639 1	2,708 1	2,772 6	2,833 2	2,890 4	2,944 4
2	2,995 7	3,044 5	3,091 0	3,135 5	3,178 1	3,218 9	3,258 1	3,295 8	3,332 2	3,367 3
3	3,401 2	3,434 0	3,465 7	3,496 5	3,526 4	3,555 3	3,583 5	3,610 9	3,637 6	3,663 6
4	3,688 9	3,713 6	3,737 7	3,761 2	3,784 2	3,806 7	3,828 6	3,850 1	3,871 2	3,891 8
5	3,912 0	3,931 8	3,951 2	3,970 3	3,989 0	4,007 3	4,025 4	4,043 1	4,060 4	4,077 5
6	4,094 3	4,110 9	4,127 1	4,143 1	4,158 9	4,174 4	4,189 7	4,204 7	4,219 5	4,234 1
7	4,248 5	4,262 7	4,276 7	4,290 5	4,304 1	4,317 5	4,330 7	4,343 8	4,356 7	4,369 4
8	4,382 0	4,394 4	4,406 7	4,418 8	4,430 8	4,442 7	4,454 3	4,465 9	4,477 3	7,488 6
9	4,499 8	4,510 9	4,521 8	4,532 6	4,543 3	4,553 9	4,564 3	4,574 7	4,585 0	4,595 1
10	4,605 2	4,615 1	4,625 0	4,634 7	4,644 4	4,654 0	4,663 4	4,672 8	4,682 1	4,691 3
11	4,700 5	4,709 5	4,718 5	4,727 4	4,736 2	4,744 9	4,753 6	4,762 2	4,770 7	4,779 1
12	4,787 5	4,795 8	4,804 0	4,812 2	4,820 3	4,828 3	4,836 3	4,844 2	4,852 0	4,859 8
13	4,867 5	4,875 2	4,882 8	4,890 3	4,897 8	4,905 3	4,912 7	4,920 0	4,9.7 3	4,934 5
14	4,941 6	4,948 8	4,955 8	4,962 8	4,969 8	4,976 7	4,983 6	4,990 4	4,997 2	5,003 9
15	5,010 6	5,017 3	5,023 9	5,030 4	5,037 0	5,043 4	5,049 9	5,056 2	5,062 6	5,068 9
16	5,075 2	5,081 4	5,087 6	5,093 8	5,099 9	5,105 9	5,112 0	5,118 0	5,124 0	5,129 9
17	5,135 8	5,141 7	5,147 5	5,153 3	5,159 1	5,164 8	5,170 5	5,176 1	5,181 8	5,187 4
18	5,193 0	5,198 5	5,204 0	5,209 5	5,214 9	5,220 4	5,225 7	5,231 1	5,236 4	5,241 7
19	5,247 0	5,252 3	5,257 5	5,262 7	5,267 9	5,273 0	5,278 1	5,283 2	5,288 3	5,293 3
20	5,298 3	5,303 3	5,308 3	5,313 2	5,318 1	5,323 0	5,327 9	5,332 7	5,337 5	5,342 3
21	5,347 1	5,351 9	5,356 6	5,361 3	5,366 0	5,370 6	5,375 3	5,379 9	5,384 5	5,389 1
22	5,393 6	5,398 2	5,402 7	5,407 2	5,411 6	5,416 1	5,420 5	5,425 0	5,429 3	5,433 7
23	5,438 1	5,442 4	5,446 7	5,451 0	5,455 3	5,459 6	5,463 8	5,468 1	5,472 3	5,476 5
24	5,480 6	5,484 8	5,488 9	5,493 1	5,497 2	5,501 3	5,505 3	5,509 4	5,513 4	5,517 5
25	5,521 5	5,525 5	5,529 4	5,533 4	5,537 3	5,541 3	5,545 2	5,549 1	5,553 0	5,556 8
26	5,560 7	5,564 5	5,568 3	5,572 2	5,575 9	5,579 7	5,583 5	5,587 2	5,591 0	5,594 7
27	5,598 4	5,602 1	5,605 8	5,609 5	5,613 1	5,616 8	5,620 4	5,624 0	5,627 6	5,631 2
28	5,634 8	5,638 4	5,641 9	5,645 4	5,649 0	5,652 5	5,656 0	5,659 5	5,663 0	5,666 4
29	5,669 9	5,673 3	5,676 8	5,680 2	5,683 6	5,687 0	5,690 4	5,693 7	5,697 1	5,700 4
30	5,703 8	5,707 1	5,710 4	5,713 7	5,717 0	5,720 3	5,723 6	5,726 8	5,730 1	5,733 3
31	5,736 6	5,739 8	5,743 0	5,746 2	5,749 4	5,752 6	5,755 7	5,758 9	5,762 1	5,765 2
32	5,768 3	5,771 4	5,744 6	5,777 7	5,780 7	5,783 8	5,786 9	5,790 0	5,793 0	5,796 1
33	6,799 1	5,802 1	5,805 1	5,808 1	5,811 1	5,814 1	5,817 1	5,820 1	5,823 0	5,826 0
34	5,828 9	5,831 9	5,834 8	5,837 7	5,840 6	5,843 5	5,846 4	5,849 3	5,852 2	5,855 1
35	5,857 9	5,860 8	5,863 6	5,866 5	5,869 3	5,872 1	5,874 9	5,877 7	5,880 5	5,833 3
36	5,88 1	5,888 9	5,891 6	5,894 4	5,897 2	5,899 9	5,902 6	5,905 4	5,908 1	5,910 8
37	5,913 5	5,916 2	5,918 9	5,921 6	5,924 3	5,926 9	5,929 6	5,932 2	5,934 9	5,937 5
38	5,940 2	5,942 8	5,945 4	5,948 0	5,950 6	5,953 2	5,955 8	5,958 4	5,961 0	5,963 6
39	5,966 1	5,968 7	5,971 3	5,973 8	5,976 4	5,978 9	5,981 4	5,983 9	5,986 5	5,989 0
40	5,991 5	5,994 0	5,996 5	5,998 9	6,001 4	6,003 9	6,006 4	6,008 8	6,011 3	6,013 7
41	6,016 2	6,018 6	6,021 0	6,023 4	6,025 9	6,028 3	6,030 7	6,033 1	6,035 5	6,037 9
42	6,040 3	6,042 6	6,045 0	6,047 4	6,049 7	6,052 1	6,054 4	6,056 8	6,059 1	6,061 5
43	6,063 8	6,066 1	6,068 4	6,070 7	6,073 0	6,075 3	6,077 6	6,079 9	6,082 2	6,084 5
44	6,086 8	6,089 0	6,091 3	6,093 6	6,095 8	6,098 1	6,100 3	6,102 6	6,104 8	6,107 0
45	6,109 2	6,111 5	6,113 7	6,115 9	6,118 1	6,120 3	6,122 5	6,124 7	6,126 9	6,129 1
46	6,131 2	6,133 4	6,135 6	6,137 7	6,139 9	6,142 0	6,144 2	6,146 3	6,148 5	6,150 6
47	6,152 7	6,154 9	6,157 0	6,159 1	6,161 2	6,163 3	6,165 4	6,167 5	6,169 6	6,171 7
48	6,173 8	6,175 9	6,177 9	6,180 0	6,182 1	6,184 1	6,186 2	6,188 3	6,190 3	6,192 4
49	6,194 4	6,196 4	6,198 5	6,200 5	6,202 5	6,204 6	6,206 6	6,208 6	6,210 6	6,212 6
50	6,214 6	6,216 6	6,218 6	6,220 6	6,222 6	6,224 6	6,226 5	6,228 5	6,230 5	6,232 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6,214 6	6,216 6	6,218 6	6,220 6	6,222 6	6,224 6	6,226 5	6,228 5	6,230 5	6,232 4
1	6,234 4	6,236 4	6,238 3	6,240 3	6,242 2	6,244 2	6,246 1	6,248 0	6,250 0	6,251 9
2	6,253 8	6,255 8	6,257 7	6;259 6	6,261 5	6,263 4	6,265 4	6,267 2	6,269 1	6,271 0
3	6,272 9	6,274 8	6,276 6	6,278 5	6,280 4	6,282 3	6,284 1	6,286 0	6,287 9	6,289 7
4	6,291 6	6,293 4	6,295 3	6,297 1	6,298 9	6,300 8	6,302 6	6,304 4	6,306 3	6,308 1
5	6,309 9	6,311 7	6,313 5	6,315 4	6,317 2	6.319 0	6,320 8	6,322 6	6,324 4	6,326 1
6	6,327 9	6,329 7	6,331 5	6,333 3	6,335 1	6,336 8	6,338 6	6,340 4	6,342 1	6,343 9
7	6,345 6	6,347 4	6,349 1	6,350 9	6,352 6	6,354 4	6,356,1	6,357 8	6,359 6	6,361 3
8	6,363 0	6,364 8	6,366 5	6,368 2	6,369 9	6,371 6	6,373 3	6,375 0	6,376 7	6,378 4
59	6,380 1	6,381 8	6,383 5	6,385 2	6,386 9	6,388 6	6,390 2	6,391 9	6,393 6	6,395 3
60	6,396 9	6,398 6	6,400 3	6,401 9	6,403 6	6,405 2	6,406 9	6,408 5	6,410 2	6,411 8
1	6,413 5	6,415 1	6,416 7	6,418 4	6,420 0	6,421 6	6,432 2	6,424 9	6,426 5	6,428 1
2	6,429 7	6,431 3	6,432 9	6,434 5	6,436 2	6,437 8	6,439 4	6,440 9	6,442 5	6,444 1
3	6,445 7	6,447 3	6,448 9	6,450 5	6,452 0	6,453 6	6,455 2	6,456 8	6,458 3	6,459 9
4	6,461 5	6,463 0	6,464 6	6,466 1	6,467 7	6,469 3	6,470 8	6,472 3	6,473 9	6,475 4
5	6,477 0	6,478 5	6,480 0	6,481 6	6,483 1	6,484 6	6,486 2	6,487 7	6,489 2	6,490 7
6	6,492 2	6,493 8	6,495 3	6,496 8	6,498 3	6,499 8	6,501 3	6,502 8	6,504 3	6,505 8
7	6,507 3	6,508 8	6,510 3	6,511 7	6,513 2	6,514 7	6,516 2	6,517 7	6,519 1	6,520 6
8	6,522 1	6,523 6	6,525 0	6,526 5	6,528 0	6,529 3	6,530 9	6,532 3	6,533 8	6,535 2
69	6,536 7	6,538 1	6,539 6	6,541 0	6,542 5	6,543 9	6,545 3	6,546 8	6,548 2	6,549 7
70	6,551 1	6,552 5	6,553 9	6,555 4	6,556 8	6,558 2	6,559 6	6,561 0	6,562 4	6,563 9
1	6,565 3	6,566 7	6,568 1	6,569 5	6,570 9	6,572 3	6,573 7	6,575 1	6,576 5	6,577 9
2	6,579 3	6,580 6	6,582 0	6,583 4	6,584.8	6,586 2	6,587 6	6,588 9	6,590 3	6,691 7
3	6,593 0	6,594 4	6,595 8	6,597 1	6,598 5	6,599 9	6,601 2	6,602 6	6,603 9	6,605 3
4	6,606 7	6,608 0	6,609 3	6,610 7	6,612 0	6,613 4	6,614 7	6,616 1	6,617 4	6,618 7
5	6,620 1	6,621 4	6,622 7	6,624 1	6,625 4	6,626 7	6,628 0	6,629 4	6,630 7	6,632 0
6	6,633 3	6,634 6	6,635 9	6,637 3	6,638 6	6,639 9	6,641 2	6,642 5	6,643 8	6,645 1
7	6,646 4	6,647 7	6,649 0	6,650 3	6,651 6	6,652 9	6,654 2	6,655 4	6,656 7	6,658 0
8	6,659 3	6,660 6	6,661 9	6,663 1	6,664 4	6,665 7	6,667 0	6,668 2	6,669 5	6,670 8
79	6,672 0	6,673 3	6,674 6	6,675 8	6,677 1	6,678 3	6,679 6	6,680 9	6,682 1	6,683 4
80	6,684 6	6,685 9	6,687 1	6,688 4	6,689 6	6,690 8	6,692 1	6,693 3	6,694 6	6,695 5
1	6,697 0	6,698 3	6,699 5	6,700 7	6,702 0	6,703 2	6,704 4	6,705 6	6,706 9	6,708 1
2	6,709 3	6,710 5	6,711 7	6,713 0	6,174 2	6,715 4	6,716 6	6,717 8	6,719 0	6,720 2
3	6,721 4	6,722 6	6,723 8	6,725 0	6,726 2	6,727 4	6,728 6	6,729 8	6,731 0	6,732 2
4	6,733 4	6,734 6	6,735 8	6,737 0	6,738 2	6,739 3	6,740 5	6,741 7	6,742 9	6,744 1
5	6,745 2	6,746 4	6,747 6	6,748 8	6,749 9	6,751 1	6,752 3	6,753 4	6,754 6	6,755 8
6	6,756 9	6,758 1	6,759 3	6,760 4	6,761 6	6,762 7	6,763 9	6,765 0	6,766 2	6,767 3
7	6,768 5	6,769 6	6,770 8	6,771 9	6,773 1	6,774 2	6,775 4	6,776 5	6,777 6	6,778 8
8	6,779 9	6,781 1	6,782 2	6,783 3	6,784 5	6,785 6	6,786 7	6,787 8	6,789 0	6,790 1
89	6,791 2	6,792 3	6,793 5	6,794 6	6,795 7	6,796 8	6,797 9	6,799 1	6,800 2	6,801 3
90	6,802 4	6,803 5	6,804 6	6,805 7	6,806 8	6,807 9	6,809 0	6,810 1	6,811 2	6,812 3
1	6,813 4	6,814 5	6,815 6	6,816 7	6,817 8	6,818 9	6,820 0	6,821 1	6,822 2	6,823 3
2	6,824 4	6,825 5	6,826 5	6,827 6	6,828 7	6,829 8	6,830 9	6,832 0	6,833 0	6,834 1
3	6,835 2	6,836 3	6,837 3	6,838 4	6,839 5	6,840 5	6,841 6	6,842 7	6,843 7	6,844 8
4	6,845 9	6,846 9	6,848 0	6,849 1	6,850 1	6,851 2	6,852 2	6,853 3	6,854 4	6,855 4
5	6,856 5	6,857 5	6,858 6	6,859 6	6,860 7	6,861 7	6,862 8	6,863 8	6,864 8	6,865 9
6	6,866 9	6,868 0	6,869 0	6,870 1	6,871 1	6,872 1	6,873 2	6,874 2	6,875 2	6,876 3
7	6,877 3	6,878 3	6,879 4	6,880 4	6,881 4	6,882 4	6,883 5	6,884 5	6,885 5	6,886 5
8	6,887 6	6,888 6	6,889 6	6,890 6	6,891 6	6,892 6	6,893 7	6,894 7	6,895 7	6,896 7
99	6,897 7	6,898 7	6,899 7	6,900 7	6,901 7	6,902 7	6,903 7	6,904 8	6,905 8	6,906 8
100	6,907 8	6,908 8	6,909 8	6,910 8	6,911 7	6,912 7	6,913 7	6,914 7	6,915 7	6,916 7

Exponentielles

x	e^x	e^{-x}
0,00	1,	1,
0,01	1,010 1	0,990 0
0,02	1,030 2	0,980 2
0,03	1,030 5	0,970 4
0,04	1,040 8	0,960 8
0,05	1,051 3	0,951 2
0,06	1,061 8	0,941 8
0,07	1,072 5	0,932 4
0,08	1,083 3	0,923 1
0,09	1,094 2	0,913 9
0,10	1,105 2	0,904 8
0,11	1,116 3	0,895 8
0,12	1,127 5	0,886 9
0,13	1,138 8	0,878 1
0,14	1,150 3	0,869 4
0,15	1,161 8	0,860 7
0,16	1,173 5	0,852 1
0,17	1,185 3	0,843 7
0,18	1,197 2	0,835 3
0,19	1,209 2	0,827 0
0,20	1,221 4	0,818 7
0,21	1,233 7	0,810 6
0,22	1,246 1	0,802 5
0,23	1,258 6	0,794 5
0,24	1,271 2	0,786 6
0,25	1,284 0	0,778 8
0,26	1,296 9	0,771 1
0,27	1,310 0	0,763 4
0,28	1,323 1	0,755 8
0,29	1,336 4	0,748 3
0,30	1,349 9	0,740 8
0,31	1,363 4	0,733 4
0,32	1,377 1	0,726 1
0,33	1,391 0	0,718 9
0,34	1,404 9	0,711 8
0,35	1,419 1	0,704 7
0,36	1,433 3	0,697 7
0,37	1,447 7	0,690 7
0,38	1,462 3	0,683 9
0,39	1,477 0	0,677 1
0,40	1,491 8	0,670 3
0,41	0,506 8	0,663 7
0,42	1,522 0	0,657 0
0,43	1,537 3	0,650 5
0,44	1,552 7	0,644 0
0,45	1,568 3	0,637 6
0,46	1,584 1	0,631 3
0,47	1,600 0	0,625 0
0,48	1,616 1	0,618 8
0,49	1,632 3	0,612 6

x	e^x	e^{-x}
0,50	1,648 7	0,606 5
0,51	1,665 3	0,600 5
0,52	1,682 0	0,594 5
0,53	1,698 9	0,588 6
0,54	1,716 0	0,582 7
0,55	1,733 3	0,576 9
0,56	1,750 7	0,571 2
0,57	1,768 3	0,565 5
0,58	1,786 0	0,559 9
0,59	1,804 0	0,554 3
0,60	1,822 1	0,548 8
0,61	1,840 4	0,543 4
0,62	1,858 9	0,537 9
0,63	1,877 6	0,532 6
0,64	1,896 5	0,527 3
0,65	1,915 5	0,522 0
0,66	1,934 8	0,516 9
0,67	1,954 2	0,511 7
0,68	1,973 9	0,506 6
0,69	1,993 7	0,501 6
0,70	2,013 8	0,496 6
0,71	2,034 0	0,491 6
0,72	2,054 4	0,486 8
0,73	2,075 1	0,481 9
0,74	2,095 9	0,477 1
0,75	2,117 0	0,472 4
0,76	2,138 3	0,467 7
0,77	2,159 8	0,463 0
0,78	2,181 5	0,458 4
0,79	2,203 4	0,453 8
0,80	2,225 5	0,449 3
0,81	2,247 9	0,444 9
0,82	2,270 5	0,440 4
0,83	2,293 3	0,436 0
0,84	2,316 4	0,431 7
0,85	2,339 6	0,427 4
0,86	2,363 2	0,423 2
0,87	2,386 9	0,419 0
0,88	2,410 9	0,414 8
0,89	2,435 1	0,410 7
0,90	2,459 6	0,406 6
0,91	2,484 3	0,402 5
0,92	2,509 3	0,398 5
0,93	2,534 5	0,394 6
0,94	2,560 0	0,390 6
0,95	2,585 7	0,386 7
0,96	2,611 7	0,382 9
0,97	2,637 9	0,379 1
0,98	2,664 5	0,375 3
0,99	2,691 2	0,371 6

x	e^x	e^{-x}
1,00	2,718 3	0,367 9
1,01	2,745 6	0,364 2
1,02	2,773 2	0,360 6
1,03	2,801 1	0,357 0
1,04	2,829 2	0,353 5
1,05	2,857 7	0,349 9
1,06	2,886 4	0,346 5
1,07	2,915 4	0,343 0
1,08	2,944 7	0,339 6
1,09	2,974 3	0,336 2
1,10	3,004 2	0,332 9
1,11	3,034 4	0,329 6
1,12	3,064 9	0,326 3
1,13	3,095 7	0,323 0
1,14	3,126 8	0,319 8
1,15	3,158 2	0,316 6
1,16	3,189 9	0,313 5
1,17	3,222 0	0,310 4
1,18	3,254 4	0,307 3
1,19	3,287 1	0,304 2
1,2	3,320 1	0,301 1
1,3	3,696 3	0,272 5
1,4	4,045 2	0,246 6
1,5	4,481 7	0,223 1
1,6	4,953 0	0,201 9
1,7	5,473 9	0,182 7
1,8	6,049 6	0,165 3
1,9	6,685 9	0,149 6
2,0	7,389 1	0,135 34
2,1	8,166	0,122 46
2,2	9,025	0,110 80
2,3	9,974	0,100 26
2,4	11,023	0,090 72
2,5	12,182	0,082 08
2,6	13,464	0,074 27
2,7	14,880	0,067 21
2,8	16,445	0,060 81
2,9	18,174	0,055 02
3,0	20,086	0,049 79
3,1	22,198	0,045 05
3,2	24,533	0,040 76
3,3	27,113	0,036 88
3,4	29,964	0,033 37
3,5	33,115	0,030 20
3,6	36,598	0,027 32
3,7	40,447	0,024 72
3,8	44,701	0,022 37
3,9	49,402	0,020 24
4,0	54,598	0,018 32

$e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}810\ 5$ $\qquad e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}207\ 9$

$e^{\pi} = 23{,}140\ 7$ $\qquad e^{-\pi} = 0{,}043\ 214$

INDEX

Les numéros donnés en référence sont les numéros des paragraphes.

TABLE DES MATIÈRES

Livre XI. — **Cinématique.**

Livre XII. — **Géométrie descriptive.**

Livre XIII. — **Calculs numériques.**

Imprimé en France
TYPOGRAPHIE FIRMIN-DIDOT ET Cie. – MESNIL (EURE). – 2618
Dépôt légal : 3e trimestre 1964. N° édit. 3182